Απειροστικός Λογισμός Ι

Ασκήσεις

Μ. Παπαδημητράκης

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. *Για καθεμία από τις ανισότητες*

$$|x+1| > 2, \quad |x-1| \le |x+1|, \quad \tfrac{x}{x+2} > \tfrac{x+3}{3x+1}, \quad \tfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \le 0$$

γράψτε ως διάστημα ή ως ένωση διαστημάτων το σύνολο των x για τα οποία αυτή είναι αληθής.

Λύση. (i) Η ανισότητα $|x+1| > 2$ λέει ότι η απόσταση του x από το -1 είναι μεγαλύτερη από 2. Άρα αληθεύει για τα στοιχεία του συνόλου $(-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$.
Η αλγεβρική λύση έχει ως εξής:

$$|x+1| > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x+1 < -2 \text{ ή } x+1 > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -3 \text{ ή } x > 1.$$

(ii) Η ανισότητα $|x-1| \le |x+1|$ λέει ότι η απόσταση του x από το 1 είναι μικρότερη ή ίση της απόστασης του x από το -1. Άρα αληθεύει για τα στοιχεία του συνόλου $[0, +\infty)$.
Αλγεβρικά:

$$|x-1| \le |x+1| \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 \le (x+1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 \le x^2 + 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge 0.$$

Με άλλον, αλλά λιγότερο βολικό, τρόπο:

$$\begin{aligned}
|x-1| \le |x+1| \quad &\Leftrightarrow \quad -|x+1| \le x-1 \le |x+1| \\
&\Leftrightarrow \quad |x+1| \ge 1-x \text{ και } |x+1| \ge x-1 \\
&\Leftrightarrow \quad (\ x+1 \ge 1-x \text{ και } x+1 \ge x-1\ ) \\
&\qquad \text{ή } (\ x+1 \ge 1-x \text{ και } x+1 \le 1-x\ ) \\
&\qquad \text{ή } (\ x+1 \le x-1 \text{ και } x+1 \ge x-1\ ) \\
&\qquad \text{ή } (\ x+1 \le x-1 \text{ και } x+1 \le 1-x\ ) \\
&\Leftrightarrow \quad x \ge 0 \text{ ή } x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge 0.
\end{aligned}$$

(iii) Θα χειριστούμε την ανισότητα $\frac{x}{x+2} > \frac{x+3}{3x+1}$ αλγεβρικά. Δεν θα πολλαπλασιάσουμε με το γινόμενο των παρονομαστών για να αποφύγουμε τις περιπτώσεις με το πρόσημό του.

$$\begin{aligned}
\tfrac{x}{x+2} > \tfrac{x+3}{3x+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{x}{x+2} - \tfrac{x+3}{3x+1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{2(x^2-2x-3)}{(x+2)(3x+1)} > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \tfrac{2(x-3)(x+1)}{(x+2)(3x+1)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)(x+1)(x+2)(3x+1) > 0.
\end{aligned}$$

Η τελευταία πολυωνυμική παράσταση μηδενίζεται στα διαδοχικά σημεία $-2, -1, -\frac{1}{3}, 3$. Άρα η ανισότητα αληθεύει για τα στοιχεία του συνόλου $(-\infty, -2) \cup (-1, -\frac{1}{3}) \cup (3, +\infty)$.
(iv) Θα χειριστούμε και την ανισότητα $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \le 0$ αλγεβρικά. Αυτή η ανισότητα είναι πιο απλή από την προηγούμενη. Κατ' αρχάς πρέπει να είναι $x \ne 2$ και άρα $(x-2)^2 > 0$. Άρα

$$\tfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)(x-3) \le 0 \text{ και } x \ne 2.$$

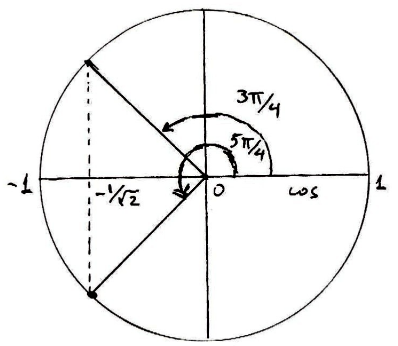
Άρα η ανισότητα αληθεύει για τα στοιχεία του συνόλου $[1, 2) \cup (2, 3]$. □

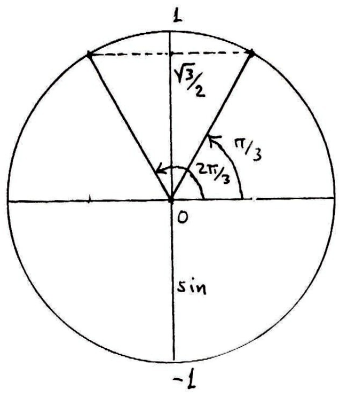
2. *Λύστε τις εξισώσεις*

$$\cos x = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin x = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cot x = -1, \quad \tan x = -\sqrt{3}.$$

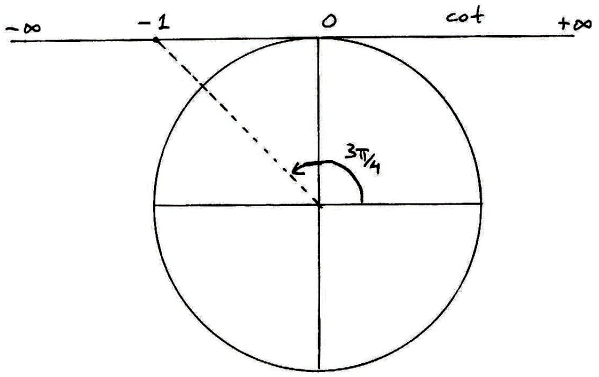
Λύση. (i) Η συνάρτηση $\cos x$ είναι 2π-περιοδική. Στο διάστημα $[0, 2\pi)$ η εξίσωση $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ έχει δύο λύσεις, τις $\frac{3\pi}{4}$ και $2\pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τις $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ για $k \in \mathbb{Z}$ και τις $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ για $k \in \mathbb{Z}$.

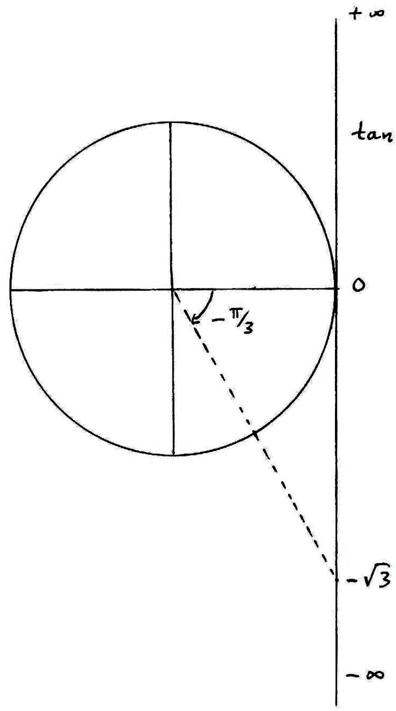
(ii) Η συνάρτηση $\sin x$ είναι 2π-περιοδική. Στο διάστημα $[0, 2\pi)$ η εξίσωση $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ έχει δύο λύσεις, τις $\frac{\pi}{3}$ και $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$. Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τις $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ για $k \in \mathbb{Z}$ και τις $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ για $k \in \mathbb{Z}$.





(iii) Η συνάρτηση $\cot x$ είναι π-περιοδική. Στο διάστημα $(0, \pi)$ η εξίσωση $\cot x = -1$ έχει μία λύση, την $\frac{3\pi}{4}$. Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τις $\frac{3\pi}{4} + k\pi$ για $k \in \mathbb{Z}$.





(iv) Η συνάρτηση $\tan x$ είναι π-περιοδική. Στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ η εξίσωση $\tan x = -\sqrt{3}$ έχει μία λύση, την $-\frac{\pi}{3}$. Άρα η εξίσωση έχει λύσεις τις $-\frac{\pi}{3} + k\pi$ για $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

3. *Αποδείξτε ότι*

$$\cos x = \frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}, \qquad \sin x \sin y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - \frac{1}{2}\cos(x+y).$$

Λύση. (i)

$$\frac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)} = \frac{\cos^2(x/2)-\sin^2(x/2)}{\cos^2(x/2)+\sin^2(x/2)} = \cos^2(\tfrac{x}{2}) - \sin^2(\tfrac{x}{2}) = \cos x.$$

(ii)

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\cos(x-y) - \tfrac{1}{2}\cos(x+y) &= \tfrac{1}{2}(\cos x \cos y + \sin x \sin y - \cos x \cos y + \sin x \sin y) \\ &= \sin x \sin y. \end{aligned}$$

$\square$

4. *Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των συναρτήσεων*

$$y = \tfrac{2x-1}{x+4}, \quad y = \tfrac{x^2+1}{x^2-1}, \quad y = \log_{10} x + 4, \quad y = e^{2x} + 2e^x + 3.$$

Λύση. (i) Το πεδίο ορισμού της $y = \frac{2x-1}{x+4}$ είναι το $(-\infty, -4) \cup (-4, +\infty)$.
Το σύνολο τιμών της συνάρτησης αποτελείται από εκείνα τα y για τα οποία η εξίσωση $\frac{2x-1}{x+4} = y$ με άγνωστο το x έχει τουλάχιστον μία λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Θεωρούμε δοσμένο το y και λύνουμε με άγνωστο το $x \neq -4$ την εξίσωση:

$$\tfrac{2x-1}{x+4} = y \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 = yx + 4y \quad \Leftrightarrow \quad (2-y)x = 1 + 4y.$$

Αν $y = 2$ τότε η εξίσωση δεν έχει λύση. Αν $y \neq 2$ τότε η εξίσωση έχει την λύση $x = \frac{1+4y}{2-y}$ και ελέγχουμε εύκολα ότι αυτή η λύση είναι $\neq -4$.
Άρα το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$.
(ii) Το πεδίο ορισμού της $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ είναι το $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.
Το σύνολο τιμών της συνάρτησης αποτελείται από εκείνα τα y για τα οποία η εξίσωση $\frac{x^2+1}{x^2-1} = y$ με άγνωστο το x έχει τουλάχιστον μία λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Θεωρούμε δοσμένο το y και λύνουμε με άγνωστο το $x \neq \pm 1$ την εξίσωση:

$$\tfrac{x^2+1}{x^2-1} = y \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 1 = yx^2 - y \quad \Leftrightarrow \quad (y-1)x^2 = y + 1.$$

Αν $y = 1$ τότε η εξίσωση δεν έχει λύση. Αν $y \neq 1$ τότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$x^2 = \tfrac{y+1}{y-1}.$$

Αν $\frac{y+1}{y-1} < 0$ τότε η εξίσωση δεν έχει λύση. Αν $\frac{y+1}{y-1} \geq 0$ τότε η εξίσωση έχει τις λύσεις $x = \pm\sqrt{\frac{y+1}{y-1}}$ και ελέγχουμε εύκολα ότι αυτές οι λύσεις είναι $\neq \pm 1$.
Άρα το σύνολο τιμών περιέχει τα y για τα οποία ισχύει $\frac{y+1}{y-1} \geq 0$ ή, ισοδύναμα, $(y+1)(y-1) > 0$ και $y \neq 1$. Επομένως το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$.
(iii) Το πεδίο ορισμού της $y = \log_{10} x + 4$ είναι το $(0, +\infty)$.
Το σύνολο τιμών της συνάρτησης περιέχει εκείνα τα y για τα οποία η εξίσωση $\log_{10} x + 4 = y$ με άγνωστο το x έχει τουλάχιστον μία λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Θεωρούμε δοσμένο το y και λύνουμε με άγνωστο το $x > 0$ την εξίσωση:

$$\log_{10} x + 4 = y \quad \Leftrightarrow \quad \log_{10} x = y - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 10^{y-4}.$$

Η λύση $x = 10^{y-4}$ είναι προφανώς > 0 για κάθε y. Άρα το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty, +\infty)$.
(iv) Το πεδίο ορισμού της $y = e^{2x} + 2e^x + 3$ είναι το $(-\infty, +\infty)$.
Το σύνολο τιμών της συνάρτησης περιέχει εκείνα τα y για τα οποία η εξίσωση $e^{2x} + 2e^x + 3 = y$ με άγνωστο το x έχει τουλάχιστον μία λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Θεωρούμε δοσμένο το y και λύνουμε με άγνωστο το x την εξίσωση:

$$e^{2x} + 2e^x + 3 = y \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} + 2e^x + 1 = y - 2 \quad \Leftrightarrow \quad (e^x + 1)^2 = y - 2.$$

Αν $y < 2$ τότε η εξίσωση δεν έχει λύση. Αν $y \geq 2$ τότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$e^x + 1 = \pm\sqrt{y-2} \quad \Leftrightarrow \quad e^x + 1 = \sqrt{y-2} \quad \Leftrightarrow \quad e^x = \sqrt{y-2} - 1.$$

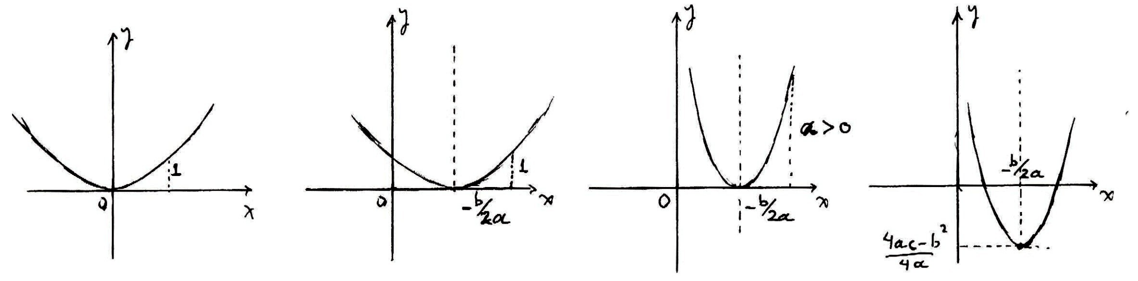
Αν $\sqrt{y-2} \leq 1$ τότε η τελευταία εξίσωση δεν έχει λύση. Αν $\sqrt{y-2} > 1$ τότε η εξίσωση έχει την λύση $x = \log(\sqrt{y-2} - 1)$.
Άρα το σύνολο τιμών περιέχει τα y για τα οποία ισχύει $\sqrt{y-2} > 1$ ή, ισοδύναμα, $y - 2 > 1$. Επομένως το σύνολο τιμών είναι το $(3, +\infty)$. □

5. *Έστω αριθμοί a, b, c με $a \neq 0$. Βάσει του γραφήματος της $y = x^2$, περιγράψτε μέθοδο σχεδίασης του γραφήματος της $y = ax^2 + bx + c$. Σε ποιά περίπτωση είναι η συνάρτηση άνω φραγμένη και σε ποιά περίπτωση είναι κάτω φραγμένη στο $(-\infty, +\infty)$; Ποιό είναι το σύνολο τιμών της; Ειδικότερα, σχεδιάστε το γράφημα της $y = -4x^2 + 4 + 1$ και από αυτό να διακρίνετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, το σύνολο τιμών της, τα διαστήματα μονοτονίας της και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.*

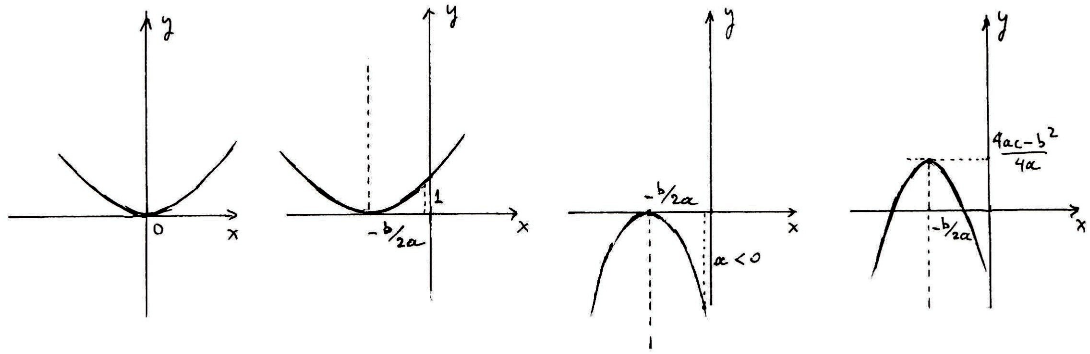
Λύση. (i) Γράφουμε

$$y = ax^2 + bx + c = a(x + \tfrac{b}{2a})^2 + \tfrac{4ac-b^2}{4a}.$$

Ξεκινάμε από το γράφημα της $y = x^2$. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Το σύνολο τιμών της είναι το $[0, +\infty)$, είναι κάτω φραγμένη και έχει ελάχιστη τιμή 0.
Μεταφέρουμε οριζόντια το γράφημα της $y = x^2$ κατά $-\frac{b}{2a}$ και βρίσκουμε το γράφημα της $y = (x + \frac{b}{2a})^2$. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$. Το σύνολο τιμών της είναι το $[0, +\infty)$, είναι κάτω φραγμένη και έχει ελάχιστη τιμή 0.
Πολλαπλασιάζουμε τις y-συντεταγμένες των σημείων του γραφήματος της $y = (x + \frac{b}{2a})^2$ με a και βρίσκουμε το γράφημα της $y = a(x + \frac{b}{2a})^2$. Τώρα έχουμε δύο περιπτώσεις.
Αν $a > 0$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$, έχει σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και είναι κάτω φραγμένη με ελάχιστη τιμή 0.



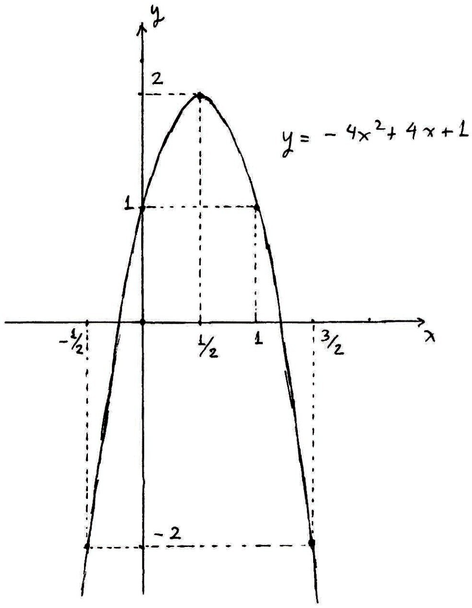
Αν $a < 0$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$, έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, 0]$ και είναι άνω φραγμένη με μέγιστη τιμή 0.



Μεταφέρουμε κατακόρυφα κατά $\frac{4ac-b^2}{4a}$ το τελευταίο γράφημα και βρίσκουμε το γράφημα της $y = ax^2 + bx + c$. Οπότε πάλι έχουμε δύο αντίστοιχες περιπτώσεις.
Αν $a > 0$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$, έχει σύνολο τιμών το $[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty)$ και είναι κάτω φραγμένη με ελάχιστη τιμή $\frac{4ac-b^2}{4a}$.
Αν $a < 0$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{b}{2a}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$, έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$ και είναι άνω φραγμένη με μέγιστη τιμή $\frac{4ac-b^2}{4a}$.
(ii) Στην περίπτωση της $y = -4x^2 + 4x + 1$ έχουμε

$$y = -4x^2 + 4x + 1 = -4(x - \tfrac{1}{2})^2 + 2.$$

Η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, \frac{1}{2}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{1}{2}, +\infty)$, έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, 2]$ και είναι άνω φραγμένη με μέγιστη τιμή 2.



□

6. *Έστω αριθμοί a, b, c, d με $c \neq 0$. Βάσει του γραφήματος της $y = \frac{1}{x}$, περιγράψτε μέθοδο σχεδίασης του γραφήματος της $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Ειδικότερα, σχεδιάστε το γράφημα της $y = \frac{2x+1}{x-1}$ και από αυτό να διακρίνετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, το σύνολο τιμών της, τα διαστήματα μονοτονίας της και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.*

Λύση. (i) Γράφουμε

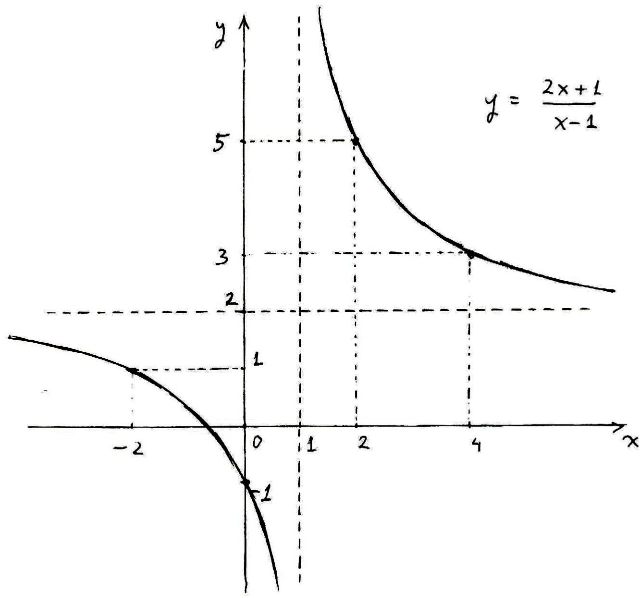
$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{bc-ad}{c^2}\,\frac{1}{x+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c}.$$

Ξεκινάμε από το γράφημα της $y = \frac{1}{x}$. Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
Μεταφέρουμε οριζόντια το γράφημα της $y = \frac{1}{x}$ κατά $-\frac{d}{c}$ και βρίσκουμε το γράφημα της $y = \frac{1}{x+\frac{d}{c}}$.
Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{d}{c})$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
Πολλαπλασιάζουμε τις y-συντεταγμένες των σημείων του γραφήματος της $y = \frac{1}{x+\frac{d}{c}}$ με $\frac{bc-ad}{c^2}$ και βρίσκουμε το γράφημα της $y = \frac{bc-ad}{c^2}\,\frac{1}{x+\frac{d}{c}}$. Τώρα έχουμε τρεις περιπτώσεις.
Αν $\frac{bc-ad}{c^2} = 0$ τότε η συνάρτηση είναι σταθερή 0 στο $(-\infty, -\frac{d}{c}) \cup (-\frac{d}{c}, +\infty)$.
Αν $\frac{bc-ad}{c^2} > 0$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{d}{c})$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$.
Αν $\frac{bc-ad}{c^2} < 0$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{d}{c})$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$.
Μεταφέρουμε κατακόρυφα κατά $\frac{a}{c}$ το τελευταίο γράφημα και βρίσκουμε το γράφημα της $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Οπότε πάλι έχουμε τρεις αντίστοιχες περιπτώσεις.
Αν $\frac{bc-ad}{c^2} = 0$ τότε η συνάρτηση είναι σταθερή $\frac{a}{c}$ στο $(-\infty, -\frac{d}{c}) \cup (-\frac{d}{c}, +\infty)$.
Αν $\frac{bc-ad}{c^2} > 0$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{d}{c})$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, \frac{a}{c})$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(\frac{a}{c}, +\infty)$.
Αν $\frac{bc-ad}{c^2} < 0$ τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -\frac{d}{c})$ με σύνολο τιμών το $(\frac{a}{c}, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{d}{c}, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, \frac{a}{c})$.

(ii) Στην περίπτωση της $y = \frac{2x+1}{x-1}$ έχουμε

$$y = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 2.$$

Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 2)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(2, +\infty)$.



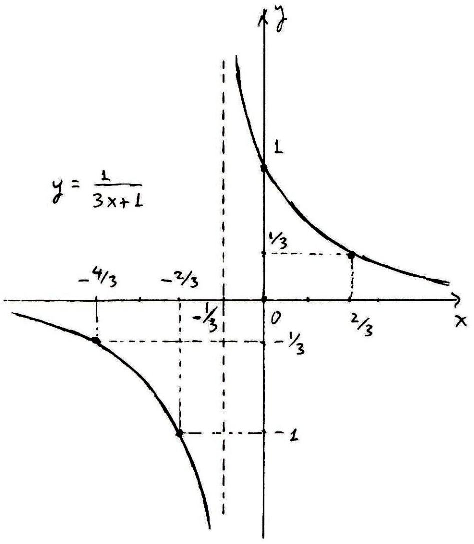
□

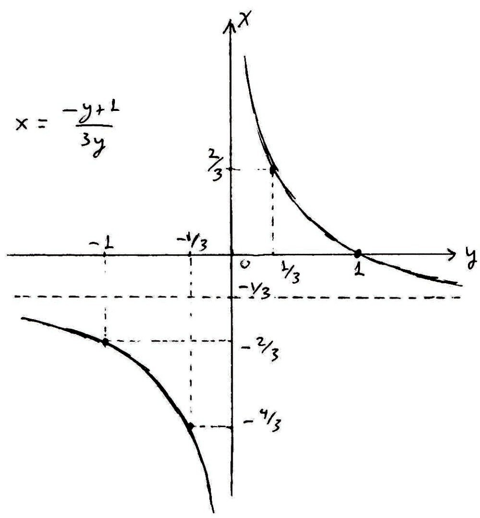
7. *Θεωρήστε την $y = \frac{1}{3x+1}$. Βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της. Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση, καθώς και το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της.*

Λύση. Το πεδίο ορισμού της $y = \frac{1}{3x+1}$ είναι το $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$. Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{3})$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ και, παρά το ότι δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$, είναι ένα-προς-ένα στο $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$ και άρα είναι αντιστρέψιμη.

Το γράφημα της $y = \frac{1}{3x+1}$ μπορούμε να το σχεδιάσουμε κατά το πρότυπο της άσκησης 6: γράφουμε

$$y = \frac{1}{3x+1} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x+\frac{1}{3}}.$$





Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{3})$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 0)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Επομένως η αντίστροφη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ (το σύνολο τιμών της αρχικής συνάρτησης) και σύνολο τιμών το $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$ (το πεδίο ορισμού της αρχικής συνάρτησης).
Ο τύπος της αντίστροφης συνάρτησης προκύπτει όταν λύσουμε την εξίσωση $\frac{1}{3x+1} = y$ με δοσμένο y και άγνωστο x:

$$\frac{1}{3x+1} = y \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 3yx + y \quad \Leftrightarrow \quad 3yx = -y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-y+1}{3y}.$$

Δηλαδή η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = \frac{-y+1}{3y}$. Το γράφημά της το σχεδιάζουμε πάλι βάσει της άσκησης 6: γράφουμε

$$x = \frac{-y+1}{3y} = \frac{1}{3}\frac{1}{y} - \frac{1}{3}.$$

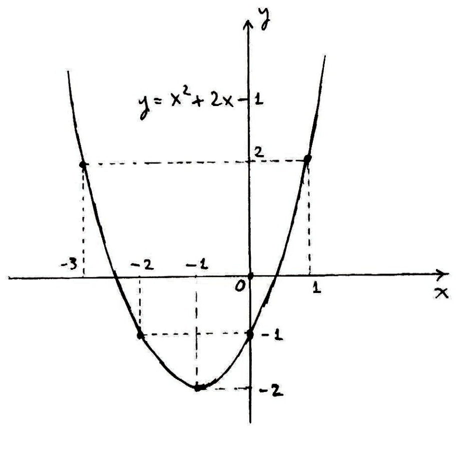
Εναλλακτικά, το γράφημα της $x = \frac{-y+1}{3y}$ προκύπτει από το γράφημα της $y = \frac{1}{3x+1}$ με ανάκλαση ως προς την ευθεία $y = x$.
Η αντίστροφη συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, -\frac{1}{3})$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\frac{1}{3}, +\infty)$. $\square$

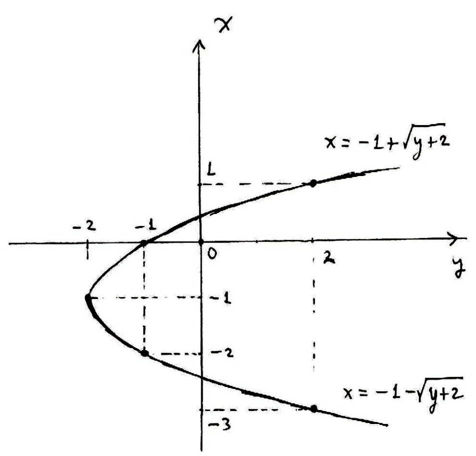
8. *Θεωρήστε την* $y = x^2 + 2x - 1$. *Βρείτε το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τα διαστήματα μονοτονίας της και σχεδιάστε το γράφημά της. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση; Χωρίζοντας το πεδίο ορισμού σε διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης, "μοιράστε" την σε γνησίως μονότονες συναρτήσεις, βρείτε τις αντίστροφες συναρτήσεις τους, τα πεδία ορισμού τους και τα σύνολα τιμών τους και σχεδιάστε τα γραφήματά τους.*

Λύση. Το πεδίο ορισμού της $y = x^2 + 2x - 1$ είναι το $(-\infty, +\infty)$ και μπορούμε να σχεδιάσουμε το γράφημά της κατά το πρότυπο της άσκησης 5: γράφουμε

$$y = x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 2.$$

Η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ με σύνολο τιμών το $[-2, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $[-2, +\infty)$.





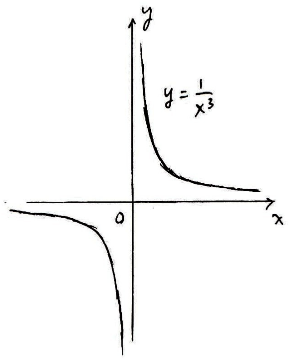
Αν περιορίσουμε την $y = (x+1)^2 - 2$ στο $(-\infty, -1]$ τότε είναι αντιστρέψιμη (ως γνησίως φθίνουσα) με πεδίο ορισμού το $(-\infty, -1]$ και σύνολο τιμών το $[-2, +\infty)$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα με πεδίο ορισμού το $[-2, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $(-\infty, -1]$.
Ο τύπος της προκύπτει αφού λύσουμε την $(x+1)^2 - 2 = y$ ως εξίσωση με δοσμένο $y \geq -2$ και άγνωστο $x \leq -1$:

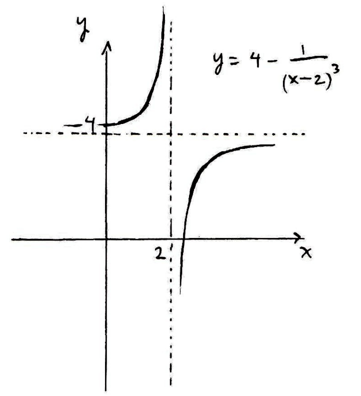
$$(x+1)^2 - 2 = y \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 = y + 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \pm \sqrt{y+2}.$$

Από τις δύο λύσεις εκείνη η οποία ανήκει στο $(-\infty, -1]$ είναι η $x = -1 - \sqrt{y+2}$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = -1 - \sqrt{y+2}$. Αν περιορίσουμε την $y = (x+1)^2 - 2$ στο $[-1, +\infty)$ τότε είναι αντιστρέψιμη (ως γνησίως αύξουσα) με πεδίο ορισμού το $[-1, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[-2, +\infty)$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα με πεδίο ορισμού το $[-2, +\infty)$ και σύνολο τιμών το $[-1, +\infty)$. Ο τύπος της προκύπτει όπως πριν αφού λύσουμε την $(x+1)^2 - 2 = y$ ως εξίσωση με δοσμένο $y \geq -2$ και άγνωστο $x \geq -1$. Από τις δύο λύσεις τις οποίες βρήκαμε προηγουμένως εκείνη η οποία ανήκει στο $[-1, +\infty)$ είναι η $x = -1 + \sqrt{y+2}$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι η $x = -1 + \sqrt{y+2}$. $\square$

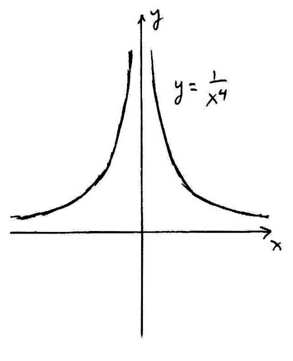
9. *Βάσει των γραφημάτων των $y = \frac{1}{x^3}$ και $y = \frac{1}{x^4}$ σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = 4 - \frac{1}{(x-2)^3}$ και $y = -\frac{3}{(2x+1)^4} + 2$. Από τα γραφήματα να διακρίνετε τα πεδία ορισμού, τα σύνολα τιμών, τα διαστήματα μονοτονίας και τα αντίστοιχα σύνολα τιμών.*

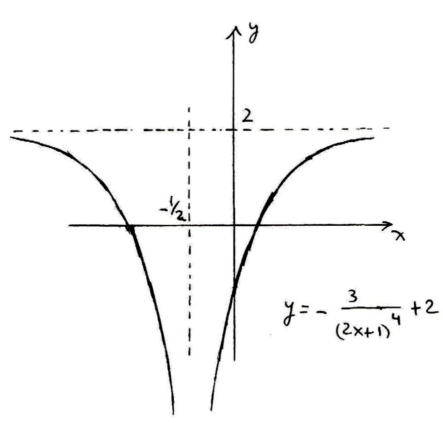
Λύση. (i) Ξεκινάμε με το γράφημα της $y = \frac{1}{x^3}$ και το μεταφέρουμε οριζόντια κατά 2. Κατόπιν πολλαπλασιάζουμε τις y-συντεταγμένες των σημείων του νέου γραφήματος με -1 (δηλαδή βρίσκουμε το συμμετρικό του ως προς τον x-άξονα) και τέλος μεταφέρουμε το τελευταίο γράφημα κατακόρυφα κατά 4. Έτσι προκύπτει το γράφημα της $y = 4 - \frac{1}{(x-2)^3}$. Από το γράφημα φαίνεται καθαρά ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2)$ με σύνολο τιμών το $(4, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 4)$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ και το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$.





(ii) Ξεκινάμε με το γράφημα της $y = \frac{1}{x^4}$ και το μεταφέρουμε οριζόντια κατά -1. Πολλαπλασιάζουμε τις x-συντεταγμένες των σημείων του νέου γραφήματος με $\frac{1}{2}$. Κατόπιν πολλαπλασιάζουμε τις y-συντεταγμένες των σημείων του νέου γραφήματος με -3 και τέλος μεταφέρουμε το τελευταίο γράφημα κατακόρυφα κατά 2. Έτσι προκύπτει το γράφημα της $y = -\frac{3}{(2x+1)^4} + 2$. Από το γράφημα διακρίνουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -\frac{1}{2})$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 2)$ και γνησίως αύξουσα στο $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $(-\infty, 2)$. Το πεδίο ορισμού

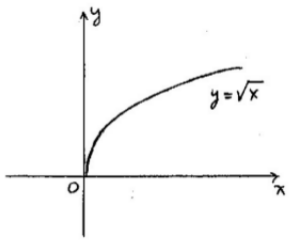


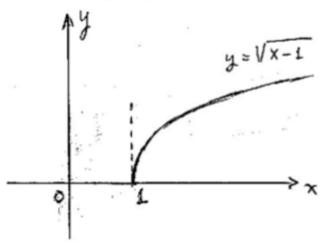


της συνάρτησης είναι το $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$ και το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, 2)$. $\square$

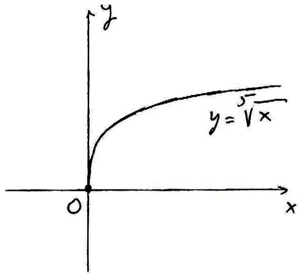
10. *Βάσει των γραφημάτων των $y = \sqrt{x}$ και $y = \sqrt[5]{x}$ σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = \sqrt{x-1}$ και $y = \sqrt[5]{3-x} - 1$. Ποιά είναι τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών τους;*

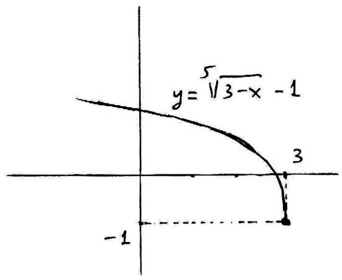
Λύση. (i) Μεταφέρουμε οριζόντια κατά 1 το γράφημα της $y = \sqrt{x}$ και προκύπτει το γράφημα της $y = \sqrt{x-1}$. Από το γράφημα βλέπουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ με σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.





(ii) Μεταφέρουμε οριζόντια το γράφημα της $y = \sqrt[5]{x}$ κατά -3. Κατόπιν πολλαπλασιάζουμε με -1 τις x-συντεταγμένες των σημείων του νέου γραφήματος (δηλαδή βρίσκουμε το συμμετρικό του ως προς τον y-άξονα). Κατόπιν μεταφέρουμε το τελευταίο γράφημα κατακόρυφα κατά -1.



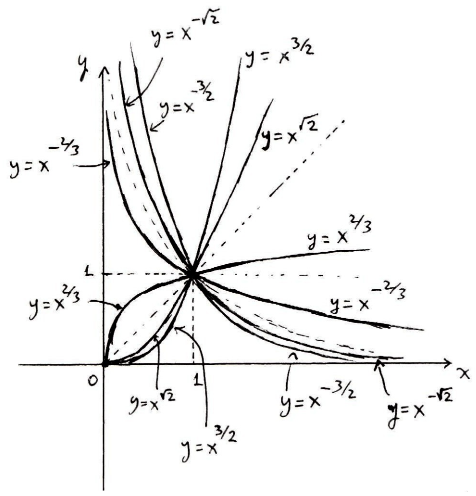


Έτσι προκύπτει το γράφημα της $y = \sqrt[5]{3-x} - 1$. Από το γράφημα διακρίνουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$ με σύνολο τιμών το $[-1, +\infty)$. $\square$

11. *Σχεδιάστε στο ίδιο σχήμα τα γραφήματα των*

$$y = x^{2/3}, \quad y = x^{-2/3}, \quad y = x^{3/2}, \quad y = x^{-3/2}, \quad y = x^{\sqrt{2}}, \quad y = x^{-\sqrt{2}}.$$

Λύση. Όλα τα γραφήματα βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο του xy-επιπέδου και όλα διέρχονται από το σημείο $(1, 1)$. Τα γραφήματα των συναρτήσεων με θετικό εκθέτη περιέχουν το σημείο



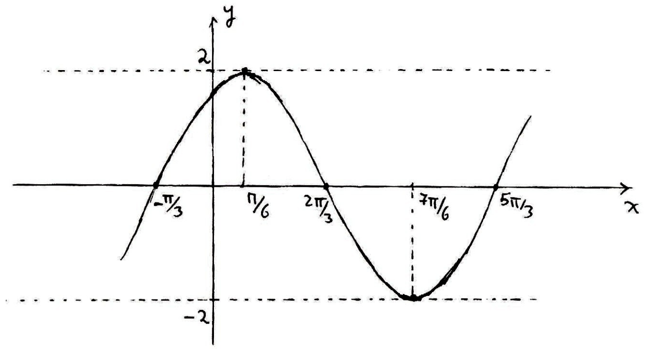
$(0, 0)$ και ανεβαίνουν απεριόριστα προς δεξιά και πάνω. Τα γραφήματα των συναρτήσεων με αρνητικό εκθέτη προσεγγίζουν προς πάνω τον y-άξονα και προς δεξιά τον x-άξονα. Στο διάστημα $(0, 1)$ όσο πιο μεγάλος είναι ο εκθέτης τόσο πιο ψηλά βρίσκεται το αντίστοιχο γράφημα. Αντιθέτως, στο διάστημα $(1, +\infty)$ όσο πιο μεγάλος είναι ο εκθέτης τόσο πιο χαμηλά βρίσκεται το αντίστοιχο γράφημα. □

12. *Σχεδιάστε το γράφημα της $y = \sqrt{3}\cos x + \sin x$.*

Λύση. Η τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των συντελεστών των $\cos x$, $\sin x$ είναι $((\sqrt{3})^2 + 1^2)^{1/2} = 2$ οπότε γράφουμε:

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2\big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \tfrac{1}{2}\sin x\big) = 2\big(\sin\tfrac{\pi}{3}\cos x + \cos\tfrac{\pi}{3}\sin x\big) = 2\sin\big(x + \tfrac{\pi}{3}\big).$$

Άρα για να βρούμε το γράφημα της $y = \sqrt{3}\cos x + \sin x$ ξεκινάμε με το γράφημα της $y = \sin x$, το μεταφέρουμε οριζόντια κατά $-\frac{\pi}{3}$, και πολλαπλασιάζουμε τις y-συντεταγμένες των σημείων του νέου γραφήματος με το 2:



□

13. *Βρείτε τα πεδία ορισμού και τα σύνολα τιμών των $y = \sqrt{\sin x}$, $y = \frac{1}{1+\sin x}$.*

Λύση. (i) Το πεδίο ορισμού της $y = \sqrt{\sin x}$ είναι η ένωση των διαστημάτων $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ για $k \in \mathbb{Z}$. Το σύνολο τιμών αποτελείται από τα y για τα οποία η εξίσωση $\sqrt{\sin x} = y$ με άγνωστο το x έχει μία τουλάχιστον λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Αν $y < 0$ ή αν $y > 1$ τότε η εξίσωση $\sqrt{\sin x} = y$ δεν έχει λύση. Αν $0 \leq y \leq 1$ τότε έχουμε

$$\sqrt{\sin x} = y \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = y^2.$$

Επειδή $0 \leq y^2 \leq 1$, η εξίσωση αυτή έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $[0, \pi]$ και άρα υπάρχει ακριβώς μία λύση σε κάθε διάστημα $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ για $k \in \mathbb{Z}$. Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το $[0, 1]$.
(ii) Το πεδίο ορισμού της $y = \frac{1}{1+\sin x}$ είναι η ένωση των διαστημάτων $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ για $k \in \mathbb{Z}$. Το σύνολο τιμών αποτελείται από τα y για τα οποία η εξίσωση $\frac{1}{1+\sin x} = y$ με άγνωστο το x έχει μία τουλάχιστον λύση στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Αν $y = 0$ τότε η εξίσωση $\frac{1}{1+\sin x} = y$ δεν έχει λύση. Αν $y \neq 0$ τότε έχουμε

$$\frac{1}{1+\sin x} = y \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \sin x = \frac{1}{y} \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1-y}{y}.$$

Προφανώς η εξίσωση αυτή έχει λύση αν και μόνο αν $\frac{1-y}{y} \in [-1, 1]$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $\frac{1-y}{y} \neq -1$ για κάθε $y \neq 0$. Άρα η εξίσωση έχει λύση αν και μόνο αν $\frac{1-y}{y} \in (-1, 1]$. Τώρα είναι εύκολο να δούμε ότι

$$-1 < \frac{1-y}{y} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \geq \frac{1}{2}.$$

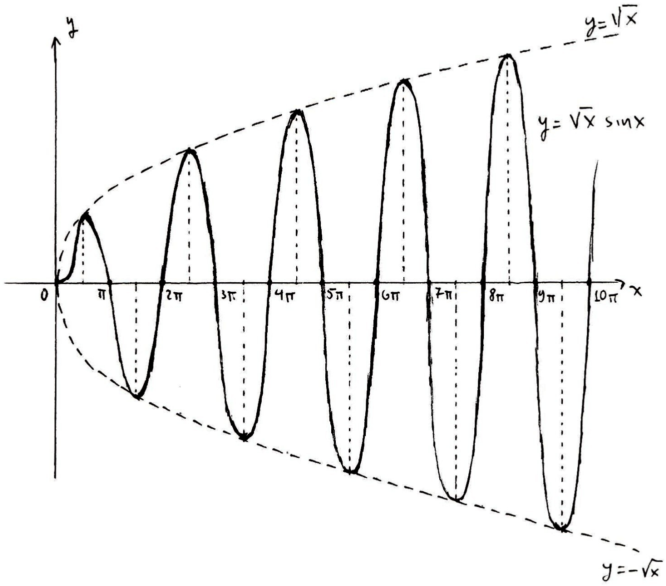
Άρα όταν $y < \frac{1}{2}$ τότε $\frac{1-y}{y} \notin [-1,1]$ και άρα η εξίσωση $\sin x = \frac{1-y}{y}$ δεν έχει λύση. Και όταν $y \geq \frac{1}{2}$ τότε $\frac{1-y}{y} \in (-1,1]$ και άρα η εξίσωση $\sin x = \frac{1-y}{y}$ έχει τουλάχιστον μία λύση σε καθένα από τα διαστήματα $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ για $k \in \mathbb{Z}$.
Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης $y = \frac{1}{1+\sin x}$ είναι το $[\frac{1}{2}, +\infty)$. $\square$

14. *Σχεδιάστε τα γραφήματα των $y = \sqrt{x}\,\sin x$, $y = x \sin \frac{1}{x}$.*

Λύση. (i) Ισχύει

$$-\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\,\sin x \leq \sqrt{x} \qquad \text{για } x \geq 0.$$

Άρα το γράφημα της $y = \sqrt{x}\,\sin x$ βρίσκεται ανάμεσα στα γραφήματα των $y = -\sqrt{x}$ και $y = \sqrt{x}$. Στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x = 1$, δηλαδή στα $\frac{\pi}{2} + k2\pi$ με $k = 0, 1, 2, \ldots$, το γράφημα της $y = \sqrt{x}\,\sin x$ "ακουμπά" το γράφημα της $y = \sqrt{x}$ ενώ στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x = -1$, δηλαδή στα $\frac{3\pi}{2} + k2\pi$ με $k = 0, 1, 2, \ldots$, το γράφημα της $y = \sqrt{x}\,\sin x$ "ακουμπά" το γράφημα της $y = -\sqrt{x}$. Σε κάθε άλλο $x > 0$ το γράφημα της $y = \sqrt{x}\,\sin x$ βρίσκεται γνησίως ανάμεσα στα γραφήματα των $y = -\sqrt{x}$ και $y = \sqrt{x}$. Στις λύσεις της εξίσωσης $\sin x = 0$, δηλαδή στα $k\pi$ με $k = 0, 1, 2, \ldots$, το γράφημα της $y = \sqrt{x}\,\sin x$ τέμνει τον x-άξονα.
Προσέχοντας πώς όλα αυτά τα σημεία (οι λύσεις των τριών εξισώσεων $\sin x = 1$, $\sin x = -1$ και $\sin x = 0$) διαδέχονται το ένα το άλλο, σχεδιάζουμε το γράφημα της $y = \sqrt{x}\,\sin x$.
Αν προσέξετε την μορφή του γραφήματος κοντά στο 0 θα παρατηρήσετε ότι εφάπτεται στον x-άξονα. Αυτό δικαιολογείται με γνώσεις τις οποίες θα αποκτήσουμε αργότερα: η παράγωγος της $y = \sqrt{x}\,\sin x$ στο 0 είναι ίση με 0.

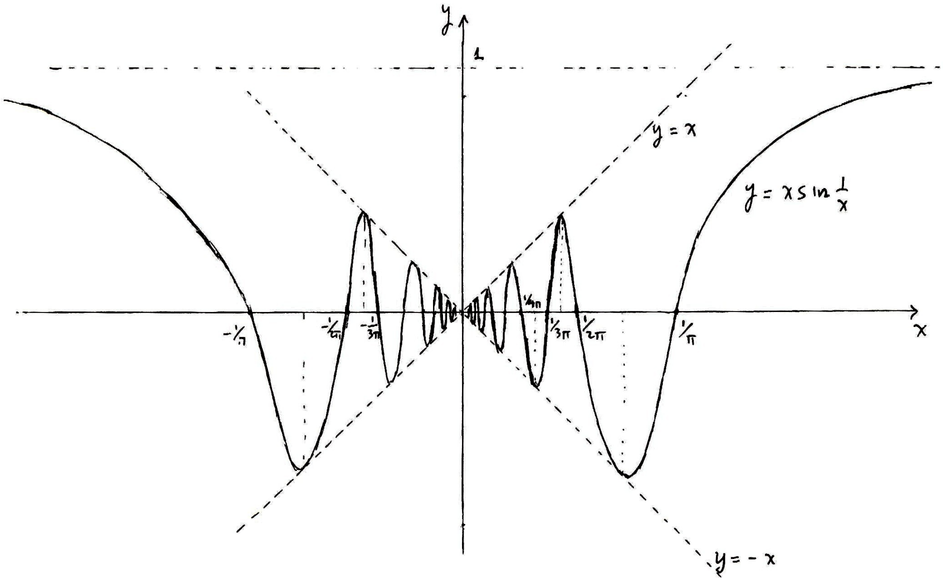


(ii) Κατ' αρχάς θεωρούμε την $y = x \sin \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$. Λόγω της ανισότητας

$$-x \leq x \sin \tfrac{1}{x} \leq x \qquad \text{για } x > 0,$$

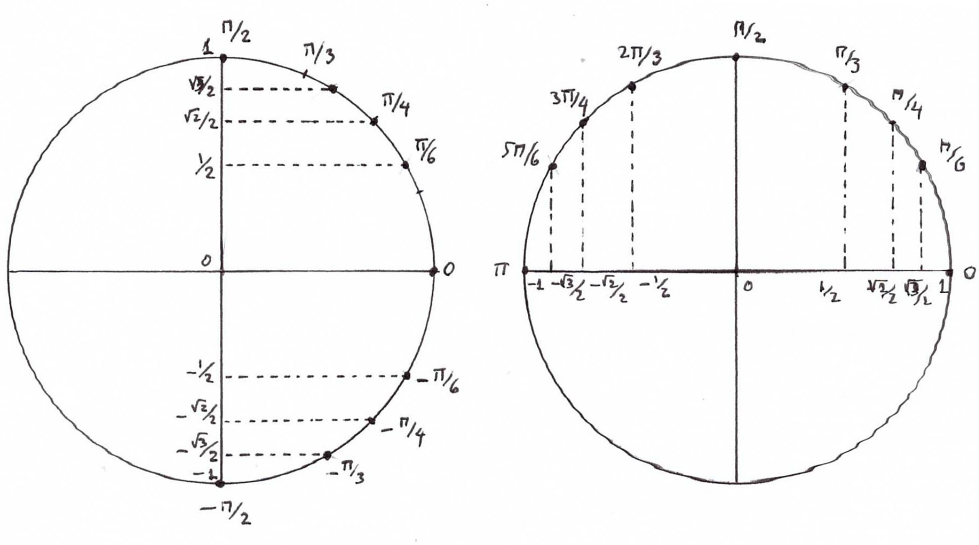
το γράφημα της $y = x \sin \frac{1}{x}$ βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $y = -x$ και $y = x$.
Στις λύσεις της εξίσωσης $\sin \frac{1}{x} = 1$, δηλαδή στα $\frac{1}{(\pi/2)+k2\pi}$ με $k = 0, 1, 2, \ldots$, το γράφημα της $y = x \sin \frac{1}{x}$ "ακουμπά" την ευθεία $y = x$ και στις λύσεις της εξίσωσης $\sin \frac{1}{x} = -1$, δηλαδή στα $\frac{1}{(3\pi/2)+k2\pi}$ με $k = 0, 1, 2, \ldots$, το γράφημα της $y = x \sin \frac{1}{x}$ "ακουμπά" την ευθεία $y = -x$. Σε κάθε άλλο $x > 0$ το γράφημα της $y = x \sin \frac{1}{x}$ βρίσκεται γνησίως ανάμεσα στις ευθείες $y = -x$ και $y = x$. Στις λύσεις της εξίσωσης $\sin \frac{1}{x} = 0$, δηλαδή στα $\frac{1}{k\pi}$ με $k = 1, 2, \ldots$, το γράφημα της $y = x \sin \frac{1}{x}$ τέμνει τον x-άξονα.
Όλα αυτά τα σημεία (οι λύσεις των τριών εξισώσεων $\sin \frac{1}{x} = 1$, $\sin \frac{1}{x} = -1$ και $\sin \frac{1}{x} = 0$) διαδέχονται το ένα το άλλο και προσεγγίζουν το 0. Αυτές οι παρατηρήσεις μας βοηθούν να σχεδιάσουμε

το γράφημα της $y = x\sin\frac{1}{x}$ το οποίο αντιστοιχεί στο $(0, +\infty)$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το ότι η $y = x\sin\frac{1}{x}$ είναι άρτια, σχεδιάζουμε και το γράφημά της το οποίο αντιστοιχεί στο $(-\infty, 0)$: είναι το συμμετρικό του προηγούμενου ως προς τον y-άξονα.



Ένα ακόμη βοηθητικό στοιχείο είναι η ανισότητα $\sin\frac{1}{x} < \frac{1}{x}$ για $x > 0$ η οποία προκύπτει από την $\sin t < t$ για $t > 0$ την οποία θα αποδείξουμε αργότερα. Από αυτήν παίρνουμε ότι $x\sin\frac{1}{x} < 1$ για $x > 0$ οπότε το γράφημα της $y = x\sin\frac{1}{x}$ βρίσκεται κάτω από την οριζόντια ευθεία $y = 1$. Μάλιστα, το γράφημα προσεγγίζει προς δεξιά την ευθεία $y = 1$ λόγω του ορίου $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1$ το οποίο θα δούμε αργότερα. Παρόμοιες παρατηρήσεις έχουμε και για το συμμετρικό κομμάτι του γραφήματος (δηλαδή για $x < 0$). □

15. *Βρείτε τα* arccos *και* arcsin *των* 0, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, ± 1.



Λύση. Στο διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι (κατά αύξουσα διάταξη των γωνιών και άρα κατά αύξουσα διάταξη των ημιτόνων τους):

$$\sin(-\tfrac{\pi}{2}) = -1, \quad \sin(-\tfrac{\pi}{3}) = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin(-\tfrac{\pi}{4}) = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin(-\tfrac{\pi}{6}) = -\tfrac{1}{2},$$
$$\sin 0 = 0, \quad \sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2}, \quad \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin\tfrac{\pi}{2} = 1.$$

Άρα έχουμε αντιστοίχως:

$$\arcsin(-1) = -\tfrac{\pi}{2}, \quad \arcsin(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = -\tfrac{\pi}{3}, \quad \arcsin(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = -\tfrac{\pi}{4}, \quad \arcsin(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{\pi}{6},$$
$$\arcsin 0 = 0, \quad \arcsin \tfrac{1}{2} = \tfrac{\pi}{6}, \quad \arcsin \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\pi}{4}, \quad \arcsin \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{\pi}{3}, \quad \arcsin 1 = \tfrac{\pi}{2}.$$

Στο διάστημα $[0, \pi]$ είναι (κατά αύξουσα διάταξη των γωνιών και άρα κατά φθίνουσα διάταξη των συνημιτόνων τους):

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}, \quad \cos \tfrac{\pi}{2} = 0,$$
$$\cos \tfrac{2\pi}{3} = -\tfrac{1}{2}, \quad \cos \tfrac{3\pi}{4} = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \tfrac{5\pi}{6} = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \pi = -1.$$

Άρα έχουμε αντιστοίχως:

$$\arccos 1 = 0, \quad \arccos \tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{\pi}{6}, \quad \arccos \tfrac{\sqrt{2}}{2} = \tfrac{\pi}{4}, \quad \arccos \tfrac{1}{2} = \tfrac{\pi}{3}, \quad \arccos 0 = \tfrac{\pi}{2},$$
$$\arccos(-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{2\pi}{3}, \quad \arccos(-\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \tfrac{3\pi}{4}, \quad \arccos(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}) = \tfrac{5\pi}{6}, \quad \arccos(-1) = \pi.$$

□

16. *(i) Αποδείξτε ότι* $\arccos y + \arcsin y = \frac{\pi}{2}$ *για κάθε* $y \in [-1, 1]$.
(ii) Αποδείξτε ότι $\arctan y + \operatorname{arccot} y = \frac{\pi}{2}$ *για κάθε* y.

Λύση. (i) Έστω $y \in [-1, 1]$ και $x = \arcsin y$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και $\sin x = y$. Ορίζουμε το $z = \frac{\pi}{2} - x$. Τότε $z \in [0, \pi]$ και $\cos z = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x = y$. Αρα

$$\arccos y = z = \tfrac{\pi}{2} - x = \tfrac{\pi}{2} - \arcsin y.$$

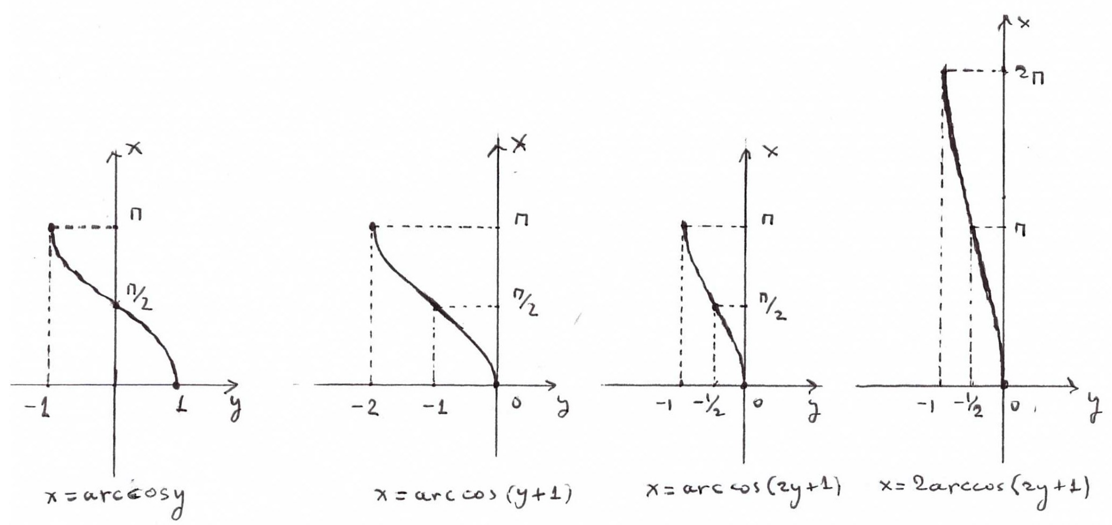
(ii) Έστω $x = \arctan y$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ και $\tan x = y$. Ορίζουμε το $z = \frac{\pi}{2} - x$. Τότε $z \in (0, \pi)$ και $\cot z = \cot(\frac{\pi}{2} - x) = \tan x = y$. Αρα

$$\operatorname{arccot} y = z = \tfrac{\pi}{2} - x = \tfrac{\pi}{2} - \arctan y.$$

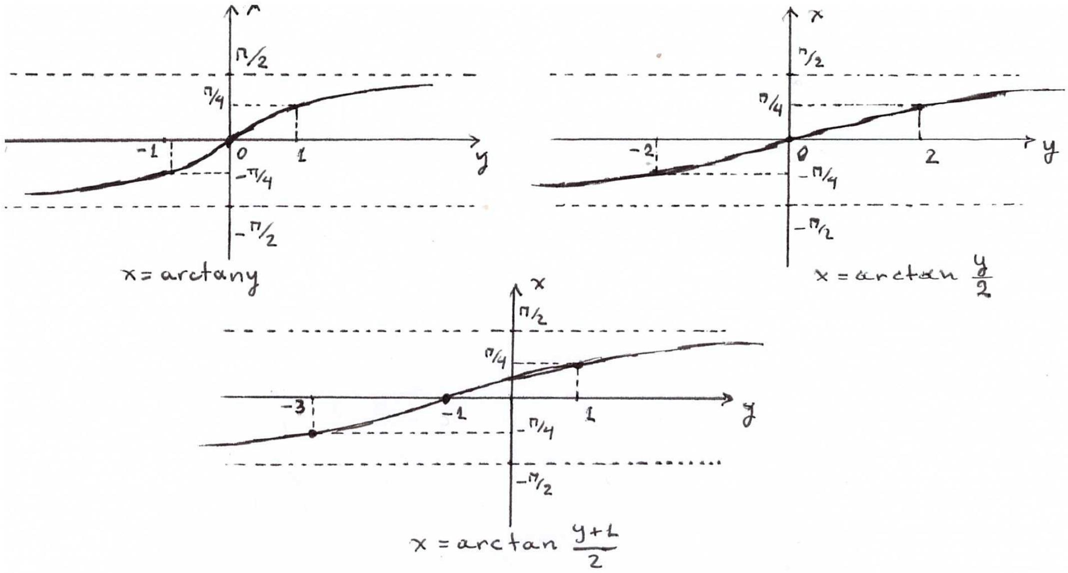
□

17. *Σχεδιάστε τα γραφήματα των* $x = 2\arccos(2y + 1)$, $x = \arctan \frac{y+1}{2}$.

Λύση. (i) Μεταφέρουμε οριζόντια το γράφημα της $x = \arccos y$ κατά -1 και έτσι προκύπτει το γράφημα της $x = \arccos(y + 1)$. Πολλαπλασιάζουμε τις y-συντεταγμένες των σημείων του τελευταίου γραφήματος με $\frac{1}{2}$ και προκύπτει το γράφημα της $x = \arccos(2y + 1)$. Τέλος, πολλαπλασιάζουμε τις x-συντεταγμένες των σημείων του τελευταίου γραφήματος με 2 και προκύπτει το γράφημα της $x = 2\arccos(2y + 1)$.



(ii) Ξεκινάμε από το γράφημα της $x = \arctan y$ και πολλαπλασιάζουμε τις y-συντεταγμένες των



σημείων του με 2 και προκύπτει το γράφημα της $x = \arctan \frac{y}{2}$. Μεταφέρουμε το τελευταίο γράφημα οριζόντια κατά -1 και προκύπτει το γράφημα της $x = \arctan \frac{y+1}{2}$. $\square$

18. *Βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της* $y = \arcsin \frac{x+2}{x-1}$.

Λύση. Το $\frac{x+2}{x-1}$ πρέπει να ανήκει στο $[-1, 1]$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$-1 \leq \tfrac{x+2}{x-1} \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -\tfrac{1}{2}.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της $y = \arcsin \frac{x+2}{x-1}$ είναι το $(-\infty, -\frac{1}{2}]$. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης αποτελείται από εκείνα τα y για τα οποία η εξίσωση $\arcsin \frac{x+2}{x-1} = y$ με άγνωστο το x έχει τουλάχιστον μία λύση στο πεδίο ορισμού. Αν $y \notin [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ τότε η εξίσωση $\arcsin \frac{x+2}{x-1} = y$ δεν έχει λύση. Αν $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ τότε

$$\arcsin \tfrac{x+2}{x-1} = y \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{x+2}{x-1} = \sin y \quad \Leftrightarrow \quad (\sin y - 1)x = \sin y + 2.$$

Αν $\sin y = 1$ δηλαδή αν $y = \frac{\pi}{2}$ τότε η τελευταία εξίσωση δεν έχει λύση. Αν $\sin y \neq 1$ δηλαδή αν $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ τότε η εξίσωση έχει λύση: $x = \frac{\sin y + 2}{\sin y - 1}$. Βλέπουμε εύκολα ότι η λύση αυτή ανήκει στο πεδίο ορισμού $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ της συνάρτησης οπότε το σύνολο τιμών της είναι το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. $\square$

19. *Ποιά είναι η αντίστροφη συνάρτηση της* $y = \arcsin x$*; Ποιό είναι το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της;*

Λύση. Η συνάρτηση $x = \sin y$ με πεδίο ορισμού το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$ έχει αντίστροφη συνάρτηση την $y = \arcsin x$ με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της $y = \arcsin x$ με πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και σύνολο τιμών το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ είναι η $x = \sin y$ με πεδίο ορισμού το $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και σύνολο τιμών το $[-1, 1]$.
Προσοχή: η αντίστροφη συνάρτηση της $y = \arcsin x$ δεν είναι η συνηθισμένη συνάρτηση $x = \sin y$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$. $\square$

20. *Σχεδιάστε τα γραφήματα των* $y = \arcsin(\sin x)$, $y = \arctan(\tan x)$.

Λύση. (i) Έστω $x \in [-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ για $k \in \mathbb{Z}$. Τότε το $z = \sin x$ ανήκει στο $[-1, 1]$ και το $y = \arcsin(\sin x) = \arcsin z$ ορίστηκε ως ο (μοναδικός) αριθμός στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ για τον οποίο ισχύει

$\sin y = z$, δηλαδή $\sin y = \sin x$. Από την εξίσωση αυτή προκύπτει το y από το x. Η εξίσωση έχει δύο λύσεις:

$$y = x + 2m\pi \quad \text{ή} \quad y = \pi - x + 2m\pi \qquad \text{με } m \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Επειδή $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, από την πρώτη δυνατότητα στην (1) έχουμε

$$-\tfrac{\pi}{2} \le x + 2m\pi \le \tfrac{\pi}{2}$$

ή, ισοδύναμα,

$$-\tfrac{\pi}{2} - 2m\pi \le x \le \tfrac{\pi}{2} - 2m\pi.$$

Από την αρχική μας υπόθεση $-\frac{\pi}{2} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k\pi$ βλέπουμε ότι πρέπει να είναι $k = -2m$, δηλαδή ότι το k είναι άρτιος ακέραιος και ότι το y δίνεται από την

$$y = x - k\pi \qquad \text{όταν το } k \text{ είναι άρτιος ακέραιος.}$$

Πάλι, επειδή $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, από την δεύτερη δυνατότητα στην (1) έχουμε

$$-\tfrac{\pi}{2} \le \pi - x + 2m\pi \le \tfrac{\pi}{2}$$

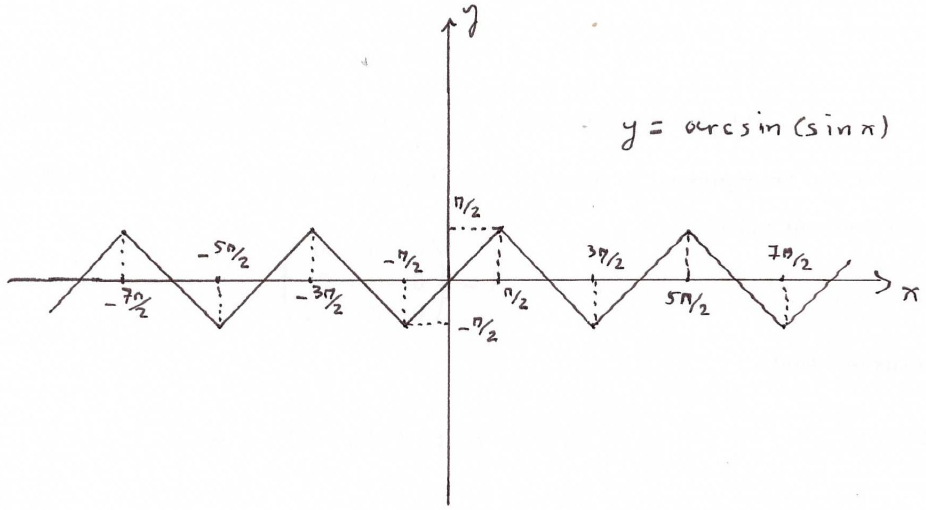
ή, ισοδύναμα,

$$-\tfrac{\pi}{2} + (2m+1)\pi \le x \le \tfrac{\pi}{2} + (2m+1)\pi.$$

Από την αρχική μας υπόθεση $-\frac{\pi}{2} + k\pi \le x \le \frac{\pi}{2} + k\pi$ βλέπουμε ότι πρέπει να είναι $k = 2m+1$, δηλαδή ότι το k είναι περιττός ακέραιος και ότι το y δίνεται από την

$$y = -x + k\pi \qquad \text{όταν το } k \text{ είναι περιττός ακέραιος.}$$

Όταν το k διατρέχει το $\mathbb{Z}$ τα αντίστοιχα διαστήματα $[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi]$ είναι διαδοχικά και καλύπτουν ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$ οπότε το γράφημα της $y = \arcsin(\sin x)$ είναι το:



(ii) Έστω $x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ για $k \in \mathbb{Z}$. Τότε το $z = \tan x$ ανήκει στο $(-\infty, +\infty)$ και το $y = \arctan(\tan x) = \arctan z$ ορίστηκε ως ο (μοναδικός) αριθμός στο $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ για τον οποίο ισχύει $\tan y = z$, δηλαδή $\tan y = \tan x$. Από την εξίσωση αυτή προκύπτει το y από το x. Η εξίσωση έχει μία λύση:

$$y = x + m\pi \qquad \text{με } m \in \mathbb{Z}.$$

Επειδή $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, έχουμε

$$-\tfrac{\pi}{2} < x + m\pi < \tfrac{\pi}{2}$$

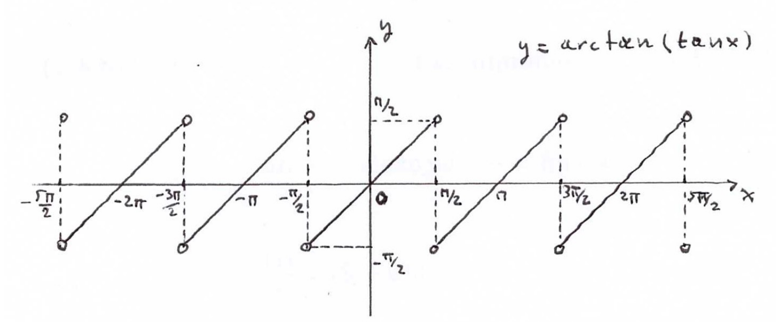
ή, ισοδύναμα,

$$-\tfrac{\pi}{2} - m\pi < x < \tfrac{\pi}{2} - 2m\pi.$$

Από την αρχική μας υπόθεση $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ βλέπουμε ότι πρέπει να είναι $k = -m$ και ότι το y δίνεται από την

$$y = x - k\pi.$$

Όταν το k διατρέχει το $\mathbb{Z}$ τα αντίστοιχα διαστήματα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ είναι διαδοχικά και καλύπτουν ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$ (εκτός από τα σημεία $\frac{\pi}{2} + k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$) και παίρνουμε το γράφημα της $y = \arctan(\tan x)$:



□

21. *Βρείτε τα σύνολα των όρων των ακολουθιών*

$$\big(\tfrac{1+(-1)^{n-1}}{2}\big), \quad \big(\tfrac{a+b}{2}+(-1)^{n-1}\tfrac{a-b}{2}\big), \quad \big(n-2[\tfrac{n}{2}]\big), \quad \big(n-3[\tfrac{n}{3}]\big).$$

Λύση. (i) Για n άρτιο έχουμε ότι $\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}=0$ και για n περιττό ότι $\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}=1$. Άρα το σύνολο των όρων της ακολουθίας είναι το δισύνολο $\{0,1\}$.

(ii) Για n άρτιο έχουμε ότι $\frac{a+b}{2}+(-1)^{n-1}\frac{a-b}{2}=b$ και για n περιττό ότι $\frac{a+b}{2}+(-1)^{n-1}\frac{a-b}{2}=a$. Άρα το σύνολο των όρων της ακολουθίας είναι το δισύνολο $\{a,b\}$.

(iii) Αν το $n=2k$ είναι άρτιος, τότε το $\frac{n}{2}=k$ είναι ακέραιος, οπότε $[\frac{n}{2}]=[k]=k$ και άρα $n-2[\frac{n}{2}]=2k-2k=0$.
Αν το $n=2k+1$ είναι περιττός, τότε το $\frac{n}{2}=k+\frac{1}{2}$ είναι ανάμεσα στους ακέραιους k και $k+1$, οπότε $[\frac{n}{2}]=[k+\frac{1}{2}]=k$ και άρα $n-2[\frac{n}{2}]=2k+1-2k=1$.
Άρα το σύνολο των όρων της ακολουθίας είναι το δισύνολο $\{0,1\}$.

(iv) Αν $n=3k$ με ακέραιο k, τότε το $\frac{n}{3}=k$ είναι ακέραιος, οπότε $[\frac{n}{3}]=[k]=k$ και άρα $n-3[\frac{n}{3}]=3k-3k=0$.
Αν $n=3k+1$ με ακέραιο k, τότε το $\frac{n}{3}=k+\frac{1}{3}$ είναι ανάμεσα στους ακέραιους k και $k+1$, οπότε $[\frac{n}{3}]=[k+\frac{1}{3}]=k$ και άρα $n-3[\frac{n}{3}]=3k+1-3k=1$.
Αν $n=3k+2$ με ακέραιο k, τότε το $\frac{n}{3}=k+\frac{2}{3}$ είναι ανάμεσα στους ακέραιους k και $k+1$, οπότε $[\frac{n}{3}]=[k+\frac{2}{3}]=k$ και άρα $n-3[\frac{n}{3}]=3k+2-3k=2$.
Άρα το σύνολο των όρων της ακολουθίας είναι το τρισύνολο $\{0,1,2\}$. □

22. *Υπολογίστε τον n-οστό όρο καθεμίας από τις τέσσερις ακολουθίες οι οποίες ορίζονται από τους (κοινούς και για τις τέσσερις) πρώτους όρους $x_1=x_2=1$ και από τους αναδρομικούς τύπους*

$$x_{n+2}=3x_n, \quad x_{n+2}=x_{n+1}+x_n, \quad x_{n+2}=4x_{n+1}-4x_n, \quad x_{n+2}=x_{n+1}-x_n.$$

(Υπόδειξη: Διαβάστε την άσκηση 2.1.4.)

Λύση. (i) Βάσει του αναδρομικού τύπου $x_{n+2}=3x_n$ κάθε όρος της ακολουθίας προσδιορίζει τον μεθεπόμενο όρο: από τον x_1 προσδιορίζονται οι όροι με περιττούς δείκτες και από τον x_2 προσδιορίζονται οι όροι με άρτιους δείκτες.
Έχουμε διαδοχικά:

$$x_1=1, \quad x_3=3x_1=3=3^1, \quad x_5=3x_3=3^2, \quad x_7=3x_5=3^3, \quad x_9=3x_7=3^4.$$

Υποψιαζόμαστε ότι

$$x_{2k-1}=3^{k-1} \qquad \text{για κάθε } k\in\mathbb{N}$$

και το αποδεικνύουμε επαγωγικά. Το $x_{2k-1}=3^{k-1}$ ισχύει για $k=1$ αφού είναι το ίδιο με το $x_1=1$. Έστω ότι ισχύει $x_{2k-1}=3^{k-1}$ για κάποιο $m\in\mathbb{N}$. Τότε

$$x_{2(m+1)-1}=x_{2m+1}=3x_{2m-1}=3\cdot 3^{m-1}=3^m=3^{(m+1)-1}.$$

Άρα το $x_{2k-1}=3^{k-1}$ ισχύει και για το $m+1$.
Επίσης έχουμε διαδοχικά:

$$x_2=1, \quad x_4=3x_2=3=3^1, \quad x_6=3x_4=3^2, \quad x_8=3x_6=3^3, \quad x_{10}=3x_8=3^4.$$

Υποψιαζόμαστε ότι

$$x_{2k}=3^{k-1} \qquad \text{για κάθε } k\in\mathbb{N}$$

και το αποδεικνύουμε επαγωγικά. Το $x_{2k}=3^{k-1}$ ισχύει για $k=1$ αφού είναι το ίδιο με το $x_2=1$. Έστω ότι ισχύει $x_{2k}=3^{k-1}$ για κάποιο $m\in\mathbb{N}$. Τότε

$$x_{2(m+1)}=x_{2m+2}=3x_{2m}=3\cdot 3^{m-1}=3^m=3^{(m+1)-1}.$$

Άρα το $x_{2k} = 3^{k-1}$ ισχύει και για το $m+1$.
Καταλήγουμε στον τύπο

$$x_n = \begin{cases} 3^{(n/2)-1} & \text{αν το } n \text{ είναι άρτιο} \\ 3^{(n-1)/2} & \text{αν το } n \text{ είναι περιττό} \end{cases}$$

Επίσης ισχύει και ο τύπος

$$x_n = 3^{[(n-1)/2]}.$$

(ii) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 = x + 1$. Αυτή έχει τις λύσεις $\rho_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Προσδιορίζουμε κ, λ ώστε

$$\begin{aligned} \kappa + \lambda &= x_1 = 1 \\ \kappa\rho_1 + \lambda\rho_2 &= x_2 = 1 \end{aligned}$$

Αυτά είναι τα: $\kappa = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ και $\lambda = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.
Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε επαγωγικά ότι

$$x_n = \kappa\rho_1^{n-1} + \lambda\rho_2^{n-1} \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για $n = 1$ και για $n = 2$ αφού για $n = 1$ γίνεται $\kappa + \lambda = x_1 = 1$ και για $n = 2$ γίνεται $\kappa\rho_1 + \lambda\rho_2 = x_2 = 1$. Τώρα έστω ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ η σχέση ισχύει για το n και για το $n+1$. Τότε

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= x_{n+1} + x_n = (\kappa\rho_1^n + \lambda\rho_2^n) + (\kappa\rho_1^{n-1} + \lambda\rho_2^{n-1}) \\ &= \kappa\rho_1^{n-1}(\rho_1 + 1) + \lambda\rho_2^{n-1}(\rho_2 + 1) = \kappa\rho_1^{n+1} + \lambda\rho_2^{n+1} \end{aligned}$$

οπότε η σχέση ισχύει και για το $n + 2$ και άρα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι:

$$x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \ \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

(iii) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 = 4x - 4$. Αυτή έχει την μοναδική λύση $\rho = 2$. Προσδιορίζουμε κ, λ ώστε

$$\begin{aligned} \kappa &= x_1 = 1 \\ \kappa\rho + \lambda\rho &= x_2 = 1 \end{aligned}$$

Αυτά είναι τα: $\kappa = 1$ και $\lambda = -\frac{1}{2}$.
Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε επαγωγικά ότι

$$x_n = \kappa\rho^{n-1} + \lambda(n-1)\rho^{n-1} \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για $n = 1$ και για $n = 2$ αφού για $n = 1$ γίνεται $\kappa = x_1 = 1$ και για $n = 2$ γίνεται $\kappa\rho + \lambda\rho = x_2 = 1$. Τώρα έστω ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ η σχέση ισχύει για το n και για το $n + 1$. Τότε

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 4x_{n+1} - 4x_n = 4(\kappa\rho^n + \lambda n\rho^n) - 4(\kappa\rho^{n-1} + \lambda(n-1)\rho^{n-1}) \\ &= \kappa\rho^{n-1}(4\rho - 4) + \lambda\rho^{n-1}(4n\rho - 4(n-1)) = \kappa\rho^{n+1} + \lambda(n+1)\rho^{n+1} \end{aligned}$$

οπότε η σχέση ισχύει και για το $n+2$ και άρα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πιο συγκεκριμένα (με $\kappa = 1$, $\lambda = -\frac{1}{2}$ και $\rho = 2$), έχουμε ότι:

$$x_n = 2^{n-1} - \tfrac{1}{2}(n-1)2^{n-1} = -(n-3)2^{n-2} \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

(iv) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 = x - 1$. Αυτή έχει τις λύσεις $\rho_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ οι οποίες είναι μιγαδικές. Παρατηρούμε ότι $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ και $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, οπότε $\rho_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ και $\rho_2 = \cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$. Προσδιορίζουμε κ, λ ώστε

$$\begin{aligned} \kappa &= x_1 = 1 \\ \kappa\cos\tfrac{\pi}{3} + \lambda\sin\tfrac{\pi}{3} &= x_2 = 1 \end{aligned}$$

Αυτά είναι τα: $\kappa = 1$ και $\lambda = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε επαγωγικά ότι

$$x_n = \kappa\cos\tfrac{(n-1)\pi}{3} + \lambda\sin\tfrac{(n-1)\pi}{3} \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για $n = 1$ και για $n = 2$ αφού για $n = 1$ γίνεται $\kappa = x_1 = 1$ και για $n = 2$ γίνεται $\kappa\cos\frac{\pi}{3} + \lambda\sin\frac{\pi}{3} = x_2 = 1$. Τώρα έστω ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ η σχέση ισχύει για το n και για το $n+1$. Τότε

$$\begin{aligned} x_{n+2} = x_{n+1} - x_n &= \big(\kappa\cos\tfrac{n\pi}{3} + \lambda\sin\tfrac{n\pi}{3}\big) - \big(\kappa\cos\tfrac{(n-1)\pi}{3} + \lambda\sin\tfrac{(n-1)\pi}{3}\big) \\ &= \kappa\big(\cos\tfrac{n\pi}{3} - \cos\tfrac{(n-1)\pi}{3}\big) + \lambda\big(\sin\tfrac{n\pi}{3} - \sin\tfrac{(n-1)\pi}{3}\big) \\ &= \kappa\cos\tfrac{(n+1)\pi}{3} + \lambda\sin\tfrac{(n+1)\pi}{3} \end{aligned}$$

οπότε η σχέση ισχύει και για το $n+2$ και άρα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι:

$$x_n = \cos\tfrac{(n-1)\pi}{3} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\tfrac{(n-1)\pi}{3} \qquad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

□

23. *Ποιες από τις ακολουθίες* $((-3)^n)$, $((-1)^n n - n)$ *είναι άνω φραγμένες; κάτω φραγμένες; φραγμένες;*

Λύση. (i) Οι όροι της πρώτης ακολουθίας είναι

$$(-3)^n = \begin{cases} 3^n & \text{αν το } n \text{ είναι άρτιο} \\ -3^n & \text{αν το } n \text{ είναι περιττό} \end{cases}$$

Αν η ακολουθία έχει κάποιο άνω φράγμα u τότε ισχύει $3^n \leq u$ και άρα $n \leq \log_3 u$ για κάθε άρτιο n. Επομένως ισχύει $2k \leq \log_3 u$ και άρα $k \leq \frac{1}{2}\log_3 u$ για κάθε φυσικό k. Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο και γνωρίζουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Άρα η ακολουθία δεν έχει κανένα άνω φράγμα.
Αν η ακολουθία έχει κάποιο κάτω φράγμα l τότε ισχύει $-3^n \geq l$ και άρα $n \leq \log_3(-l)$ για κάθε περιττό n. Επομένως ισχύει $2k - 1 \leq \log_3(-l)$ και άρα $k \leq \frac{1}{2}(\log_3(-l) + 1)$ για κάθε φυσικό k. Πάλι καταλήγουμε στο ότι το σύνολο $\mathbb{N}$ είναι άνω φραγμένο και άρα η ακολουθία δεν έχει κανένα κάτω φράγμα.
(ii) Οι όροι της δεύτερης ακολουθίας είναι

$$(-1)^n n - n = \begin{cases} 0 & \text{αν το } n \text{ είναι άρτιο} \\ -2n & \text{αν το } n \text{ είναι περιττό} \end{cases}$$

Το 0 είναι άνω φράγμα της ακολουθίας.
Αν η ακολουθία έχει κάποιο κάτω φράγμα l τότε ισχύει $-2n \geq l$ και άρα $n \leq -\frac{l}{2}$ για κάθε περιττό n. Άρα ισχύει $2k - 1 \leq -\frac{l}{2}$ και επομένως $k \leq -\frac{l}{4} + \frac{1}{2}$ για κάθε φυσικό k. Αυτό είναι άτοπο οπότε η ακολουθία δεν έχει κανένα κάτω φράγμα. □

24. *Αποδείξτε ότι οι ακολουθίες* $(n^4/2^n)$ *και* $(8^n/n!)$ *δεν είναι μονότονες αλλά και ότι είναι μονότονες από κάποια τιμή του δείκτη και πέρα. Είναι φραγμένες;*

Λύση. (i) Έστω $x_n = \frac{n^4}{2^n}$. Ελέγχουμε την γνήσια μονοτονία της ακολουθίας:

$$x_n < x_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{n^4}{2^n} < \tfrac{(n+1)^4}{2^{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad 2 < (1+\tfrac{1}{n})^4 \quad \Leftrightarrow \quad n < \tfrac{1}{\sqrt[4]{2}-1} \approx 5.285.$$

Ομοίως,

$$x_n > x_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{n^4}{2^n} > \tfrac{(n+1)^4}{2^{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad 2 > (1+\tfrac{1}{n})^4 \quad \Leftrightarrow \quad n > \tfrac{1}{\sqrt[4]{2}-1} \approx 5.285.$$

Άρα

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 > x_7 > x_8 > \dots .$$

Δηλαδή η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα μέχρι τον έκτο όρο της και γνησίως φθίνουσα από τον έκτο όρο της και πέρα. Η ακολουθία είναι φραγμένη: όλοι οι όροι της βρίσκονται ανάμεσα στο 0 και στον έκτο όρο της.

(ii) Έστω $x_n = \frac{8^n}{n!}$. Ελέγχουμε την γνήσια μονοτονία της ακολουθίας:

$$x_n < x_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{8^n}{n!} < \tfrac{8^{n+1}}{(n+1)!} \quad \Leftrightarrow \quad n+1 < 8 \quad \Leftrightarrow \quad n < 7.$$

Ομοίως,

$$x_n > x_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{8^n}{n!} > \tfrac{8^{n+1}}{(n+1)!} \quad \Leftrightarrow \quad n+1 > 8 \quad \Leftrightarrow \quad n > 7.$$

Άρα

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7 = x_8 > x_9 > x_{10} > x_{11} > \dots .$$

Δηλαδή η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα μέχρι τον έβδομο όρο της και γνησίως φθίνουσα από τον όγδοο όρο της και πέρα. Η ακολουθία είναι φραγμένη: όλοι οι όροι της βρίσκονται ανάμεσα στο 0 και στον έβδομο όρο της. □

25. *Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του ορίου, δηλαδή παίρνοντας $\epsilon > 0$ και υπολογίζοντας κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$ συναρτήσει του ϵ, αποδείξτε ότι*

$$\tfrac{1}{\sqrt{n}} \to 0, \quad \big(-\tfrac{1}{2}\big)^n \to 0, \quad \tfrac{2n+3}{3n+5} \to \tfrac{2}{3}, \quad \tfrac{\sin n}{n\sqrt{n}} \to 0, \quad \tfrac{1}{2^n+3n} \to 0.$$

Λύση. (i) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \big|\tfrac{1}{\sqrt{n}}\big| < \epsilon.$$

Λύνουμε την ανισότητα $|\frac{1}{\sqrt{n}}| < \epsilon$, δηλαδή την $\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$, ως προς n:

$$\tfrac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \tfrac{1}{\epsilon^2}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \tfrac{1}{\epsilon^2}.$$

Αυτή η συνεπαγωγή ισχύει αν θεωρήσουμε ως n_0 οποιονδήποτε φυσικό μεγαλύτερο από τον αριθμό $\frac{1}{\epsilon^2}$. Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\frac{1}{\epsilon^2}$ δίνεται από τον τύπο $\big[\frac{1}{\epsilon^2}\big] + 1$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \big[\tfrac{1}{\epsilon^2}\big] + 1.$$

(ii) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \big|\big(-\tfrac{1}{2}\big)^n\big| < \epsilon.$$

Λύνουμε την ανισότητα $|(-\frac{1}{2})^n| < \epsilon$, δηλαδή την $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, ως προς n:

$$\tfrac{1}{2^n} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2^n > \tfrac{1}{\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad n > \log_2 \tfrac{1}{\epsilon}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \log_2 \tfrac{1}{\epsilon}.$$

Αυτή η συνεπαγωγή ισχύει αν θεωρήσουμε ως n_0 οποιονδήποτε φυσικό μεγαλύτερο από τον αριθμό $\log_2 \frac{1}{\epsilon}$. Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\log_2 \frac{1}{\epsilon}$ δίνεται από τον τύπο $\begin{cases} [\log_2 \frac{1}{\epsilon}] + 1 & \text{αν } 0 < \epsilon \leq 1 \\ 1 & \text{αν } 1 < \epsilon \end{cases}$ Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \begin{cases} [\log_2 \frac{1}{\epsilon}] + 1 & \text{αν } 0 < \epsilon \leq 1 \\ 1 & \text{αν } 1 < \epsilon \end{cases}$$

(iii) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac{2n+3}{3n+5} - \tfrac{2}{3}\right| < \epsilon.$$

Λύνουμε την ανισότητα $|\frac{2n+3}{3n+5} - \frac{2}{3}| < \epsilon$ ως προς n:

$$\left|\tfrac{2n+3}{3n+5} - \tfrac{2}{3}\right| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{3(3n+5)} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \tfrac{1}{9\epsilon} - \tfrac{5}{3}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \tfrac{1}{9\epsilon} - \tfrac{5}{3}.$$

Όπως στις προηγούμενες περιπτώσεις, αυτή η συνεπαγωγή ισχύει αν θεωρήσουμε ως n_0 οποιονδήποτε φυσικό μεγαλύτερο από τον αριθμό $\frac{1}{9\epsilon} - \frac{5}{3}$. Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\frac{1}{9\epsilon} - \frac{5}{3}$ δίνεται από τον τύπο $\begin{cases} [\frac{1}{9\epsilon} - \frac{5}{3}] + 1 & \text{αν } 0 < \epsilon \leq \frac{1}{15} \\ 1 & \text{αν } \frac{1}{15} < \epsilon \end{cases}$ Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \begin{cases} [\frac{1}{9\epsilon} - \frac{5}{3}] + 1 & \text{αν } 0 < \epsilon \leq \frac{1}{15} \\ 1 & \text{αν } \frac{1}{15} < \epsilon \end{cases}$$

(iv) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac{\sin n}{n\sqrt{n}}\right| < \epsilon.$$

Η ανισότητα $|\frac{\sin n}{n\sqrt{n}}| < \epsilon$, δηλαδή η $\frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}} < \epsilon$, δεν λύνεται ως προς n λόγω της μορφής την οποία έχει. Βρίσκουμε κάποια παράσταση του n μεγαλύτερη και απλούστερη από την $\frac{|\sin n|}{n\sqrt{n}}$:

$$\tfrac{|\sin n|}{n\sqrt{n}} \leq \tfrac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{n\sqrt{n}} < \epsilon.$$

Λύνουμε την ανισότητα $\frac{1}{n\sqrt{n}} < \epsilon$ ως προς n:

$$\tfrac{1}{n\sqrt{n}} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \tfrac{1}{\epsilon^{2/3}}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \tfrac{1}{\epsilon^{2/3}}.$$

Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\frac{1}{\epsilon^{2/3}}$ δίνεται από τον τύπο $\left[\frac{1}{\epsilon^{2/3}}\right]+1$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \left[\tfrac{1}{\epsilon^{2/3}}\right]+1.$$

(v) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac{1}{2^n+3n}\right| < \epsilon.$$

Η ανισότητα $\left|\frac{1}{2^n+3n}\right| < \epsilon$, δηλαδή η $\frac{1}{2^n+3n} < \epsilon$, δεν λύνεται ως προς n λόγω της μορφής την οποία έχει. Βρίσκουμε κάποια παράσταση του n μεγαλύτερη και απλούστερη από την $\frac{1}{2^n+3n}$:

$$\tfrac{1}{2^n+3n} \leq \tfrac{1}{n}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{n} < \epsilon.$$

Λύνουμε την ανισότητα $\frac{1}{n} < \epsilon$ ως προς n:

$$\tfrac{1}{n} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \tfrac{1}{\epsilon}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \tfrac{1}{\epsilon}.$$

Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\frac{1}{\epsilon}$ δίνεται από τον τύπο $\left[\frac{1}{\epsilon}\right]+1$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \left[\tfrac{1}{\epsilon}\right]+1.$$

□

26. *Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς των ορίων, δηλαδή παίρνοντας $M > 0$ και υπολογίζοντας το κατάλληλο $n_0 \in \mathbb{N}$ συναρτήσει του M, αποδείξτε ότι*

$$(5/3)^n \to +\infty, \quad n^2+(-1)^n n \to +\infty, \quad \tfrac{n^3+1}{n+1} \to +\infty, \quad n(2+\cos n) \to +\infty.$$

Λύση. (i) Παίρνουμε τυχαίο $M > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \left(\tfrac{5}{3}\right)^n > M.$$

Λύνουμε την ανισότητα $(5/3)^n > M$ ως προς n:

$$\left(\tfrac{5}{3}\right)^n > M \quad \Leftrightarrow \quad n > \log_{5/3} M.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \log_{5/3} M.$$

Αυτή η συνεπαγωγή ισχύει αν θεωρήσουμε ως n_0 οποιονδήποτε φυσικό μεγαλύτερο από τον αριθμό $\log_{5/3} M$. Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\log_{5/3} M$ δίνεται από τον τύπο $\begin{cases}[\log_{5/3} M]+1 & \text{αν } M \geq 1\\ 1 & \text{αν } 0 < M < 1\end{cases}$ Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \begin{cases}[\log_{5/3} M]+1 & \text{αν } M \geq 1\\ 1 & \text{αν } 0 < M < 1\end{cases}$$

(ii) Παίρνουμε τυχαίο $M > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n^2 + (-1)^n n > M.$$

Παρατηρούμε ότι η ανισότητα $n^2 + (-1)^n n > M$ είναι σχετικά δύσκολο να λυθεί ως προς n επειδή η παράσταση $n^2 + (-1)^n n$ έχει διπλό τυπο: $n^2 + n$ αν το n είναι άρτιο και $n^2 - n$ αν το n είναι περιττό. Βρίσκουμε μία ποσότητα μικρότερη και απλούστερη από την $n^2 + (-1)^n n$:

$$n^2 + (-1)^n n \geq n^2 - n.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n^2 - n > M.$$

Λύνουμε την ανισότητα $n^2 - n > M$ ως προς n:

$$n^2 - n > M \quad \Leftrightarrow \quad n^2 - n - M > 0 \quad \Leftrightarrow \quad n < \tfrac{1-\sqrt{1+4M}}{2} \text{ ή } n > \tfrac{1+\sqrt{1+4M}}{2}.$$

Επομένως

$$n > \tfrac{1+\sqrt{1+4M}}{2} \quad \Rightarrow \quad n^2 - n > M.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \tfrac{1+\sqrt{1+4M}}{2}.$$

Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$ δίνεται από τον τύπο $[\frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}] + 1$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \left[\tfrac{1+\sqrt{1+4M}}{2}\right] + 1.$$

(iii) Παίρνουμε τυχαίο $M > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{n^3+1}{n+1} > M.$$

Η ανισότητα $\frac{n^3+1}{n+1} > M$ δεν λύνεται ως προς n επειδή καταλήγει σε ανισότητα τρίτου βαθμού ως προς n. Βρίσκουμε κάποια παράσταση του n μικρότερη και απλούστερη από την $\frac{n^3+1}{n+1}$:

$$\tfrac{n^3+1}{n+1} \geq \tfrac{n^3}{n+n} = \tfrac{n^2}{2}.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{n^2}{2} > M.$$

Λύνουμε την ανισότητα $\frac{n^2}{2} > M$ ως προς n:

$$\tfrac{n^2}{2} > M \quad \Leftrightarrow \quad n < -\sqrt{2M} \text{ ή } n > \sqrt{2M}.$$

Επομένως

$$n > \sqrt{2M} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{n^2}{2} > M.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > \sqrt{2M}$$

Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό $\sqrt{2M}$ δίνεται από τον τύπο $[\sqrt{2M}] + 1$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq \left[\sqrt{2M}\right] + 1.$$

(iv) Παίρνουμε τυχαίο $M > 0$ και θα βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n(2 + \cos n) > M.$$

Η ανισότητα $n(2+\cos n) > M$ δεν λύνεται ως προς n λόγω της μορφής την οποία έχει. Βρίσκουμε κάποια παράσταση του n μικρότερη και απλούστερη από την $n(2 + \cos n)$:

$$n(2 + \cos n) \geq n(2 - 1) = n.$$

Άρα αρκεί να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε:

$$n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad n > M.$$

Ο μικρότερος φυσικός ο οποίος είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό M δίνεται από τον τύπο $[M]+1$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιονδήποτε φυσικό

$$n_0 \geq [M] + 1.$$

□

27. *Διερευνήστε την ύπαρξη και την τιμή του ορίου* $\lim_{n\to+\infty} \frac{(1+x)^n}{(1-x)^n}$ *ανάλογα με την τιμή της παραμέτρου* x.

Λύση. Η παράσταση $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^n}$ γράφεται $(\frac{1+x}{1-x})^n$ οπότε η ακολουθία μας είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\frac{1+x}{1-x}$. Η συμπεριφορά της είναι γνωστή και εξαρτάται από την σχετική θέση του λόγου ως προς τους αριθμούς -1 και 1. Κάνοντας την απαιτούμενη διερεύνηση, καταλήγουμε στο ότι

$$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^n} \begin{cases} \to +\infty & \text{αν } 0 < x < 1 \\ \to 1 & \text{αν } x = 0 \\ \to 0 & \text{αν } x < 0 \\ \text{δεν έχει όριο} & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

□

28. *Χρησιμοποιώντας ιδιότητες των ορίων, βρείτε τα όρια των ακολουθιών με τους παρακάτω n-οστούς όρους.*

$$\big(\tfrac{1}{n} + (-1)^n n\big)^4, \qquad \big(\tfrac{1}{3} + \tfrac{(-1)^n}{2}\big)^n, \qquad \tfrac{2}{3} + \tfrac{2^2}{3^2} + \cdots + \tfrac{2^n}{3^n}.$$

Λύση. (i) Για την υπακολουθία των περιττών δεικτών έχουμε ότι

$$\big(\tfrac{1}{2k-1} - (2k-1)\big)^4 \to (0 - (+\infty))^4 = (-\infty)^4 = +\infty.$$

Για την υπακολουθία των άρτιων δεικτών έχουμε ότι

$$\big(\tfrac{1}{2k} + 2k\big)^4 \to (0 + (+\infty))^4 = (+\infty)^4 = +\infty.$$

Άρα $\big(\frac{1}{n} + (-1)^n n\big)^4 \to +\infty$.
(ii) Για την υπακολουθία των περιττών δεικτών έχουμε ότι

$$\big(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{2}\big)^{2k-1} = \big(-\tfrac{1}{6}\big)^{2k-1} = \big(\tfrac{1}{36}\big)^k\big(-\tfrac{1}{6}\big)^{-1} \to 0(-6) = 0.$$

Για την υπακολουθία των άρτιων δεικτών έχουμε ότι

$$\big(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2}\big)^{2k} = (\tfrac{5}{6})^{2k} = \big(\tfrac{25}{36}\big)^k \to 0.$$

Άρα $\left(\frac{1}{3}+\frac{(-1)^n}{2}\right)^n \to 0$.
(iii) Χρησιμοποιούμε την αλγεβρική ταυτότητα

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+x^n=\begin{cases}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{αν } x\neq 1\\ n+1 & \text{αν } x=1\end{cases}$$

Άρα

$$\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3^2}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}=\frac{2}{3}\big(1+\frac{2}{3}+\cdots+\big(\frac{2}{3}\big)^{n-1}\big)=\frac{2}{3}\,\frac{1-(2/3)^n}{1-(2/3)}=2\big(1-\big(\frac{2}{3}\big)^n\big)\to 2(1-0)=2.$$

□

29. *Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν τα όρια των ακολουθιών με τους εξής n-οστούς όρους:*

$$\frac{1+(-1)^n(n+2)}{3n},\quad 3^{(-1)^n},\quad 3^{(-1)^n n},\quad \big(\frac{1}{2}+\frac{2(-1)^n}{3}\big)^n,\quad 1-2+2^2-\cdots+(-1)^n2^n.$$

Λύση. (i) Για τις υπακολουθίες των περιττών και των άρτιων δεικτών έχουμε αντιστοίχως:

$$\frac{1-(2k-1+2)}{3(2k-1)}=\frac{-2k}{6k-3}=\frac{-2}{6-(3/k)}\to-\frac{1}{3},\qquad \frac{1+(2k+2)}{3(2k)}=\frac{2k+3}{6k}=\frac{1}{3}+\frac{1}{2k}\to\frac{1}{3}.$$

Άρα η ακολουθία δεν έχει όριο.
(ii) Για τις υπακολουθίες των περιττών και των άρτιων δεικτών έχουμε αντιστοίχως:

$$3^{(-1)^{2k-1}}=3^{-1}\to 3^{-1}=\frac{1}{3},\qquad 3^{(-1)^{2k}}=3^1\to 3^1=3.$$

Άρα η ακολουθία δεν έχει όριο.
(iii) Για τις υπακολουθίες των περιττών και των άρτιων δεικτών έχουμε αντιστοίχως:

$$3^{-(2k-1)}=\frac{1}{3^{2k-1}}=\frac{3}{9^k}\to 0,\qquad 3^{2k}=9^k\to+\infty.$$

Άρα η ακολουθία δεν έχει όριο.
(iv) Για τις υπακολουθίες των περιττών και των άρτιων δεικτών έχουμε αντιστοίχως:

$$(\frac{1}{2}+\frac{-2}{3})^{2k-1}=(-\frac{1}{6})^{2k-1}=-6\big(\frac{1}{36}\big)^k\to 0,\qquad (\frac{1}{2}+\frac{2}{3})^{2k}=(\frac{7}{6})^{2k}=\big(\frac{49}{36}\big)^k\to+\infty.$$

Άρα η ακολουθία δεν έχει όριο.
(v) Πάλι χρησιμοποιούμε τον γνωστό τύπο για το άθροισμα των πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου:

$$1-2+2^2-\cdots+(-1)^n2^n=\frac{1-(-2)^{n+1}}{1-(-2)}=\frac{1-(-2)^{n+1}}{3}.$$

Τώρα για τις υπακολουθίες των περιττών και των άρτιων δεικτών έχουμε αντιστοίχως:

$$\frac{1-(-2)^{2k}}{3}=\frac{1-4^k}{3}\to-\infty,\qquad \frac{1-(-2)^{2k+1}}{3}=\frac{1+2\cdot 4^k}{3}\to+\infty.$$

Άρα η ακολουθία δεν έχει όριο. □

30. *(i) Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) οι οποίες δεν έχουν όριο ώστε η (x_n+y_n) να έχει όριο.*
(ii) Βρείτε ακολουθίες (x_n), (y_n) οι οποίες δεν έχουν όριο ώστε η (x_ny_n) να έχει όριο.

Λύση. (i) Παίρνουμε οποιαδήποτε (x_n) η οποία δεν έχει όριο και ως (y_n) παίρνουμε την αντίθετη της (x_n), δηλαδή $y_n=-x_n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Για παράδειγμα, $x_n=(-1)^n$ και $y_n=-(-1)^n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Οι (x_n) και (y_n) δεν έχουν όριο, αλλά $x_n+y_n=0\to 0$.
(ii) Παίρνουμε οποιαδήποτε (x_n) η οποία δεν έχει όριο και ως (y_n) παίρνουμε την αντίστροφη της (x_n), δηλαδή $y_n=\frac{1}{x_n}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Πρέπει μόνο να προσέξουμε ώστε να είναι $x_n\neq 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Για παράδειγμα, $x_n=(-1)^n$ και $y_n=\frac{1}{(-1)^n}=(-1)^n$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Οι (x_n) και (y_n) δεν έχουν όριο, αλλά $x_ny_n=1\to 1$. □

31. *Βρείτε τα όρια των ακολουθιών με τους εξής n-οστούς όρους:*

$$-n^3+7n^2-2n+1, \quad \left(\tfrac{3n^4-2n^2+1}{1+n-2n^2}\right)^8, \quad \left(\tfrac{n^3+2n+2}{-2n^3+1}\right)^{13}, \quad \tfrac{n-(n+3)^2-7n\sqrt{n}}{(n+1)(\sqrt{n}+1)^2}, \quad \tfrac{5^n-3^{n+7}}{2^{n-1}-5^{n+2}},$$

$$\tfrac{2+\log(n\sqrt{n})}{7-2\log n}, \quad \sqrt{n^2+n}-n, \quad n\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}), \quad \left(\tfrac{n(n+1)}{n+2}-\tfrac{n^3}{n^2+1}\right)^3,$$

$$\tfrac{(1+2+2^2+\cdots+2^n)^2}{1+4+4^2+\cdots+4^n}, \quad \tfrac{1}{1+2}\,\tfrac{2}{2+2}\,\tfrac{3}{3+2}\cdots\tfrac{n-1}{n+1}\,\tfrac{n}{n+2}, \quad 3n-2n\sin n, \quad \tfrac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}}, \quad \sqrt[n]{n^2+3n+1},$$

$$\sqrt[n]{2^n+3^n}, \quad \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \left(1-\tfrac{1}{n^2}\right)^n, \quad \left(1-\tfrac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \left(1+\tfrac{1}{n+2}\right)^n, \quad \left(1-\tfrac{1}{n}\right)^n, \quad \left(1+\tfrac{2}{n}\right)^n.$$

Λύση. (i) Έχουμε πολυωνυμική παράσταση του n. Άρα το όριο είναι $-\infty$ αφού ο συντελεστής τού μεγιστοβάθμιου όρου είναι αρνητικός. Πιο αναλυτικά:

$$-n^3+7n^2-2n+1 = n^3\left(-1+\tfrac{7}{n}-\tfrac{2}{n^2}+\tfrac{1}{n^3}\right) \to (+\infty)(-1+0-0+0) = -\infty.$$

(ii) Έχουμε ρητή παράσταση του n οπότε

$$\tfrac{3n^4-2n^2+1}{1+n-2n^2} = \tfrac{n^4}{n^2}\,\tfrac{3-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}-2} = n^2\,\tfrac{3-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}-2} \to (+\infty)\left(-\tfrac{3}{2}\right) = -\infty.$$

Άρα

$$\left(\tfrac{3n^4-2n^2+1}{1+n-2n^2}\right)^8 \to (-\infty)^8 = +\infty.$$

(iii) Όπως πριν:

$$\tfrac{n^3+2n+2}{-2n^3+1} = \tfrac{n^3}{n^3}\,\tfrac{1+\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{-2+\frac{1}{n^3}} = \tfrac{1+\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{-2+\frac{1}{n^3}} \to -\tfrac{1}{2}$$

και

$$\left(\tfrac{n^3+2n+2}{-2n^3+1}\right)^{13} \to \left(-\tfrac{1}{2}\right)^{13} = -\tfrac{1}{2^{13}}.$$

(iv) Η μέγιστη δύναμη του n στον αριθμητή είναι η n^2. Το ίδιο και στον παρονομαστή. Άρα

$$\tfrac{n-(n+3)^2-7n\sqrt{n}}{(n+1)(\sqrt{n}+1)^2} = \tfrac{n^2}{n^2}\,\tfrac{\frac{1}{n}-(1+\frac{3}{n})^2-\frac{7}{\sqrt{n}}}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{\sqrt{n}})^2} \to \tfrac{0-(1+0)^2-0}{(1+0)(1+0)^2} = -1.$$

(v) Ο όρος με την μεγαλύτερη τάξη μεγέθους στον αριθμητή και στον παρονομαστή είναι ο 5^n. Άρα

$$\tfrac{5^n-3^{n+7}}{2^{n-1}-5^{n+2}} = \tfrac{5^n}{5^n}\,\tfrac{1-3^7(\frac{3}{5})^n}{2^{-1}(\frac{2}{5})^n-5^2} \to \tfrac{1-0}{0-25} = -\tfrac{1}{25}.$$

(vi) Έχουμε ότι

$$\tfrac{2+\log(n\sqrt{n})}{7-2\log n} = \tfrac{2+\frac{3}{2}\log n}{7-2\log n} = \tfrac{\log n}{\log n}\,\tfrac{\frac{2}{\log n}+\frac{3}{2}}{\frac{7}{\log n}-2} \to \tfrac{0+\frac{3}{2}}{0-2} = -\tfrac{3}{4}.$$

(vii) Επειδή $\sqrt{n^2+n}\to+\infty$ και $n\to+\infty$, προκύπτει απροσδιόριστη μορφή. Όμως,

$$\sqrt{n^2+n}-n = \tfrac{(n^2+n)-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n} = \tfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \tfrac{n}{n}\,\tfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \to \tfrac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \tfrac{1}{2}.$$

(viii) Όπως στο προηγούμενο όριο, πολλαπλασιάζοντας με συζυγείς παραστάσεις, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n} &= (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\\ &= \tfrac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\tfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \tfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\\ &= \tfrac{-2}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\begin{aligned}n\sqrt{n}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}) &= \tfrac{-2n\sqrt{n}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}\\ &= \tfrac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)} \to -\tfrac{1}{4}.\end{aligned}$$

(ix) Επειδή $\frac{n(n+1)}{n+2} = \frac{n^2+n}{n+2} \to +\infty$ και $\frac{n^3}{n^2+1} \to +\infty$, προκύπτει απροσδιόριστη μορφή. Όμως,

$$\frac{n(n+1)}{n+2} - \frac{n^3}{n^2+1} = \frac{(n^2+n)(n^2+1)-n^3(n+2)}{(n+2)(n^2+1)} = \frac{-n^3+n^2+n}{n^3+2n^2+n+2} \to -1.$$

Άρα $\left(\frac{n(n+1)}{n+2} - \frac{n^3}{n^2+1}\right)^3 \to (-1)^3 = -1$.

(x) Με την γνωστή αλγεβρική ταυτότητα $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ για $x \neq 1$ έχουμε ότι

$$\frac{(1+2+2^2+\cdots+2^n)^2}{1+4+4^2+\cdots+4^n} = \frac{\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\right)^2}{\frac{4^{n+1}-1}{4-1}} = 3\,\frac{(2^{n+1}-1)^2}{4^{n+1}-1} = 3\,\frac{4^{n+1}}{4^{n+1}}\,\frac{(1-\frac{1}{2^{n+1}})^2}{1-\frac{1}{4^{n+1}}} \to 3\,\frac{(1-0)^2}{1-0} = 3.$$

(xi) Απλοποιούμε:

$$\frac{1}{1+2}\,\frac{2}{2+2}\,\frac{3}{3+2}\cdots\frac{n-1}{n+1}\,\frac{n}{n+2} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)\cdot n}{3\cdot4\cdot5\cdots(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{1\cdot2}{(n+1)\cdot(n+2)} \to 0.$$

(xii) Από την ανισότητα $3n - 2n\sin n \geq 3n - 2n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και από το ότι $3n - 2n = n \to +\infty$ έχουμε ότι $3n - 2n\sin n \to +\infty$.

(xiii) Επειδή η παράσταση $\sqrt{n}$ η οποία βρίσκεται μέσα στο σύμβολο του ακέραιου μέρους έχει όριο $+\infty$, χρησιμοποιούμε την ανισότητα $[a] \leq a < [a]+1$ ή την ισοδύναμη $a-1 < [a] \leq a$ και έχουμε ότι

$$\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} < \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$

οπότε

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \leq 1$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, από τον κανόνα παρεμβολής παίρνουμε ότι $\frac{[\sqrt{n}]}{\sqrt{n}} \to 1$.

(xiv) Από τις ανισότητες $n^2 < n^2 + 3n + 1 < n^2 + 3n^2 + n^2 = 5n^2$ έχουμε ότι

$$\sqrt[n]{n^2} < \sqrt[n]{n^2+3n+1} < \sqrt[n]{5n^2}$$

οπότε

$$(\sqrt[n]{n})^2 < \sqrt[n]{n^2+3n+1} < \sqrt[n]{5}\,(\sqrt[n]{n})^2$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\sqrt[n]{5} \to 1$ και $\sqrt[n]{n} \to 1$, από τον κανόνα παρεμβολής παίρνουμε ότι $\sqrt[n]{n^2+3n+1} \to 1$.

(xv) Από τις ανισότητες $3^n < 2^n + 3^n < 3^n + 3^n = 2\cdot 3^n$ έχουμε ότι

$$3 < \sqrt[n]{2^n+3^n} < 3\sqrt[n]{2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $\sqrt[n]{2} \to 1$, από τον κανόνα παρεμβολής παίρνουμε $\sqrt[n]{2^n+3^n} \to 3$.

(xvi) Από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε ότι

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \geq 1 + n^2\,\frac{1}{n} = 1 + n$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή $1 + n \to +\infty$, συνεπάγεται $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \to +\infty$.

(xvii) Κατ' αρχάς είναι $(1-\frac{1}{n^2})^n < 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε ότι

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{n}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Από την διπλή ανισότητα

$$1 - \frac{1}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n < 1$$

και από τον κανόνα παρεμβολής συνεπάγεται $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \to 1$.

(xviii) Είναι $(1-\frac{1}{n})^{n^2} = (\frac{n-1}{n})^{n^2}$ και θεωρούμε την αντίστροφη ακολουθία: $(\frac{n}{n-1})^{n^2}$. (Προσοχή: αυτή ορίζεται για $n \geq 2$.) Από την ανισότητα του Bernoulli έχουμε ότι

$$\left(\tfrac{n}{n-1}\right)^{n^2} = \left(1+\tfrac{1}{n-1}\right)^{n^2} \geq 1+\tfrac{n^2}{n-1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Από $1+\frac{n^2}{n-1} \to +\infty$ συνεπάγεται $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2} \to +\infty$ οπότε $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \to 0$.
(xix) Επειδή $(1+\frac{1}{n})^n \to e$, έχουμε ότι $(1+\frac{1}{n+2})^{n+2} \to e$. (Είναι ο γνωστός κανόνας ότι αν $x_n \to x$ τότε $x_{n+k} \to x$.) Άρα

$$(1+\tfrac{1}{n+2})^n = (1+\tfrac{1}{n+2})^{n+2}(1+\tfrac{1}{n+2})^{-2} \to e \cdot 1 = e.$$

(xx) Πάλι κάνουμε αναγωγή στο γνωστό όριο $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ ως εξής:

$$\left(1-\tfrac{1}{n}\right)^n = \left(\tfrac{n-1}{n}\right)^n = \tfrac{1}{(\frac{n}{n-1})^n} = \tfrac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^n} = \tfrac{1}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}(1+\frac{1}{n-1})} \to \tfrac{1}{e\cdot 1} = e^{-1}.$$

(xxi) Όπως πριν:

$$\begin{aligned}\left(1+\tfrac{2}{n}\right)^n &= \left(\tfrac{n+2}{n}\right)^n = \left(\tfrac{n+2}{n+1}\,\tfrac{n+1}{n}\right)^n = \left(\tfrac{n+2}{n+1}\right)^n\left(\tfrac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\tfrac{1}{n+1}\right)^{-1}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n \to e\cdot 1\cdot e = e^2.\end{aligned}$$

□

32. *Έστω $x_n \neq 1$ για κάθε n και $x \neq 1$. Αποδείξτε ότι $x_n \to x$ αν και μόνο αν $\frac{1+x_n}{1-x_n} \to \frac{1+x}{1-x}$.*

Λύση. Το ότι από $x_n \to x$ συνεπάγεται $\frac{1+x_n}{1-x_n} \to \frac{1+x}{1-x}$ προκύπτει από τους γνωστούς αλγεβρικούς κανόνες ορίων.
Για την αντίστροφη συνεπαγωγή γράφουμε $y_n = \frac{1+x_n}{1-x_n}$ και $y = \frac{1+x}{1-x}$ οπότε η υπόθεσή μας είναι ότι $y_n \to y$. Τώρα λύνουμε τους τύπους ως προς x_n και x και βρίσκουμε

$$x_n = \tfrac{y_n-1}{y_n+1}, \qquad x = \tfrac{y-1}{y+1}.$$

(Από τους τύπους οι οποίοι ορίζουν τα y_n, y είναι εύκολο να δούμε ότι $y_n \neq -1$ και $y \neq -1$.)
Τώρα, όπως πριν, από τους γνωστούς αλγεβρικούς κανόνες ορίων προκύπτει ότι από $y_n \to y$ συνεπάγεται $\frac{y_n-1}{y_n+1} \to \frac{y-1}{y+1}$ και άρα $x_n \to x$. □

33. *Έστω $x_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $x_n \to +\infty$ αν και μόνο αν $\log_{10} x_n \to +\infty$.*

Λύση. Έστω $x_n \to +\infty$. Για να αποδείξουμε ότι $\log_{10} x_n \to +\infty$ παίρνουμε $M > 0$ και πρέπει να δούμε ότι αν το n_0 γίνει αρκετά μεγάλο τότε θα γίνει $\log_{10} x_n > M$.
Τώρα, το $\log_{10} x_n > M$ είναι ισοδύναμο με το $x_n > 10^M$. Άρα πρέπει να δούμε ότι αν το n_0 γίνει αρκετά μεγάλο τότε θα γίνει $x_n > 10^M$. Όμως αυτό είναι σωστό επειδή $x_n \to +\infty$.
Άρα $\log_{10} x_n \to +\infty$.
Αντιστρόφως, έστω $\log_{10} x_n \to +\infty$. Για να αποδείξουμε ότι $x_n \to +\infty$ παίρνουμε $M > 0$ και πρέπει να δούμε ότι αν το n_0 γίνει αρκετά μεγάλο τότε θα γίνει $x_n > M$.
Όπως πριν, το $x_n > M$ είναι ισοδύναμο με το $\log_{10} x_n > \log_{10} M$ οπότε πρέπει να δούμε ότι αν το n_0 γίνει αρκετά μεγάλο τότε θα γίνει $\log_{10} x_n > \log_{10} M$. Όμως αυτό είναι σωστό διότι $\log_{10} x_n \to +\infty$.
Επομένως $x_n \to +\infty$. □

34. *Βρείτε ακολουθία (x_n) ώστε όλοι οι όροι της να περιέχονται στο διάστημα $(-1,2]$ και ώστε το $\lim_{n\to+\infty} x_n$ να υπάρχει αλλά να μην περιέχεται στο $(-1,2]$.*

Λύση. Η ακολουθία με τύπο $x_n = -1+\frac{1}{n}$. □

35. *Βρείτε το όριο της (x_n) αν ισχύει $x_n < 7+8n-n^2$ για κάθε n.*

Λύση. Βλέπουμε ότι $7 + 8n - n^2 \to -\infty$ και συμπεραίνουμε ότι $x_n \to -\infty$. $\square$

36. *Βρείτε τα όρια των ακολουθιών με τους εξής n-οστούς όρους:*

$$\tfrac{\sin n + \sqrt{n}\cos\sqrt{n}}{n}, \qquad \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{(-1)^n}{4}\right)^n, \qquad \tfrac{n}{n^2+1} + \tfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \tfrac{n}{n^2+n-1} + \tfrac{n}{n^2+n}.$$

Λύση. (i) Έχουμε

$$0 \leq \left|\tfrac{\sin n + \sqrt{n}\cos\sqrt{n}}{n}\right| \leq \tfrac{|\sin n| + \sqrt{n}|\cos\sqrt{n}|}{n} \leq \tfrac{1+\sqrt{n}}{n} \leq \tfrac{2\sqrt{n}}{n} = \tfrac{2}{\sqrt{n}}.$$

Επειδή $\frac{2}{\sqrt{n}} \to 0$ συνεπάγεται $\left|\frac{\sin n + \sqrt{n}\cos\sqrt{n}}{n}\right| \to 0$ και άρα $\frac{\sin n + \sqrt{n}\cos\sqrt{n}}{n} \to 0$.
(ii) Παρατηρούμε ότι

$$\tfrac{3}{2} + \tfrac{(-1)^n}{4} \geq \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{4} = \tfrac{5}{4}$$

οπότε

$$\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{(-1)^n}{4}\right)^n \geq \left(\tfrac{5}{4}\right)^n.$$

για κάθε n. Επειδή $(5/4)^n \to +\infty$ συνεπάγεται ότι $\left(\frac{3}{2} + \frac{(-1)^n}{4}\right)^n \to +\infty$.
(iii) Το άθροισμα αποτελείται από n όρους στην μορφή $\frac{n}{n^2+k}$ με $1 \leq k \leq n$ από τους οποίους ο μικρότερος όρος είναι ο τελευταίος (με $k = n$) και ο μεγαλύτερος είναι ο πρώτος (με $k = 1$). Επομένως

$$n\,\tfrac{n}{n^2+n} \leq \tfrac{n}{n^2+1} + \tfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \tfrac{n}{n^2+n-1} + \tfrac{n}{n^2+n} \leq n\,\tfrac{n}{n^2+1}.$$

Τώρα, $\frac{n^2}{n^2+n} \to 1$ και $\frac{n^2}{n^2+1} \to 1$ οπότε από τον κανόνα παρεμβολής έχουμε ότι

$$\tfrac{n}{n^2+1} + \tfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \tfrac{n}{n^2+n-1} + \tfrac{n}{n^2+n} \to 1.$$

$\square$

37. *Αν ισχύει $n + 1 \leq nx_n \leq n + x_n + 2$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 1$.*

Λύση. Από $n + 1 \leq nx_n$ συνεπάγεται $\frac{n+1}{n} \leq x_n$. Ομοίως, από $nx_n \leq n + x_n + 2$ συνεπάγεται $x_n \leq \frac{n+2}{n-1}$ (για $n \geq 2$). Άρα

$$\tfrac{n+1}{n} \leq x_n \leq \tfrac{n+2}{n-1}$$

για κάθε $n \geq 2$. Από τον κανόνα παρεμβολής έχουμε ότι $x_n \to 1$. $\square$

38. *Αν ισχύει $n^2x_n^2 - 2n(n-1)x_n + n^2 \leq 2n + 3$ για κάθε n αποδείξτε ότι $x_n \to 1$.*

Λύση. Λύνουμε την ανισότητα δεύτερου βαθμού $n^2x_n^2 - 2n(n-1)x_n + n^2 \leq 2n+3$ με άγνωστο το x_n και βρίσκουμε ότι

$$\tfrac{n-3}{n} \leq x_n \leq \tfrac{n+1}{n}$$

για κάθε n. Από τον κανόνα παρεμβολής συνεπάγεται $x_n \to 1$. $\square$

39. *Έστω $a \geq 0$ και ακολουθία (x_n) ώστε $x_n \to 0$ και ώστε να ισχύει $x_n \geq a$ για άπειρα n. Αποδείξτε ότι $a = 0$.*

Λύση. Έστω, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι $a > 0$. Επειδή $x_n \to 0$, αν το n είναι αρκετά μεγάλο τότε θα γίνει $x_n < a$. Όμως αυτό αντιφάσκει με το ότι ισχύει $x_n \geq a$ για άπειρα n. $\square$

40. *(i) Ισχύει $\frac{1}{4} < \frac{n^7-5n^5+2}{3n^7+n^6-n^2+1} < 1$ αν το n είναι αρκετά μεγάλο;*
(ii) Ισχύει $\frac{2n^4-5n^3-n+2}{n^4+45n^3-1} < \frac{3}{2}$ για άπειρα n;

Λύση. (i) Ναι, διότι $\frac{n^7-5n^5+2}{3n^7+n^6-n^2+1} \to \frac{1}{3}$ και $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < 1$.
(ii) Έχουμε $\frac{2n^4-5n^3-n+2}{n^4+45n^3-1} \to 2$ και $\frac{3}{2} < 2$. Άρα ισχύει $\frac{3}{2} < \frac{2n^4-5n^3-n+2}{n^4+45n^3-1}$ αν το n είναι αρκετά μεγάλο οπότε δεν είναι δυνατό να ισχύει η αντίθετη ανισότητα για άπειρα n. $\square$

41. *Έστω $x_1 > 0$ και έστω ότι οι όροι της (x_n) ικανοποιούν τον αναδρομικό τύπο $3x_{n+1} = x_n^2 + 2$ για κάθε n. Μελετήστε την μονοτονία της (x_n) και εξετάστε αν έχει όριο και ποιό είναι αυτό.*

Λύση. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι της (x_n) είναι θετικοί διότι ο πρώτος όρος είναι θετικός και, επίσης, κάθε όρος από τον δεύτερο και πέρα είναι θετικός λόγω του αναδρομικού τύπου.
Για να δούμε αν η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα εξετάζουμε αν ισχύει $x_n < x_{n+1}$ ή η αντίθετη ανισότητα. Λόγω του αναδρομικού τύπου έχουμε ότι

$$x_n < x_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad 3x_n < x_n^2 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad (x_n - 1)(x_n - 2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_n < 1 \text{ ή } 2 < x_n$$

και ομοίως

$$x_n > x_{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad (x_n - 1)(x_n - 2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x_n < 2.$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι το αν ισχύει $x_n < x_{n+1}$ ή όχι εξαρτάται από την θέση του x_n σε σχέση με τα σημεία 1 και 2.
Θα αρχίσουμε κάνοντας μία υπόθεση για την θέση του x_1 σε σχέση με τα 1 και 2 και θα δούμε ότι, λόγω του αναδρομικού τύπου, από αυτήν καθορίζεται η θέση όλων των επόμενων όρων σε σχέση με τα 1 και 2.
Κατ' αρχάς, αν $x_1 = 1$ τότε βλέπουμε αμέσως ότι, λόγω του αναδρομικού τύπου, προκύπτει $x_2 = 1$ και μετά $x_3 = 1$ κ.τ.λ. οπότε η ακολουθία είναι σταθερή 1 και άρα συγκλίνει στο 1. Παρομοίως, αν $x_1 = 2$ τότε, λόγω του αναδρομικού τύπου, προκύπτει $x_2 = 2$ και μετά $x_3 = 2$ κ.τ.λ. οπότε η ακολουθία είναι σταθερή 2 και άρα συγκλίνει στο 2.
Τώρα, έστω $0 < x_1 < 1$. Θα δούμε με επαγωγή ότι ισχύει $0 < x_n < 1$ για κάθε n. Πράγματι, αν $0 < x_n < 1$ για κάποιο n τότε

$$3x_{n+1} = x_n^2 + 2 < 3$$

και άρα $x_{n+1} < 1$. Αποδείξαμε λοιπόν ότι ισχύει $0 < x_n < 1$ για κάθε n. Τότε όμως ισχύει και $x_n < x_{n+1}$ για κάθε n. Άρα έχουμε ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη με άνω φράγμα το 1. Επομένως η (x_n) συγκλίνει, δηλαδή $x_n \to x$ για κάποιον αριθμό x. Παίρνοντας όρια στον αναδρομικό τύπο $3x_{n+1} = x_n^2 + 2$, βρίσκουμε

$$3x = x^2 + 2$$

οπότε $x = 1$ ή $x = 2$. Η περίπτωση $x = 2$ απορίπτεται διότι όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι < 1. Άρα $x_n \to 1$.
Κατόπιν, έστω $1 < x_1 < 2$. Τώρα θα δούμε με επαγωγή ότι ισχύει $1 < x_n < 2$ για κάθε n. Πράγματι, αν $1 < x_n < 2$ για κάποιο n τότε

$$3x_{n+1} = x_n^2 + 2 > 3 \quad \text{και} \quad 3x_{n+1} = x_n^2 + 2 < 6$$

και άρα $1 < x_{n+1} < 2$. Άρα ισχύει $1 < x_n < 2$ για κάθε n οπότε ισχύει και $x_n > x_{n+1}$ για κάθε n. Άρα έχουμε ότι η (x_n) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη με κάτω φράγμα το 1. Επομένως η (x_n) συγκλίνει, δηλαδή $x_n \to x$ για κάποιον αριθμό x. Όπως πριν, παίρνοντας όρια στον αναδρομικό τύπο $3x_{n+1} = x_n^2 + 2$, βρίσκουμε $3x = x^2 + 2$ οπότε $x = 1$ ή $x = 2$. Η περίπτωση $x = 2$ αποκλείεται διότι όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι < 2 και φθίνουν. Άρα $x_n \to 1$.
Τέλος, έστω $2 < x_1$. Αποδείξτε τώρα εσείς ακριβώς όπως πριν, με επαγωγή, ότι ισχύει $2 < x_n$ και άρα $x_n < x_{n+1}$ για κάθε n, δηλαδή ότι η (x_n) είναι γνησίως αύξουσα. Άρα η (x_n) είτε συγκλίνει είτε αποκλίνει στο $+\infty$. Αν υποθέσουμε ότι $x_n \to x$ για κάποιον αριθμό x τότε, παίρνοντας όρια στον αναδρομικό τύπο, βρίσκουμε όπως πριν ότι $x = 1$ ή $x = 2$. Και οι δύο περιπτώσεις αποκλείονται διότι όλοι οι όροι της ακολουθίας είναι > 2 και αυξάνονται. Άρα $x_n \to +\infty$. □

42. *Έστω $x_{n+1} = 1 + \frac{6}{x_n}$ για κάθε n.*
(i) Αν $0 < x_1 < 3$ αποδείξτε ότι η υπακολουθία (x_{2k-1}) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη και η (x_{2k}) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη και ότι $x_n \to 3$.
(ii) Τί γίνεται αν $x_1 > 3$;

Λύση. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι όλοι οι όροι της (x_n) είναι θετικοί διότι ο πρώτος όρος είναι θετικός και, επίσης, κάθε όρος από τον δεύτερο και πέρα είναι θετικός λόγω του αναδρομικού τύπου.

(i) Για να μελετήσουμε τις υπακολουθίες των περιττών και των άρτιων δεικτών είναι λογικό να αναζητήσουμε μία αναδρομική σχέση ανάμεσα στον γενικό όρο της ακολουθίας και στον μεθεπόμενο όρο της:

$$x_{n+2} = 1 + \frac{6}{x_{n+1}} = 1 + \frac{6}{1+\frac{6}{x_n}} = 1 + \frac{6x_n}{x_n+6} = \frac{7x_n+6}{x_n+6}.$$

Άρα για την υπακολουθία των περιττών δεικτών ισχύει

$$x_{2k+1} = \frac{7x_{2k-1}+6}{x_{2k-1}+6}.$$

Μπορούμε να απλοποιήσουμε λίγο τα σύμβολα ορίζοντας

$$y_k = x_{2k-1}.$$

Δηλαδή $y_1 = x_1$, $y_2 = x_3$, $y_3 = x_5$, $y_4 = x_7$ και ούτω καθ' εξής. Οπότε είναι $0 < y_1 < 3$ και ο τελευταίος αναδρομικός τύπος γράφεται

$$y_{k+1} = \frac{7y_k+6}{y_k+6}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η (y_k) είναι γνησίως αύξουσα και ότι $y_k \to 3$.
Τώρα, χρησιμοποιώντας το ότι $y_k = x_{2k-1} > 0$, έχουμε ότι

$$y_k < y_{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad y_k < \frac{7y_k+6}{y_k+6} \quad \Leftrightarrow \quad (y_k-3)(y_k+2) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_k < 3.$$

Τώρα θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι ισχύει $y_k < 3$ για κάθε k και έτσι θα προκύψει και ότι η (y_k) είναι άνω φραγμένη αλλά και ότι είναι γνησίως αύξουσα. Είναι $y_1 < 3$ και αν υποθέσουμε ότι ισχύει $y_k < 3$ για κάποιο k τότε εύκολα προκύπτει αλγεβρικά ότι

$$y_{k+1} = \frac{7y_k+6}{y_k+6} < 3.$$

Αφού λοιπόν η (y_k) είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, συνεπάγεται ότι συγκλίνει: $y_k \to y$ για κάποιον αριθμό y. Παίρνοντας όρια στον αναδρομικό τύπο, βρίσκουμε

$$y = \frac{7y+6}{y+6}$$

και άρα $y = -2$ ή $y = 3$. Η περίπτωση $y = -2$ αποκλείεται διότι όλοι οι όροι της (y_k) είναι θετικοί. Άρα $y_k \to 3$, δηλαδή

$$x_{2k-1} \to 3.$$

Για την υπακολουθία των άρτιων δεικτών ισχύει

$$x_{2k+2} = \frac{7x_{2k}+6}{x_{2k}+6}.$$

Πάλι για απλούστευση ορίζουμε

$$y_k = x_{2k}.$$

Δηλαδή $y_1 = x_2$, $y_2 = x_4$, $y_3 = x_6$, $y_4 = x_8$ και ούτω καθ' εξής.
Τώρα, από $0 < x_1 < 3$ και από $x_2 = 1 + \frac{6}{x_1}$ προκύπτει εύκολα ότι $3 < x_2$. Οπότε είναι $3 < y_1$ και ο τελευταίος αναδρομικός τύπος γράφεται

$$y_{k+1} = \frac{7y_k+6}{y_k+6}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η (y_k) είναι γνησίως φθίνουσα και ότι $y_k \to 3$.
Όπως πριν, έχουμε ότι

$$y_k > y_{k+1} \quad \Leftrightarrow \quad y_k > \frac{7y_k+6}{y_k+6} \quad \Leftrightarrow \quad (y_k-3)(y_k+2) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_k > 3.$$

Τώρα θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι ισχύει $y_k > 3$ για κάθε k οπότε η (y_k) είναι κάτω φραγμένη αλλά και γνησίως φθίνουσα. Είναι $y_1 > 3$ και αν υποθέσουμε ότι ισχύει $y_k > 3$ για κάποιο k τότε

$$y_{k+1} = \tfrac{7y_k+6}{y_k+6} > 3.$$

Άρα η (y_k) είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη οπότε συγκλίνει: $y_k \to y$ για κάποιον αριθμό y. Παίρνοντας πάλι όρια στον αναδρομικό τύπο, βρίσκουμε $y = \frac{7y+6}{y+6}$ και άρα $y = -2$ ή $y = 3$. Πάλι η περίπτωση $y = -2$ αποκλείεται διότι όλοι οι όροι της (y_k) είναι θετικοί και άρα $y_k \to 3$, δηλαδή

$$x_{2k} \to 3.$$

Από $x_{2k-1} \to 3$ και $x_{2k} \to 3$ συνεπάγεται $x_n \to 3$.

(ii) Αν $x_1 > 3$ τότε, επαναλαμβάνοντας τα προηγούμενα, βλέπουμε ότι η υπακολουθία (x_{2k-1}) είναι γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη και η (x_{2k}) είναι γνησίως αύξουσα και άνω φραγμένη και ότι $x_n \to 3$. $\square$

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

43. *Παρατηρήστε ότι τα παρακάτω όρια δεν έχουν νόημα. Προσέξτε: δεν εξετάζουμε αν τα όρια υπάρχουν ή ποιά είναι η τιμή τους. Εξετάζουμε αν έχουν νόημα.*

$$\lim_{x\to 0-} \log\tfrac{1}{x}, \quad \lim_{x\to 0-} x^{\sqrt{3}}, \quad \lim_{x\to 1} \tfrac{1}{\sqrt{x^2-3x}}, \quad \lim_{x\to 1} \sqrt[4]{(x^2-2x+1)(1-2x^2)}, \quad \lim_{x\to 1+} \sqrt{\tfrac{1-x}{1+x}}.$$

Λύση. (i) Το πεδίο ορισμού της $\log\frac{1}{x}$ είναι το $(0,+\infty)$ οπότε δεν μπορούμε να προσεγγίσουμε το 0 από αριστερά του με στοιχεία x του πεδίου ορισμού (ώστε να ορίζεται το $\log\frac{1}{x}$) διαφορετικά από το 0. Άρα το όριο $\lim_{x\to 0-}\log\frac{1}{x}$ δεν έχει νόημα.

(ii) Η συνάρτηση $x^{\sqrt{3}}$ δεν ορίζεται για $x<0$ οπότε το x δεν μπορεί να πλησιάσει το 0 από αριστερά του μέσα από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Άρα δεν έχει νόημα το $\lim_{x\to 0-} x^{\sqrt{3}}$.

(iii) Το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$ είναι το $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ οπότε δεν μπορούμε να προσεγγίσουμε το 1 με στοιχεία x του πεδίου ορισμού διαφορετικά από το 1. Άρα το όριο $\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x^2-3x}}$ δεν έχει νόημα.

(iv) Το πεδίο ορισμού της $\sqrt[4]{(x^2-2x+1)(1-2x^2)}$ είναι το $[-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}]\cup\{1\}$. Άρα το x δεν μπορεί να πλησιάσει το 1 και να είναι $\neq 1$ μέσα από το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Άρα το όριο $\lim_{x\to 1}\sqrt[4]{(x^2-2x+1)(1-2x^2)}$ δεν έχει νόημα.

(v) Επειδή $\frac{1-x}{1+x}<0$ για $x>1$, το x δεν μπορεί να πλησιάσει το 1 από δεξιά του και να είναι μέσα στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Άρα το όριο $\lim_{x\to 1+}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ δεν έχει νόημα. □

44. *Αποδείξτε βάσει των ορισμών ότι*

$$\lim_{x\to 2}(2x+4)=8, \quad \lim_{x\to 2}\log x=\log 2, \quad \lim_{x\to 1+}\tfrac{1}{1-x}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty, \quad \lim_{x\to 0+}\log x=-\infty, \quad \lim_{x\to-\infty}\tfrac{x-3}{2x+1}=\tfrac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 1}\tfrac{1}{x+1}=\tfrac{1}{2}.$$

Λύση. (i) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon>0$ και πρέπει να βρούμε $\delta>0$ ώστε:

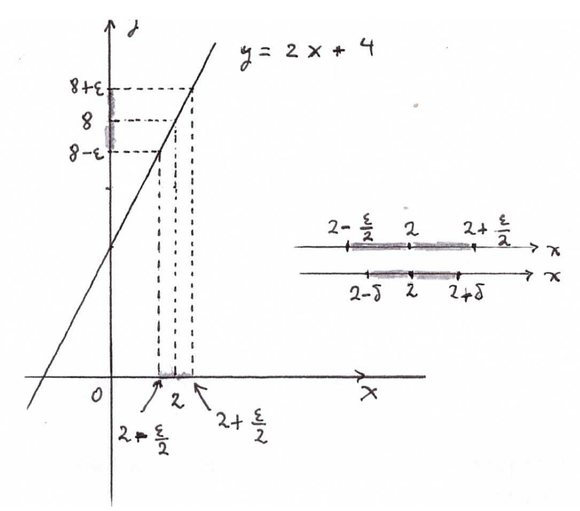
$$0<|x-2|<\delta \quad\Rightarrow\quad |(2x+4)-8|<\epsilon.$$

Λύνουμε την $|(2x+4)-8|<\epsilon$ ως προς το x:

$$|(2x+4)-8|<\epsilon \quad\Leftrightarrow\quad |2x-4|<\epsilon \quad\Leftrightarrow\quad |x-2|<\tfrac{\epsilon}{2}.$$

Τώρα είναι προφανές ότι αν πάρουμε οποιοδήποτε δ το οποίο ικανοποιεί την $0<\delta\le\frac{\epsilon}{2}$ τότε:

$$0<|x-2|<\delta \quad\Rightarrow\quad |x-2|\le\tfrac{\epsilon}{2} \quad\Rightarrow\quad |(2x+4)-8|<\epsilon.$$



Στο σχήμα φαίνεται πώς βρίσκουμε $\delta > 0$ το οποίο αντιστοιχεί στο $\epsilon > 0$ χρησιμοποιώντας το γράφημα της συνάρτησης. Σημειώνουμε στον y-άξονα το διάστημα $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$ μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y = 2x + 4$. Με την βοήθεια του γραφήματος βλέπουμε ότι αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(2 - \frac{\epsilon}{2}, 2 + \frac{\epsilon}{2})$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = 2x + 4$ βρίσκεται στο $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$. Επομένως, αν πάρουμε οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{2}$, τότε το διάστημα $(2-\delta, 2+\delta)$ περιέχεται στο $(2 - \frac{\epsilon}{2}, 2 + \frac{\epsilon}{2})$ και επομένως αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(2-\delta, 2+\delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = 2x + 4$ βρίσκεται στο $(8-\epsilon, 8+\epsilon)$.

(ii) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ ώστε:

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\log x - \log 2| < \epsilon.$$

Λύνουμε την $|\log x - \log 2| < \epsilon$ ως προς το x:

$$|\log x - \log 2| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \log 2 - \epsilon < \log x < \log 2 + \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad 2e^{-\epsilon} < x < 2e^{\epsilon}.$$

Ο αριθμός 2 είναι ανάμεσα στους $2e^{-\epsilon}$ και $2e^{\epsilon}$:

$$2e^{-\epsilon} < 2 < 2e^{\epsilon}.$$

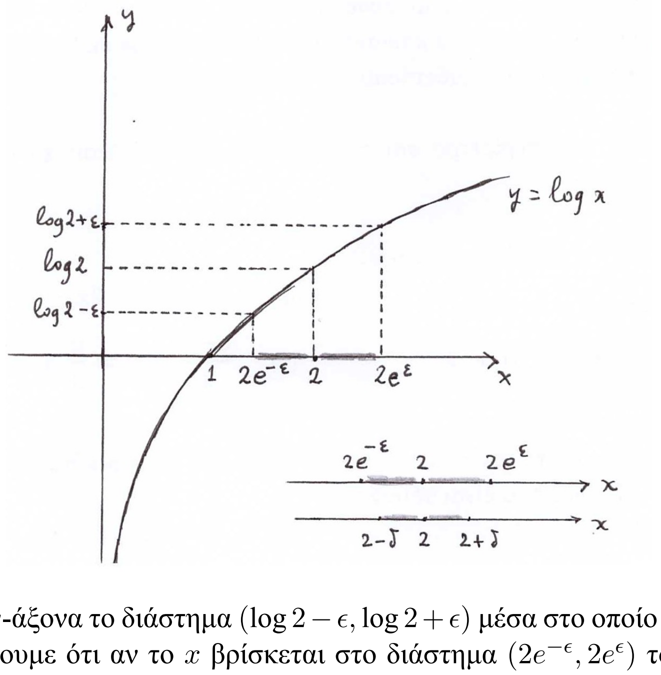
Η απόσταση του 2 από το $2e^{\epsilon}$ είναι ίση με $2e^{\epsilon} - 2$ και η απόστασή του από το $2e^{-\epsilon}$ είναι ίση με $2 - 2e^{-\epsilon}$. Η μικρότερη από τις δύο αποστάσεις είναι η δεύτερη:

$$2 - 2e^{-\epsilon} < 2e^{\epsilon} - 2.$$

Αυτό μπορείτε να το αποδείξετε πολύ εύκολα. (Να ορίσετε $t = e^{\epsilon}$. Τότε $t > 1$ και η ανισότητα γράφεται $t + \frac{1}{t} > 2$ και καταλήγει στην $(t-1)^2$.)
Δηλαδή το κοντινότερο στο 2 από τα $2e^{-\epsilon}$ και $2e^{\epsilon}$ είναι το πρώτο. Τώρα είναι προφανές ότι αν πάρουμε οποιοδήποτε δ το οποίο ικανοποιεί την $0 < \delta \leq 2 - 2e^{-\epsilon}$ τότε:

$$0 < |x - 2| < \delta \quad \Rightarrow \quad 2e^{-\epsilon} < x < 2e^{\epsilon} \quad \Rightarrow \quad |\log x - \log 2| < \epsilon.$$

Στο ακόλουθο σχήμα βρίσκουμε, μέσω του γραφήματος της συνάρτησης, $\delta > 0$ το οποίο αντιστοιχεί στο $\epsilon > 0$.



Σημειώνουμε στον y-άξονα το διάστημα $(\log 2 - \epsilon, \log 2 + \epsilon)$ μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y = \log x$. Βλέπουμε ότι αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(2e^{-\epsilon}, 2e^{\epsilon})$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \log x$ βρίσκεται στο $(\log 2 - \epsilon, \log 2 + \epsilon)$. Το διάστημα $(2e^{-\epsilon}, 2e^{\epsilon})$ δεν είναι συμμετρικό ως προς το 2. Το κοντινότερο προς το 2 άκρο του διαστήματος είναι το $2e^{-\epsilon}$. Άρα αν πάρουμε οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq 2 - 2e^{-\epsilon}$ τότε το διάστημα $(2-\delta, 2+\delta)$ περιέχεται στο $(2e^{-\epsilon}, 2e^{\epsilon})$ και επομένως αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(2-\delta, 2+\delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \log x$ βρίσκεται στο $(\log 2 - \epsilon, \log 2 + \epsilon)$.

(iii) Παίρνουμε τυχαίο $M > 0$ και πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ ώστε:

$$1 < x < 1 + \delta \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{1-x} < -M.$$

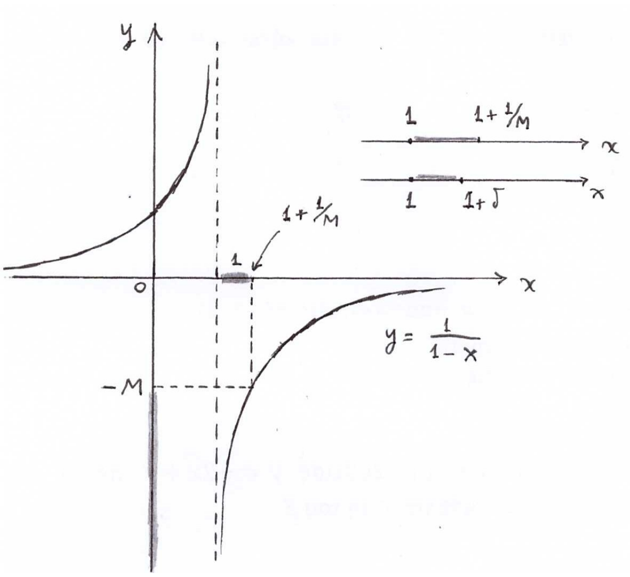
Λύνουμε την $\frac{1}{1-x} < -M$ ως προς το x:

$$\tfrac{1}{1-x} < -M \quad \Leftrightarrow \quad -\tfrac{1}{M} < 1 - x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < x < 1 + \tfrac{1}{M}.$$

Τώρα είναι προφανές ότι αν πάρουμε οποιοδήποτε δ το οποίο ικανοποιεί την $0 < \delta \leq \frac{1}{M}$ τότε:

$$1 < x < 1 + \delta \quad \Rightarrow \quad 1 < x < 1 + \tfrac{1}{M} \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{1-x} < -M.$$

Όπως στα προηγούμενα θέματα βρίσκουμε, με το γράφημα της συνάρτησης, $\delta > 0$ το οποίο αντιστοιχεί στο $M > 0$.



Σημειώνουμε στον y-άξονα το διάστημα $(-\infty, -M)$ μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y = \frac{1}{1-x}$. Τώρα αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(1, 1+\frac{1}{M})$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \frac{1}{1-x}$ βρίσκεται στο $(-\infty, -M)$. Άρα αν πάρουμε οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq \frac{1}{M}$ τότε το διάστημα $(1, 1+\delta)$ περιέχεται στο $(1, 1+\frac{1}{M})$ και επομένως αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(1, 1+\delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \frac{1}{1-x}$ βρίσκεται στο $(-\infty, -M)$.

(iv) Παίρνουμε τυχαίο $M > 0$ και πρέπει να βρούμε $N > 0$ ώστε:

$$x > N \quad \Rightarrow \quad e^x > M.$$

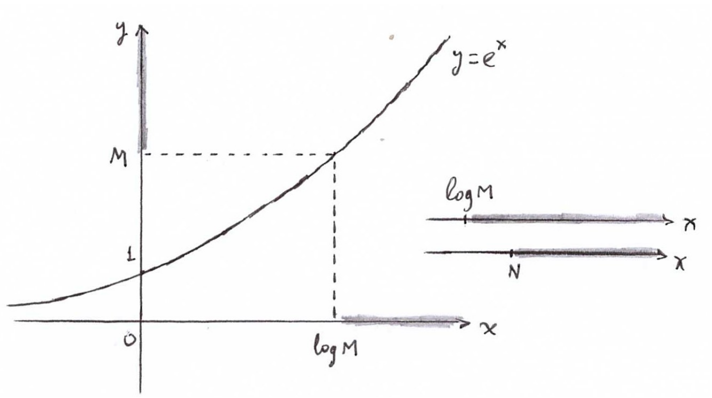
Λύνουμε την $e^x > M$ ως προς το x:

$$e^x > M \quad \Leftrightarrow \quad x > \log M.$$

Τώρα παίρνουμε οποιοδήποτε N το οποίο ικανοποιεί την $N \geq \begin{cases} \log M, & \text{αν } M > 1 \\ 1, & \text{αν } 0 < M \leq 1 \end{cases}$ Ένα τέτοιο N είναι > 0 και:

$$x > N \quad \Rightarrow \quad x > \log M \quad \Rightarrow \quad e^x > M.$$

Στο σχήμα βλέπουμε την λύση με την βοήθεια του γραφήματος της συνάρτησης.



Σημειώνουμε στον y-άξονα το διάστημα $(M, +\infty)$ μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y = e^x$. Παρατηρούμε ότι αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(\log M, +\infty)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = e^x$ βρίσκεται στο $(M, +\infty)$. Επομένως αν πάρουμε οποιοδήποτε $N > 0$ με $N \geq \log M$ τότε το $(N, +\infty)$ περιέχεται στο $(\log M, +\infty)$ οπότε αν το x βρίσκεται στο $(N, +\infty)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = e^x$ βρίσκεται στο $(M, +\infty)$.

(v) Παίρνουμε τυχαίο $M > 0$ και πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ ώστε:

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad \log x < -M.$$

Λύνουμε την $\log x < -M$ ως προς το x:

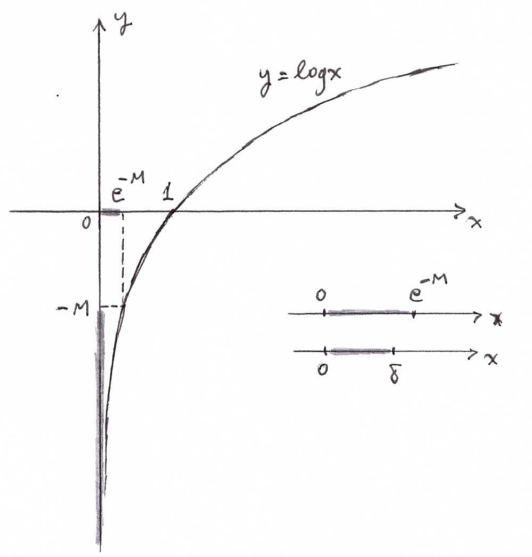
$$\log x < -M \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x < e^{-M}.$$

Άρα αν πάρουμε οποιοδήποτε δ που ικανοποιεί την $0 < \delta \leq e^{-M}$ τότε:

$$0 < x < \delta \quad \Rightarrow \quad 0 < x < e^{-M} \quad \Rightarrow \quad \log x < -M.$$

Να και η λύση μέσω του γραφήματος της συνάρτησης.

Σημειώνουμε στον y-άξονα το διάστημα $(-\infty, -M)$ μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y = \log x$. Παρατηρούμε ότι αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(0, e^{-M})$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \log x$ βρίσκεται στο $(-\infty, -M)$. Επομένως αν πάρουμε οποιοδήποτε $\delta > 0$ με $\delta \leq e^{-M}$ τότε το $(0, \delta)$ περιέχεται στο $(0, e^{-M})$ οπότε αν το x βρίσκεται στο $(0, \delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \log x$ βρίσκεται στο $(-\infty, -M)$.



(vi) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και πρέπει να βρούμε $N > 0$ ώστε:

$$x < -N \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac{x-3}{2x+1} - \tfrac{1}{2}\right| < \epsilon.$$

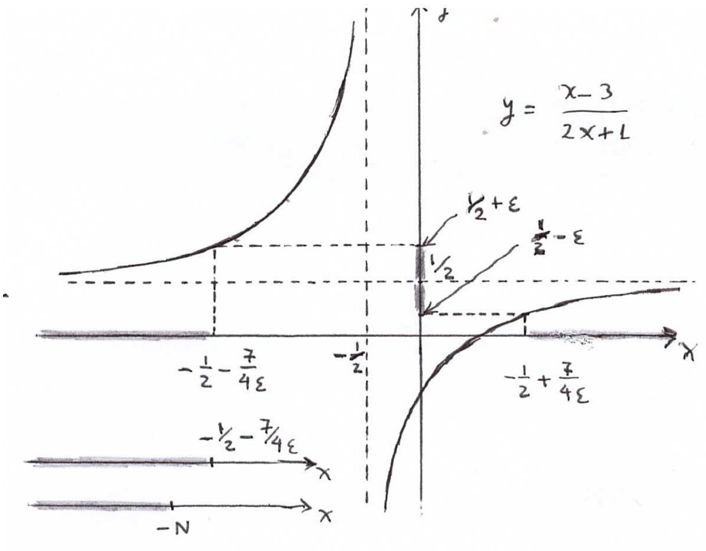
Λύνουμε την $|\frac{x-3}{2x+1} - \frac{1}{2}| < \epsilon$ ως προς το x:

$$\begin{aligned} \left|\tfrac{x-3}{2x+1} - \tfrac{1}{2}\right| < \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{7}{2|2x+1|} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |2x+1| > \tfrac{7}{2\epsilon} \\ &\Leftrightarrow \quad 2x+1 < -\tfrac{7}{2\epsilon} \quad \text{ή} \quad \tfrac{7}{2\epsilon} < 2x+1 \\ &\Leftrightarrow \quad x < -\tfrac{1}{2} - \tfrac{7}{4\epsilon} \quad \text{ή} \quad -\tfrac{1}{2} + \tfrac{7}{4\epsilon} < x. \end{aligned}$$

Άρα αν πάρουμε οποιοδήποτε $N \geq \frac{1}{2} + \frac{7}{4\epsilon}$ τότε:

$$x < -N \quad \Rightarrow \quad x < -\tfrac{1}{2} - \tfrac{7}{4\epsilon} \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac{x-3}{2x+1} - \tfrac{1}{2}\right| < \epsilon.$$

Ας λύσουμε το πρόβλημα και μέσω του γραφήματος της συνάρτησης.



Σημειώνουμε στον y-άξονα το διάστημα $(\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon)$ μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y = \frac{x-3}{2x+1}$. Τώρα, αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(-\infty, -\frac{1}{2} - \frac{7}{4\epsilon})$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \frac{x-3}{2x+1}$ βρίσκεται στο $(\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon)$ και μάλιστα στο μικρότερο διάστημα $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \epsilon)$. (Επίσης, αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(-\frac{1}{2} + \frac{7}{4\epsilon}, +\infty)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \frac{x-3}{2x+1}$ βρίσκεται στο $(\frac{1}{2}-\epsilon, \frac{1}{2})$ και άρα στο $(\frac{1}{2}-\epsilon, \frac{1}{2}+\epsilon)$. Όμως θα αγνοήσουμε το $(-\frac{1}{2}+\frac{7}{4\epsilon}, +\infty)$, αφού μας ενδιαφέρει διάστημα της μορφής $(-\infty, -N)$). Επομένως αν πάρουμε οποιοδήποτε $N > 0$ με $N \geq \frac{1}{2} + \frac{7}{4\epsilon}$ τότε το $(-\infty, -N)$ περιέχεται στο $(-\infty, -\frac{1}{2} - \frac{7}{4\epsilon})$ και άρα αν το x βρίσκεται στο $(-\infty, -N)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \frac{x-3}{2x+1}$ βρίσκεται στο $(\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon)$.

(vii) Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ ώστε:

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac{1}{x+1} - \tfrac{1}{2}\right| < \epsilon.$$

Προσπαθούμε να λύσουμε την $|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}| < \epsilon$ ως προς το x:

$$\left|\tfrac{1}{x+1} - \tfrac{1}{2}\right| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{|x-1|}{2|x+1|} < \epsilon.$$

Αν και είναι δυνατό να συνεχίσουμε την επίλυση της ανισότητας με αλγεβρικό τρόπο (θα το κάνουμε στο τέλος όταν δούμε την λύση μέσω του γραφήματος της συνάρτησης), οι πράξεις είναι αρκετά άβολες οπότε κάνουμε κάτι διαφορετικό: θα προσπαθήσουμε να βρούμε έναν αριθμό $M > 0$ ώστε να ισχύει

$$\tfrac{1}{2|x+1|} \leq M \qquad \text{για } x \text{ κοντά στο } 1.$$

Με άλλα λόγια, προσπαθούμε να φράξουμε το $\frac{1}{2|x+1|}$ από πάνω. Αυτό μπορούμε να το πετύχουμε αρκεί να μην επιτρέψουμε στο x να πλησιάσει το -1. Επειδή το x πρέπει να είναι κοντά στο 1, επιλέγουμε μία απόσταση μικρότερη από την απόσταση του 1 από το -1 (η οποία είναι ίση με 2), για παράδειγμα την απόσταση 1 και περιορίζουμε το x να βρίσκεται σε απόσταση μικρότερη από 1 από το σημείο 1:

$$0 < |x-1| < 1.$$

Μετρώντας αποστάσεις, βλέπουμε εύκολα ότι

$$0 < |x-1| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x+1| > 1 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2|x+1|} < \tfrac{1}{2}.$$

Άρα

$$0 < |x-1| < 1 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{|x-1|}{2|x+1|} < \tfrac{|x-1|}{2}.$$

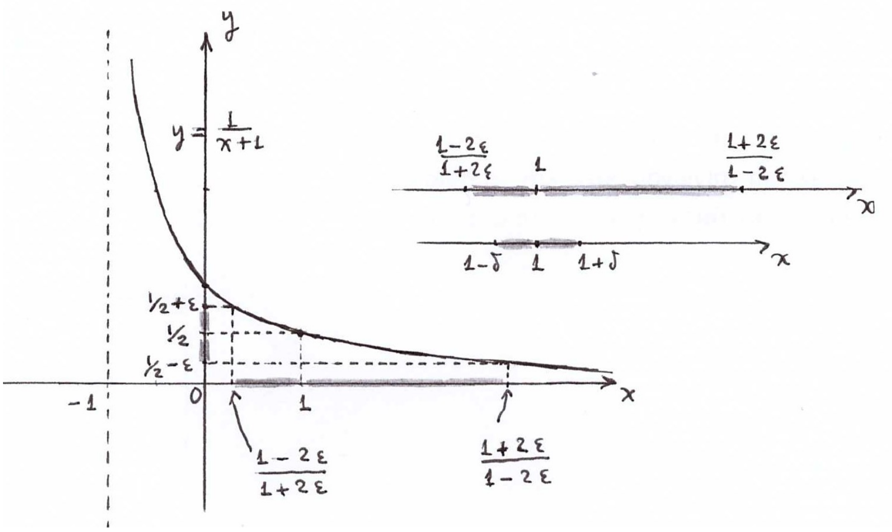
Τώρα αντί να λύσουμε την $\frac{|x-1|}{2|x+1|} < \epsilon$ λύνουμε την απλούστερη $\frac{|x-1|}{2} < \epsilon$:

$$\tfrac{|x-1|}{2} < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| < 2\epsilon.$$

Έχουμε, λοιπόν, ότι αν επιλέξουμε οποιοδήποτε δ το οποίο ικανοποιεί την $0 < \delta \leq \min\{1, 2\epsilon\}$, δηλαδή το δ είναι μικρότερο από το 1 και από το 2ϵ, τότε:

$$\begin{aligned} 0 < |x-1| < \delta \quad &\Rightarrow \quad 0 < |x-1| < 1 \quad \text{και} \quad 0 < |x-1| < 2\epsilon \\ &\Rightarrow \quad \tfrac{|x-1|}{2|x+1|} < \tfrac{|x-1|}{2} \quad \text{και} \quad 0 < |x-1| < 2\epsilon \\ &\Rightarrow \quad \tfrac{|x-1|}{2|x+1|} < \tfrac{|x-1|}{2} \quad \text{και} \quad \tfrac{|x-1|}{2} < \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \tfrac{|x-1|}{2|x+1|} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\tfrac{1}{x+1} - \tfrac{1}{2}\right| < \epsilon. \end{aligned}$$

Και τώρα θα δούμε την λύση με την βοήθεια του γραφήματος της συνάρτησης. Σημειώνουμε στον y-άξονα το διάστημα $(\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon)$ μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y = \frac{1}{x+1}$.



Κατ' αρχάς θεωρούμε ότι $0 < \epsilon \leq \frac{1}{2}$. Βλέπουμε ότι αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(\frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}, \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon})$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \frac{1}{x+1}$ βρίσκεται στο $(\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon)$. Το $(\frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}, \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon})$ δεν είναι συμμετρικό ως προς το 1. Το κοντινότερο προς το 1 άκρο του διαστήματος είναι το $\frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}$: πράγματι, οι αποστάσεις των δύο άκρων από το 1 είναι $1 - \frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon} = \frac{4\epsilon}{1+2\epsilon}$ και $\frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon} - 1 = \frac{4\epsilon}{1-2\epsilon}$ και μικρότερη είναι η πρώτη. Άρα αν πάρουμε οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq 1 - \frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon} = \frac{4\epsilon}{1+2\epsilon}$ τότε το $(1-\delta, 1+\delta)$ περιέχεται στο $(\frac{1-2\epsilon}{1+2\epsilon}, \frac{1+2\epsilon}{1-2\epsilon})$ οπότε αν το x βρίσκεται στο $(1-\delta, 1+\delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \frac{1}{x+1}$ βρίσκεται στο $(\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon)$.

Αν $\epsilon > \frac{1}{2}$ τότε θεωρούμε οποιοδήποτε $\delta > 0$ το οποίο είναι κατάλληλο για το $\epsilon = \frac{1}{2}$, δηλαδή $0 < \delta \leq \frac{4(1/2)}{1+2(1/2)} = 1$. Τότε, με ένα τέτοιο δ, είδαμε προηγουμένως ότι αν το x βρίσκεται στο $(1-\delta, 1+\delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \frac{1}{x+1}$ βρίσκεται στο $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = (0,1)$ και άρα βρίσκεται και στο μεγαλύτερο διάστημα $(\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon)$. □

45. *Υπολογίστε βάσει του ορισμού τα πλευρικά όρια στο* 1 *της* $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{αν } x > 1 \\ \frac{x}{x-1} & \text{αν } x < 1 \end{cases}$ *και εξετάστε αν υπάρχει το όριό της στο* 1.

Λύση. Αν το x πλησιάζει το 1 από δεξιά του τότε καταλαβαίνουμε διαισθητικά ότι η παράσταση $f(x) = 2x - 1$ πλησιάζει το 1. Επομένως θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \to 1+} f(x) = 1$, δηλαδή ότι $\lim_{x \to 1+}(2x-1) = 1$. Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε:

$$1 < x < 1 + \delta \quad \Rightarrow \quad |(2x-1) - 1| < \epsilon.$$

Λύνουμε την $|(2x-1)-1| < \epsilon$ ως προς το x:

$$|(2x-1)-1| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |2x-2| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-1| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \tfrac{\epsilon}{2} < x < 1 + \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Είναι προφανές ότι αν πάρουμε οποιοδήποτε δ το οποίο ικανοποιεί την $0 < \delta \leq \frac{\epsilon}{2}$ τότε:

$$1 < x < 1 + \delta \quad \Rightarrow \quad 1 - \tfrac{\epsilon}{2} < x < 1 + \tfrac{\epsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad |(2x-1)-1| < \epsilon.$$

Αν το x πλησιάζει το 1 από αριστερά του τότε καταλαβαίνουμε διαισθητικά ότι η παράσταση $f(x) = \frac{x}{x-1}$ πλησιάζει το $-\infty$. Επομένως θα αποδείξουμε ότι $\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$, δηλαδή ότι $\lim_{x \to 1-} \frac{x}{x-1} = -\infty$. Παίρνουμε τυχαίο $M > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε:

$$1 - \delta < x < 1 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{x}{x-1} < -M.$$

Λύνουμε την $\frac{x}{x-1} < -M$ ως προς το x:

$$\tfrac{x}{x-1} < -M \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \tfrac{1}{x-1} < -M \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{x-1} < -M - 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \tfrac{1}{M+1} < x < 1.$$

Άρα αν πάρουμε οποιοδήποτε δ το οποίο ικανοποιεί την $0 < \delta \leq \frac{1}{M+1}$ τότε:

$$1 - \delta < x < 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - \tfrac{1}{M+1} < x < 1 \quad \Rightarrow \quad \tfrac{x}{x-1} < -M.$$

Επειδή τα δύο πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, το $\lim_{x \to 1} f(x)$ δεν υπάρχει. □

46. *Υπολογίστε τα παρακάτω όρια.*

$$\lim_{x \to 1} \tfrac{x^{12}-1}{x^2-1}, \quad \lim_{x \to 1\pm} \tfrac{1}{x^{-2}-1}, \quad \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x),$$

$$\lim_{x \to +\infty} \tfrac{e^{2x}+e^x+1}{e^x-2e^{2x}+2}, \quad \lim_{x \to 0+} (2\log^2 x + 3\log x), \quad \lim_{x \to 0\pm} \tfrac{1}{1-e^x}, \quad \lim_{x \to 1\pm} \tfrac{1}{x^a-1},$$

$$\lim_{x \to 0} \tfrac{e^{3x}-1}{e^x-1}, \quad \lim_{x \to 0+} \tfrac{\log(7x)}{\log(2x)}, \quad \lim_{x \to 1\pm} \left(\tfrac{4}{\log^2 x} - \tfrac{1}{\log^3 x}\right).$$

Λύση. (i) Απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Όμως,

$$\lim_{x \to 1} \tfrac{x^{12}-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \tfrac{(x-1)(x^{11}+\cdots+x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \tfrac{x^{11}+\cdots+x^2+x+1}{x+1} = \tfrac{12}{2} = 6.$$

(ii) Απροσδιόριστη μορφή $\frac{1}{0}$. Όμως,

$$\lim_{x \to 1\pm} \tfrac{1}{x^{-2}-1} = \lim_{x \to 1\pm} \tfrac{x^2}{1-x^2} = \lim_{x \to 1\pm} \tfrac{x^2}{(1-x)(1+x)} = \mp\infty.$$

(iii) Απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$. Όμως,

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{(x^2+x)-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{1}{\sqrt{1+(1/x)}+1}=\tfrac{1}{2}.$$

(iv) Απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{-\infty}$. Όμως,

$$\lim_{x\to+\infty}\tfrac{e^{2x}+e^x+1}{e^x-2e^{2x}+2}=\lim_{x\to+\infty}\tfrac{1+e^{-x}+e^{-2x}}{e^{-x}-2+2e^{-2x}}=-\tfrac{1}{2}.$$

(v) Απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)+(-\infty)$. Όμως:

$$\lim_{x\to0+}(2\log^2 x+3\log x)=\lim_{x\to0+}\log^2 x(2+\tfrac{3}{\log x})=(-\infty)^2(2+0)=+\infty.$$

(vi) Απροσδιόριστη μορφή $\frac{1}{0}$. Όμως,

$$\lim_{x\to0+}\tfrac{1}{1-e^x}=-\infty$$

διότι $\lim_{x\to0+}(1-e^x)=0$ και $1-e^x<0$ για $x>0$. Επίσης,

$$\lim_{x\to0-}\tfrac{1}{1-e^x}=+\infty$$

διότι $\lim_{x\to0-}(1-e^x)=0$ και $1-e^x>0$ για $x<0$.
(vii) Απροσδιόριστη μορφή $\frac{1}{0}$.
Αν $a>0$ τότε

$$\lim_{x\to1+}\tfrac{1}{x^a-1}=+\infty$$

διότι $\lim_{x\to1+}(x^a-1)=0$ και $x^a-1>0$ για $x>1$ και, επίσης,

$$\lim_{x\to1-}\tfrac{1}{x^a-1}=-\infty$$

διότι $\lim_{x\to1-}(x^a-1)=0$ και $x^a-1<0$ για $0<x<1$.
Αν $a<0$ τότε

$$\lim_{x\to1+}\tfrac{1}{x^a-1}=-\infty$$

διότι $\lim_{x\to1+}(x^a-1)=0$ και $x^a-1<0$ για $x>1$ και, επίσης,

$$\lim_{x\to1-}\tfrac{1}{x^a-1}=+\infty$$

διότι $\lim_{x\to1-}(x^a-1)=0$ και $x^a-1>0$ για $0<x<1$.
(viii) Απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Όμως,

$$\lim_{x\to0}\tfrac{e^{3x}-1}{e^x-1}=\lim_{x\to0}(e^{2x}+e^x+1)=3.$$

(ix) Απροσδιόριστη μορφή $\frac{-\infty}{-\infty}$. Όμως,

$$\lim_{x\to0+}\tfrac{\log(7x)}{\log(2x)}=\lim_{x\to0+}\tfrac{\log x+\log 7}{\log x+\log 2}=\lim_{x\to0+}\tfrac{1+(\log 7/\log x)}{1+(\log 2/\log x)}=1.$$

(x) Απροσδιόριστες μορφές $\frac{1}{0}$. Στην περίπτωση $x\to1+$, επιπλέον απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$. Όμως,

$$\lim_{x\to1-}\big(\tfrac{4}{\log^2 x}-\tfrac{1}{\log^3 x}\big)=(+\infty)-(-\infty)=+\infty$$

διότι $\lim_{x\to1-}\log x=0$ και $\log x<0$ για $0<x<1$. Επίσης,

$$\lim_{x\to1+}\big(\tfrac{4}{\log^2 x}-\tfrac{1}{\log^3 x}\big)=\lim_{x\to1+}\tfrac{1}{\log^3 x}(4\log x-1)=(+\infty)(0-1)=-\infty$$

διότι $\lim_{x\to1+}\log x=0$ και $\log x>0$ για $x>1$. □

47. *Αποδείξτε ότι* $\lim_{x\to-\infty}[\frac{1}{x}] = -1$ *και* $\lim_{x\to+\infty}[\frac{1}{x}] = 0$.

Λύση. Αν $x \leq -1$ τότε ισχύει $-1 \leq \frac{1}{x} < 0$ και άρα $[\frac{1}{x}] = -1$. Δηλαδή η συνάρτηση $[\frac{1}{x}]$ είναι σταθερή -1 κοντά στο $-\infty$ και άρα

$$\lim_{x\to-\infty} \left[\tfrac{1}{x}\right] = -1.$$

Αν $x > 1$ τότε ισχύει $0 < \frac{1}{x} < 1$ και άρα $[\frac{1}{x}] = 0$. Δηλαδή η συνάρτηση $[\frac{1}{x}]$ είναι σταθερή 0 κοντά στο $+\infty$ και άρα

$$\lim_{x\to+\infty} \left[\tfrac{1}{x}\right] = 0.$$

□

48. *Εφαρμόστε τον πρώτο κανόνα αλλαγής μεταβλητής για να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια.*

$$\lim_{x\to0+} \tfrac{(\sqrt{x}+3)^5}{(\sqrt{x}+3)^4+(\sqrt{x}+3)^8+2}, \quad \lim_{x\to0\pm} \left(\left(\tfrac{1}{x^3} - x^2\right)^2 + \left(\tfrac{1}{x^3} - x^2\right)\right)^3, \quad \lim_{x\to0\pm} \tfrac{e^{\frac{2}{x}}-e^{\frac{1}{x}}-1}{3e^{\frac{2}{x}}-e^{\frac{1}{x}}-2},$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log \tfrac{e^x}{e^{3x}+e^x+1}, \quad \lim_{x\to0+} \tfrac{\log(2x)}{\log^2(3x)}, \quad \lim_{x\to0+} \log \tfrac{3-2\log x}{2+\log^2 x},$$

$$\lim_{x\to-\pi} \tfrac{\sin x}{x+\pi}, \quad \lim_{x\to\pm\infty} x \sin \tfrac{1}{x}, \quad \lim_{x\to+\infty} e^{1/x^2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \sin \tfrac{1}{\sqrt{x}}.$$

Λύση. (i) Γράφουμε $f(x) = \sqrt{x} + 3$ και $g(y) = \frac{y^5}{y^4+y^8+2}$.
Τότε $\lim_{x\to0+} f(x) = 3$ και είναι $f(x) > 3$ για $x > 0$. Έτσι

$$\lim_{x\to0+} \tfrac{(\sqrt{x}+3)^5}{(\sqrt{x}+3)^4+(\sqrt{x}+3)^8+2} = \lim_{x\to0+} g(f(x)) = \lim_{y\to3+} g(y) = \tfrac{3^5}{3^4+3^8+2} = \tfrac{243}{6644}.$$

(ii) Γράφουμε $f(x) = \frac{1}{x^3} - x^2$ και $g(y) = (y^2 + y)^3 = y^6(1 + \frac{1}{y})^3$.
Τότε $\lim_{x\to0\pm} f(x) = \pm\infty$ και φυσικά είναι $f(x) \neq -\infty$ για x κοντά στο 0 από αριστερά του και $f(x) \neq +\infty$ για x κοντά στο 0 από δεξιά του. Από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to0\pm} \left(\left(\tfrac{1}{x^3} - x^2\right)^2 + \left(\tfrac{1}{x^3} - x^2\right)\right)^3 = \lim_{x\to0\pm} g(f(x)) = \lim_{y\to\pm\infty} g(y) = +\infty.$$

(iii) Γράφουμε $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(y) = \frac{e^{2y}-e^y-1}{3e^{2y}-e^y-2}$.
Τότε $\lim_{x\to0-} f(x) = -\infty$ οπότε από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to0-} \tfrac{e^{\frac{2}{x}}-e^{\frac{1}{x}}-1}{3e^{\frac{2}{x}}-e^{\frac{1}{x}}-2} = \lim_{x\to0-} g(f(x)) = \lim_{y\to-\infty} g(y) = \lim_{y\to-\infty} \tfrac{e^{2y}-e^y-1}{3e^{2y}-e^y-2} = \tfrac{0-0-1}{3\cdot0-0-2} = \tfrac{1}{2}.$$

Επίσης, $\lim_{x\to0+} f(x) = +\infty$ οπότε από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+} \tfrac{e^{\frac{2}{x}}-e^{\frac{1}{x}}-1}{3e^{\frac{2}{x}}-e^{\frac{1}{x}}-2} &= \lim_{x\to0+} g(f(x)) = \lim_{y\to+\infty} g(y) = \lim_{y\to+\infty} \tfrac{e^{2y}-e^y-1}{3e^{2y}-e^y-2} \\ &= \lim_{y\to+\infty} \tfrac{1-e^{-y}-e^{-2y}}{3-e^{-y}-2e^{-2y}} = \tfrac{1}{3}.\end{aligned}$$

(iv) Γράφουμε $f(x) = \frac{e^x}{e^{3x}+e^x+1}$ και $g(y) = \log y$.
Τότε

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \tfrac{e^x}{e^{3x}+e^x+1} = \tfrac{0}{0+0+1} = 0$$

και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}+e^{-3x}} = \tfrac{0}{1+0+0} = 0$$

και είναι $f(x) > 0$ για x κοντά στο $-\infty$ και κοντά στο $+\infty$. Από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log \tfrac{e^x}{e^{3x}+e^x+1} = \lim_{x\to\pm\infty} g(f(x)) = \lim_{y\to0+} g(y) = -\infty.$$

(v) Είναι $\frac{\log(2x)}{\log^2(3x)} = \frac{\log x+\log 2}{(\log x+\log 3)^2}$ οπότε γράφουμε $f(x) = \log x$ και $g(y) = \frac{y+\log 2}{(y+\log 3)^2}$. Τότε $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$ οπότε από τον πρώτο κανόνα έχουμε

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\log(2x)}{\log^2(3x)} = \lim_{x\to 0+} g(f(x)) = \lim_{y\to -\infty} g(y) = \lim_{y\to -\infty} \frac{1+\frac{\log 2}{y}}{y\left(1+\frac{\log 3}{y}\right)^2} = 0.$$

(vi) Γράφουμε $f(x) = \frac{3-2\log x}{2+\log^2 x}$ και $g(y) = \log y$.
Τότε

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{3}{\log x}-2}{\log x\left(\frac{2}{\log^2 x}+1\right)} = \frac{0-2}{(-\infty)(0+1)} = 0$$

και είναι $f(x) > 0$ για x κοντά στο 0 από δεξιά του. Από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0+} \log \frac{3-2\log x}{2+\log^2 x} = \lim_{x\to 0+} g(f(x)) = \lim_{y\to 0+} g(y) = -\infty.$$

(vii) Γράφουμε $f(x) = x + \pi$ και $g(y) = \frac{\sin y}{y}$.
Τότε $\lim_{x\to -\pi} f(x) = 0$ και είναι $f(x) \neq 0$ για x κοντά στο $-\pi$. Από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to -\pi} \frac{\sin x}{x+\pi} = -\lim_{x\to -\pi} g(f(x)) = -\lim_{y\to 0} g(y) = -1.$$

(viii) Γράφουμε $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(y) = \frac{\sin y}{y}$.
Τότε $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ και είναι $f(x) \neq 0$ για x κοντά στο $-\infty$ και κοντά στο $+\infty$. Από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\pm\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} g(f(x)) = \lim_{y\to 0} g(y) = 1.$$

(ix) Γράφουμε $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(y) = e^y$.
Τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και είναι $f(x) \neq 0$ για x κοντά στο $+\infty$. Από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = \lim_{y\to 0} g(y) = 1.$$

(x) Γράφουμε $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ και $g(y) = \sin y$.
Τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και είναι $f(x) \neq 0$ για x κοντά στο $+\infty$. Από τον πρώτο κανόνα έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = \lim_{y\to 0} g(y) = 0.$$

$\square$

49. *Βρείτε τα παρακάτω όρια.*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{7/4}-x^{1/3}}{x^2+3x^{15/8}}, \quad \lim_{x\to 1\pm} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^4-x^3+x^2-1}, \quad \lim_{x\to 1\pm} \frac{x+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1},$$

$$\lim_{x\to 1\pm} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3}, \quad \lim_{x\to 0\pm} x\left[\frac{1}{x}\right], \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{[x^4]}{x^3+x^2}, \quad \lim_{x\to 0+} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{\tan(5x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-\cos(4x)}{x^2}.$$

Λύση. (i) Παραγοντοποιούμε από αριθμητή και παρονομαστή τους μεγιστοβάθμιους όρους οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{7/4}-x^{1/3}}{x^2+3x^{15/8}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{7/4}}{x^2}\,\frac{1-x^{-17/12}}{1+3x^{-1/8}} = \lim_{x\to+\infty} x^{-1/4}\,\frac{1-x^{-17/12}}{1+3x^{-1/8}} = 0\,\frac{1-0}{1+3\cdot 0} = 0.$$

(ii) Το πρώτο όριο δίνει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ οπότε παραγοντοποιούμε το $x-1$ από τους όρους του λόγου και έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 1\pm} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^4-x^3+x^2-1} = \lim_{x\to 1\pm} \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x-1)(x^3+x+1)} = \lim_{x\to 1\pm} \frac{(x+1)(x+2)}{x^3+x+1} = 2.$$

Άρα $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^4-x^3+x^2-1}=2$.
(iii) Το δεύτερο όριο δίνει απροσδιόριστη μορφή $\frac{3}{0}$ οπότε παραγοντοποιούμε το $x-1$ από τον παρονομαστή και έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 1\pm}\frac{x+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=\lim_{x\to 1\pm}\frac{x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}=+\infty.$$

Άρα $\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}=+\infty$.
(iv) Το πρώτο όριο δίνει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ οπότε παραγοντοποιούμε το $x-1$ από τους όρους του λόγου και έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 1\pm}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^5-3x^4+6x^3-10x^2+9x-3}=\lim_{x\to 1\pm}\frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)^3(x^2+3)}=\lim_{x\to 1\pm}\frac{x+1}{(x-1)(x^2+3)}=\pm\infty.$$

(v) Επειδή $\lim_{x\to 0\pm}\frac{1}{x}=\pm\infty$, θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα $a-1<[a]\le a$:

$$\frac{1}{x}-1<\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}$$

οπότε

$$1-x<x\left[\frac{1}{x}\right]\le 1 \qquad \text{για } x>0$$

και

$$1-x>x\left[\frac{1}{x}\right]\ge 1 \qquad \text{για } x<0.$$

Από τον κανόνα παρεμβολής συνεπάγεται $\lim_{x\to 0\pm}x\left[\frac{1}{x}\right]=1$.
(vi) Επειδή $x\to+\infty$ θα χρησιμοποιήσουμε όπως πριν την ανισότητα $a-1<[a]\le a$:

$$\frac{[x^4]}{x^3+x^2}>\frac{x^4-1}{x^3+x^2}.$$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-1}{x^3+x^2}=+\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to+\infty}\frac{[x^4]}{x^3+x^2}=+\infty$.
(vii) Ισχύει

$$-\sqrt{x}\le\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}\le\sqrt{x}$$

για κάθε $x>0$. Επειδή $\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}=\lim_{x\to 0+}(-\sqrt{x})=0$, από τον κανόνα παρεμβολής συνεπάγεται $\lim_{x\to 0+}\sqrt{x}\sin\frac{1}{x}=0$.
(viii) Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x}=3\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=3.$$

(ix) Επειδή

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{x}=a\lim_{x\to 0}\frac{\tan(ax)}{ax}=a\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y}=a,$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(3x)}{\tan(5x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan(3x))/x}{(\tan(5x))/x}=\frac{3}{5}.$$

(x) Είναι

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)/x^2}{(\sin x/x)^2}=\frac{1}{2}.$$

(xi) Επειδή

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{x^2}=a^2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(ax)}{(ax)^2}=a^2\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2}=\frac{a^2}{2},$$

έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(4x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(4x)}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(3x)}{x^2}=\frac{16}{2}-\frac{9}{2}=\frac{7}{2}.$$

□

50. *Έστω* $f : (3, +\infty) \to \mathbb{R}$ *και* $f(x) \neq -1$ *για κάθε* $x > 3$. *Αποδείξτε ότι* $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$ *αν και μόνο αν* $\lim_{x\to 3} \frac{2}{f(x)+1} = 1$.

Λύση. Αν $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$ τότε από απλές ιδιότητες ορίων συνεπάγεται $\lim_{x\to 3} \frac{2}{f(x)+1} = 1$. Αντιστρόφως, έστω $\lim_{x\to 3} \frac{2}{f(x)+1} = 1$. Ορίζουμε την συνάρτηση $g : (3, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \tfrac{2}{f(x)+1} \qquad \text{για κάθε } x \in (3, +\infty).$$

Τότε έχουμε

$$f(x) = \tfrac{2-g(x)}{g(x)}$$

και, πάλι από ιδιότητες ορίων, από $\lim_{x\to 3} g(x) = 1$ συνεπάγεται $\lim_{x\to 3} f(x) = 1$. □

51. *Βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες ευθείες (κατακόρυφες και πλάγιες) της* $y = \frac{x^3+x-2}{x^2-1}$.

Λύση. Ο παρονομαστής μηδενίζεται για $x = \pm 1$. Για $x \neq \pm 1$ έχουμε

$$\tfrac{x^3+x-2}{x^2-1} = \tfrac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x+1)} = \tfrac{x^2+x+2}{x+1}.$$

Άρα

$$\lim_{x\to 1} \tfrac{x^3+x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \tfrac{x^2+x+2}{x+1} = 2$$

και

$$\lim_{x\to -1\pm} \tfrac{x^3+x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to -1\pm} \tfrac{x^2+x+2}{x+1} = \pm\infty.$$

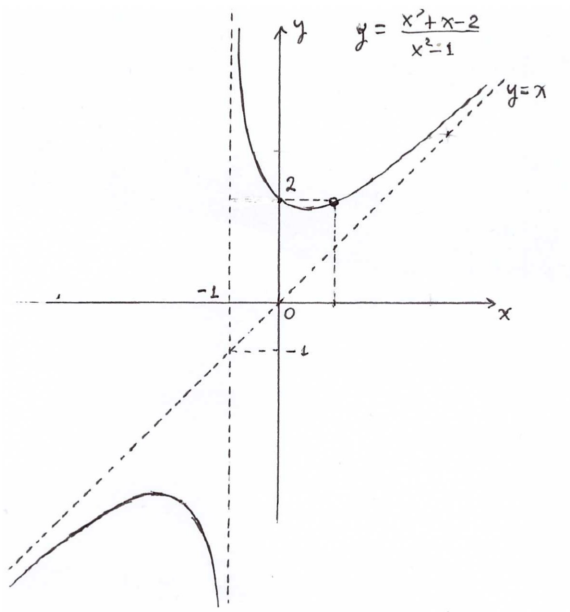
Άρα η μόνο κατακόρυφη ασύμπτωτη ευθεία είναι στο $x = -1$ (και από τις δύο μεριές του -1).
Τώρα

$$\mu = \lim_{x\to +\infty} \tfrac{x^3+x-2}{x(x^2-1)} = \tfrac{x^3+x-2}{x^3-x} = 1$$

και

$$\nu = \lim_{x\to +\infty} \left(\tfrac{x^3+x-2}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \tfrac{2x-2}{x^2-1} = 0.$$

Άρα η συνάρτηση έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη ευθεία με εξίσωση $y = x$.
Για το $-\infty$ ισχύουν οι ίδιοι υπολογισμοί και η συνάρτηση έχει στο $+\infty$ την ίδια πλάγια ασύμπτωτη ευθεία.
Να και το γράφημα της συνάρτησης:



□

52. *Αν ισχύει* $(x-1)f(x) \geq 1$ *για κάθε* $x \in (0,1) \cup (1,2)$ *βρείτε τα πλευρικά όρια της* f *στο* 1.

Λύση. Για $x \in (0,1)$ έχουμε
$$f(x) \leq \tfrac{1}{x-1}.$$
Επειδή $\lim_{x\to 1-} \frac{1}{x-1} = -\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 1-} f(x) = -\infty$.
Για $x \in (1,2)$ έχουμε
$$f(x) \geq \tfrac{1}{x-1}.$$
Επειδή $\lim_{x\to 1+} \frac{1}{x-1} = +\infty$, συνεπάγεται $\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty$. □

53. *Έστω ότι ισχύει* $f(\sqrt{x}) = 1-2f(x)^2$ *για κάθε* $x > 1$. *Αποδείξτε ότι αν το* $\lim_{x\to 1+} f(x)$ *υπάρχει και είναι αριθμός τότε οι μόνες πιθανές τιμές του είναι* $1/2$ *και* -1. *Αποδείξτε ότι δεν μπορεί να είναι* $\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty$.

Λύση. (i) Έστω $\lim_{x\to 1+} f(x) = a \in \mathbb{R}$.
Επειδή $\lim_{x\to 1+} \sqrt{x} = 1$ και επειδή ισχύει $\sqrt{x} > 1$ για $x > 1$, από τον πρώτο κανόνα αλλαγής μεταβλητής συνεπάγεται
$$\lim_{x\to 1+} f(\sqrt{x}) = \lim_{y\to 1+} f(y) = a.$$
Τώρα παίρνοντας όριο στην σχέση $f(\sqrt{x}) = 1-2f(x)^2$ όταν $x \to 1+$ βρίσκουμε
$$a = 1-2a^2.$$
Αυτή η εξίσωση έχει λύσεις $a = -1$ και $a = \frac{1}{2}$.
Μάλιστα η σταθερή συνάρτηση $f(x) = -1$ *και* ικανοποιεί την σχέση $f(\sqrt{x}) = 1-2f(x)^2$ για κάθε $x > 1$ *και* έχει όριο $\lim_{x\to 1+} f(x) = -1$. Ομοίως η σταθερή συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}$ *και* ικανοποιεί την σχέση $f(\sqrt{x}) = 1-2f(x)^2$ για κάθε $x > 1$ *και* έχει όριο $\lim_{x\to 1+} f(x) = -1$.
(ii) Έστω $\lim_{x\to 1+} f(x) = +\infty$.
Όπως στο (i), από τον πρώτο κανόνα αλλαγής μεταβλητής συνεπάγεται
$$\lim_{x\to 1+} f(\sqrt{x}) = \lim_{y\to 1+} f(y) = +\infty.$$
Παίρνοντας όριο στην σχέση $f(\sqrt{x}) = 1-2f(x)^2$ όταν $x \to 1+$ βρίσκουμε $+\infty = -\infty$ και καταλήγουμε σε άτοπο. □

54. *(i) Έστω* $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ *και ότι η* g *είναι κάτω φραγμένη κοντά στο* ξ. *Αποδείξτε ότι* $\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x)) = +\infty$.
(ii) Έστω $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ *ή* $-\infty$ *και ότι η* g *έχει θετικό κάτω φράγμα κοντά στο* ξ. *Αποδείξτε ότι* $\lim_{x\to\xi}(f(x)g(x)) = +\infty$ *ή* $-\infty$, *αντιστοίχως.*

Λύση. (i) Έστω ότι ισχύει $g(x) \geq l$ για x κοντά στο ξ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$.
Επομένως ισχύει $f(x)+g(x) \geq f(x)+l$ για x κοντά στο ξ και από το $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi}(f(x)+l) = +\infty$. Άρα $\lim_{x\to\xi}(f(x)+g(x)) = +\infty$.
(ii) Έστω ότι ισχύει $g(x) \geq l > 0$ για x κοντά στο ξ και $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$.
Από το $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ έχουμε ότι ισχύει $f(x) > 0$ για x κοντά στο ξ και άρα ισχύει $f(x)g(x) \geq f(x)l$ για x κοντά στο ξ. Από το $\lim_{x\to\xi} f(x) = +\infty$ και από $l > 0$ συνεπάγεται $\lim_{x\to\xi} f(x)l = +\infty$ και άρα $\lim_{x\to\xi} f(x)g(x) = +\infty$.
Η περίπτωση με το $-\infty$ είναι παρόμοια. □

55. *(i) Αποδείξτε ότι ισχύει* $\frac{1}{4} < \frac{3x^7-1}{3x^4+2x-1} < \frac{3}{4}$ *κοντά στο* 1.
(ii) Αποδείξτε ότι ισχύει $1-10^{-5} < \frac{x^4+26x^3+5x^2+x-4}{x^4-2x^2+x-1} < 1+10^{-5}$ *κοντά στο* $-\infty$.

Λύση. (i) Επειδή $\lim_{x\to 1}\frac{3x^7-1}{3x^4+2x-1} = \frac{1}{2}$ και επειδή $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ συνεπάγεται ότι ισχύει $\frac{1}{4} < \frac{3x^7-1}{3x^4+2x-1} < \frac{3}{4}$ κοντά στο 1.
(ii) Επειδή $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^4+26x^3+5x^2+x-4}{x^4-2x^2+x-1} = 1$ και επειδή $1-10^{-5} < 1 < 1+10^{-5}$ συνεπάγεται ότι ισχύει $1-10^{-5} < \frac{x^4+26x^3+5x^2+x-4}{x^4-2x^2+x-1} < 1+10^{-5}$ κοντά στο $-\infty$. □

56. *Αποδείξτε με χρήση κατάλληλων ακολουθιών ότι δεν υπάρχουν τα*

$$\lim_{x\to+\infty}(x-[x]), \quad \lim_{x\to-\infty}(x-[x]), \quad \lim_{x\to 0\pm}\sin\tfrac{1}{x}.$$

Λύση. (i)-(ii) Για τις ακολουθίες (x_n') και (x_n'') με τύπους $x_n' = n$ και $x_n'' = n+\frac{1}{2}$ ισχύει $x_n' \to +\infty$ και $x_n'' \to +\infty$. Όμως

$$x_n' - [x_n'] = n - [n] = n - n = 0 \to 0, \quad x_n'' - [x_n''] = n + \tfrac{1}{2} - \left[n+\tfrac{1}{2}\right] = n + \tfrac{1}{2} - n = \tfrac{1}{2} \to \tfrac{1}{2}.$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}(x-[x])$.
Με τις αντίθετες ακολουθίες προκύπτει ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to-\infty}(x-[x])$.
(iii) Για την ακολουθία (x_n') με τύπο $x_n' = \frac{1}{(\pi/2)+2n\pi}$ ισχύει $x_n' > 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $x_n' \to 0$. Επίσης για την ακολουθία (x_n'') με τύπο $x_n'' = \frac{1}{(-\pi/2)+2n\pi}$ ισχύει $x_n'' > 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $x_n'' \to 0$. Όμως

$$\sin\tfrac{1}{x_n'} = \sin(\tfrac{\pi}{2}+2n\pi) = 1 \to 1 \quad \text{και} \quad \sin\tfrac{1}{x_n''} = \sin(-\tfrac{\pi}{2}+2n\pi) = -1 \to -1.$$

Άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0+}\sin\frac{1}{x}$.
Με τις αντίθετες ακολουθίες προκύπτει ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0-}\sin\frac{1}{x}$. □

57. *Αποδείξτε τα παρακάτω όρια ακολουθιών:*

$$n\sin\tfrac{\pi}{n} \to \pi, \qquad n^2\big(1-\cos\tfrac{\pi}{n}\big) \to \tfrac{\pi^2}{2}, \qquad n\tan\tfrac{\pi}{2n} \to \tfrac{\pi}{2}.$$

Λύση. (i) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ και την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = \frac{\pi}{n}$. Ισχύει $x_n \to 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Άρα

$$n\sin\tfrac{\pi}{n} = \pi\,\tfrac{\sin(x_n)}{x_n} = \pi f(x_n) \to \pi.$$

(ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ και την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = \frac{\pi}{n}$. Ισχύει $x_n \to 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$. Άρα

$$n^2\big(1-\cos\tfrac{\pi}{n}\big) = \pi^2\,\tfrac{1-\cos(x_n)}{x_n^2} = \pi^2 f(x_n) \to \tfrac{\pi^2}{2}.$$

(iii) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ και την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = \frac{\pi}{2n}$. Ισχύει $x_n \to 0$ και $x_n \neq 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Άρα

$$n\tan\tfrac{\pi}{2n} = \tfrac{\pi}{2}\,\tfrac{\tan(x_n)}{x_n} = \tfrac{\pi}{2}\,f(x_n) \to \tfrac{\pi}{2}.$$

□

58. *Έστω ότι η f είναι αύξουσα στο διάστημα $(0,2)$ και ότι ισχύει $f(\frac{1}{n}) = 1+\frac{1}{\sqrt{n}}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$.*

Λύση. Επειδή η f είναι αύξουσα, το $a = \lim_{x\to 0+} f(x)$ υπάρχει και είναι αριθμός ή $-\infty$. Για την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = \frac{1}{n}$ έχουμε ότι $x_n \to 0$ και $x_n > 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Άρα

$$f(\tfrac{1}{n}) = f(x_n) \to a.$$

Τώρα, παίρνοντας όριο όταν $n\to+\infty$ στην σχέση $f(\frac{1}{n}) = 1+\frac{1}{\sqrt{n}}$, βρίσκουμε $a = 1+0 = 1$. □

59. *Αν ισχύει* $|a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + \cdots + a_n \sin(nx)| \leq |\sin x|$ *για κάθε* x *τότε αποδείξτε ότι* $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$. *Μήπως ισχύει και το αντίστροφο;*

Λύση. Από την $|a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + \cdots + a_n \sin(nx)| \leq |\sin x|$ συνεπάγεται

$$\left|a_1 \tfrac{\sin x}{x} + a_2 \tfrac{\sin(2x)}{x} + \cdots + a_n \tfrac{\sin(nx)}{x}\right| \leq \left|\tfrac{\sin x}{x}\right|.$$

Επειδή

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\sin(kx)}{x} = k \lim_{x\to 0} \tfrac{\sin(kx)}{kx} = k \lim_{y\to 0} \tfrac{\sin y}{y} = k,$$

παίρνοντας όριο όταν $x \to 0$ στην τελευταία ανισότητα, βρίσκουμε $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.
Το αντίστροφο, δηλαδή το ότι από το $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$ συνεπάγεται ότι ισχύει $|a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + \cdots + a_n \sin(nx)| \leq |\sin x|$ για κάθε x, δεν είναι σωστό. Αυτό μπορούμε να το ελέγξουμε π.χ. στην ειδική περίπτωση $n = 2$ και με $a_1 = 1$ και $a_2 = -1$. Τότε $|a_1 + 2a_2| = 1$ αλλά η ανισότητα $|a_1 \sin x + a_2 \sin(2x)| \leq |\sin x|$, δηλαδή η $|\sin x - 2\sin(2x)| \leq |\sin x|$, είναι ισοδύναμη με την $|1 - 4\cos x| \leq 1$ όταν $\sin x \neq 0$ και αυτή δεν ισχύει όταν $x = \pi$.
Αν όμως υποθέσουμε επιπλέον ότι όλοι οι $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι ≥ 0 τότε ισχύει το αντίστροφο. Για να το αποδείξουμε θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα

$$|\sin(kx)| \leq k|\sin x| \qquad \text{για } k \in \mathbb{N}$$

η οποία αποδεικνύεται με επαγωγή. Πράγματι, η ανισότητα είναι προφανώς σωστή αν $k = 1$ και αν υποθέσουμε ότι είναι σωστή για κάποιο $k \in \mathbb{N}$ τότε

$$\begin{aligned}
|\sin((k+1)x)| &= |\sin(kx + x)| = |\sin(kx)\cos x + \cos(kx)\sin x| \\
&\leq |\sin(kx)||\cos x| + |\cos(kx)||\sin x| \leq |\sin(kx)| + |\sin x| \\
&\leq k|\sin x| + |\sin x| = (k+1)|\sin x|
\end{aligned}$$

οπότε είναι σωστή και για το $k + 1$.
Τώρα, αν ισχύει $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ και $a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n \leq 1$ τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
|a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + \cdots + a_n \sin(nx)| &\leq a_1|\sin x| + a_2|\sin(2x)| + \cdots + a_n|\sin(nx)| \\
&\leq a_1|\sin x| + 2a_2|\sin x| + \cdots + na_n|\sin x| \\
&= (a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n)|\sin x| \leq |\sin x|.
\end{aligned}$$

□

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

60. *Αποδείξτε ότι η $y = \sqrt{x+1}$ είναι συνεχής στο 1 με τον ορισμό της συνέχειας (με ϵ και δ).*

Λύση. Παίρνουμε τυχαίο $\epsilon > 0$ και θα βρούμε $\delta > 0$ ώστε:

$$|x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x+1} - \sqrt{2}| < \epsilon.$$

Λύνουμε την ανισότητα $|\sqrt{x+1} - \sqrt{2}| < \epsilon$:

$$|\sqrt{x+1} - \sqrt{2}| < \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2} - \epsilon < \sqrt{x+1} < \sqrt{2} + \epsilon.$$

Υποθέτουμε $0 < \epsilon \leq \sqrt{2}$ και συνεχίζουμε:

$$\begin{aligned} |\sqrt{x+1} - \sqrt{2}| < \epsilon \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{2} - \epsilon < \sqrt{x+1} < \sqrt{2} + \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad 2 - 2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2 < x + 1 < 2 + 2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - (2\sqrt{2}\epsilon - \epsilon^2) < x < 1 + (2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2). \end{aligned}$$

Ο αριθμός 1 είναι προφανώς ανάμεσα στους αριθμούς $1 - (2\sqrt{2}\epsilon - \epsilon^2)$ και $1 + (2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2)$:

$$1 - (2\sqrt{2}\epsilon - \epsilon^2) < 1 < 1 + (2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2).$$

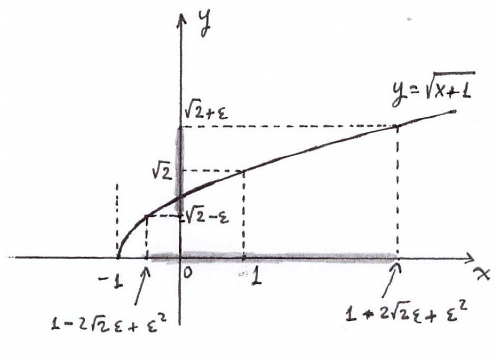
Παρατηρούμε ότι $0 < 2\sqrt{2}\epsilon - \epsilon^2 < 2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2$, δηλαδή ότι από τους δύο αριθμούς ο πιο κοντινός στο 1 είναι ο πρώτος (ο αριστερός). Άρα αν επιλέξουμε οποιοδήποτε δ ώστε $0 < \delta \leq 2\sqrt{2}\epsilon - \epsilon^2$ τότε

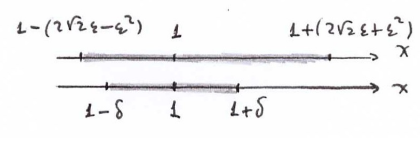
$$\begin{aligned} |x - 1| < \delta \quad &\Rightarrow \quad 1 - \delta < x < 1 + \delta \quad \Rightarrow \quad 1 - (2\sqrt{2}\epsilon - \epsilon^2) < x < 1 + (2\sqrt{2}\epsilon + \epsilon^2) \\ &\Rightarrow \quad |\sqrt{x+1} - \sqrt{2}| < \epsilon. \end{aligned}$$

Αν $\epsilon > \sqrt{2}$, τότε επιλέγουμε το δ, όπως το βρήκαμε προηγουμένως, το οποίο αντιστοιχεί στο $\epsilon = \sqrt{2}$. Δηλαδή οποιοδήποτε δ έτσι ώστε $0 < \delta \leq 2\sqrt{2}\sqrt{2} - (\sqrt{2})^2 = 2$. Τότε, όπως είδαμε προηγουμένως,

$$|x - 1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x+1} - \sqrt{2}| < \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x+1} - \sqrt{2}| < \epsilon.$$

Θα δούμε τώρα την λύση με την βοήθεια του γραφήματος της συνάρτησης.





Σημειώνουμε στον y-άξονα το διάστημα $(\sqrt{2}-\epsilon, \sqrt{2}+\epsilon)$ μέσα στο οποίο πρέπει να βρίσκεται το $y = \sqrt{x+1}$.
Αν $0 < \epsilon \leq \sqrt{2}$ τότε βλέπουμε ότι αν το x βρίσκεται στο διάστημα $(1-2\sqrt{2}\epsilon+\epsilon^2, 1+2\sqrt{2}\epsilon+\epsilon^2)$ τότε το $y = \sqrt{x+1}$ βρίσκεται στο $(\sqrt{2}-\epsilon, \sqrt{2}+\epsilon)$. Το $(1-2\sqrt{2}\epsilon+\epsilon^2, 1+2\sqrt{2}\epsilon+\epsilon^2)$ δεν είναι συμμετρικό ως προς το 1. Το κοντινότερο προς το 1 άκρο του διαστήματος είναι το $1-2\sqrt{2}\epsilon+\epsilon^2$. Άρα αν πάρουμε οποιοδήποτε δ με $0 < \delta \leq 1-(1-2\sqrt{2}\epsilon+\epsilon^2) = 2\sqrt{2}\epsilon-\epsilon^2$ τότε το $(1-\delta, 1+\delta)$ περιέχεται στο $(1-2\sqrt{2}\epsilon+\epsilon^2, 1+2\sqrt{2}\epsilon+\epsilon^2)$ οπότε αν το x βρίσκεται στο $(1-\delta, 1+\delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \sqrt{x+1}$ βρίσκεται στο $(\sqrt{2}-\epsilon, \sqrt{2}+\epsilon)$.
Αν $\epsilon > \sqrt{2}$ τότε θεωρούμε οποιοδήποτε $\delta > 0$ το οποίο είναι κατάλληλο για το $\epsilon = \sqrt{2}$, δηλαδή $0 < \delta \leq 2$. Τότε, όπως είδαμε προηγουμένως, αν το x βρίσκεται στο $(1-\delta, 1+\delta)$ τότε συνεπάγεται ότι το $y = \sqrt{x+1}$ βρίσκεται στο $(\sqrt{2}-\sqrt{2}, \sqrt{2}+\sqrt{2}) = (0, 2\sqrt{2})$ και άρα βρίσκεται και στο μεγαλύτερο διάστημα $(\sqrt{2}-\epsilon, \sqrt{2}+\epsilon)$. □

61. *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση* $f(x) = \begin{cases} (\sin x)/x & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$ *είναι συνεχής στο* 0.

Λύση. Είναι
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \tfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0).$$
□

62. *Σε ποιά σημεία είναι συνεχείς οι παρακάτω συναρτήσεις;*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{αν } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^3 & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Μήπως θα μπορούσαν να αλλάξουν οι τιμές τους στα σημεία ασυνέχειας ώστε αυτά να γίνουν σημεία συνέχειας;

Λύση. (i) Στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ η συνάρτηση είναι συνεχής. Το πλευρικά όρια της συνάρτησης στο 0 είναι

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} x = 0 = f(0), \qquad \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \tfrac{1}{x} = +\infty.$$

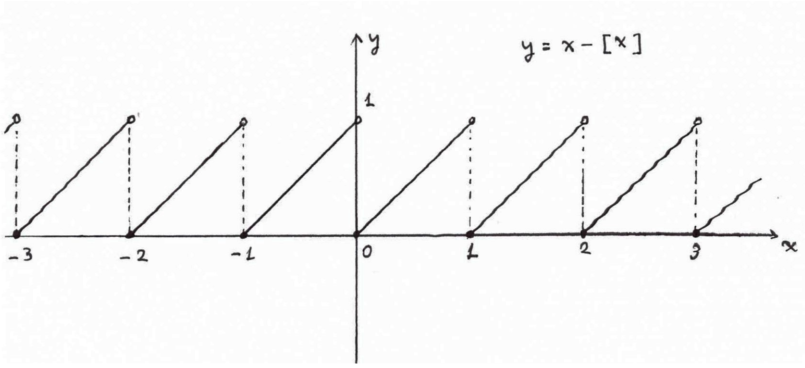
Άρα δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης στο 0 οπότε δεν είναι συνεχής στο 0 και μάλιστα δεν μπορεί να αλλάξει η τιμή της στο 0 ώστε να γίνει συνεχής στο 0. Η συνάρτηση είναι πάντως αριστερά συνεχής στο 0.
(ii) Στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ η συνάρτηση είναι συνεχής. Το όριο της συνάρτησης στο 0 είναι
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} x^3 = 0 \neq g(0)$$
οπότε δεν είναι συνεχής στο 0. Αν αλλάξουμε την τιμή στο 0 σε $g(0) = 0$ (αντί $g(0) = 1$) τότε το όριό της θα είναι ίσο με την (καινούργια) τιμή της στο 0 και η (καινούργια) συνάρτηση θα είναι συνεχής στο 0. □

63. *Σχεδιάστε το γράφημα της* $f(x) = x - [x]$ *και αποδείξτε ότι είναι συνεχής στο* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. *Στα σημεία του* $\mathbb{Z}$ *η συνάρτηση είναι δεξιά συνεχής αλλά όχι αριστερά συνεχής.*

Λύση. Έστω $k \in \mathbb{Z}$ και $x \in [k, k+1)$. Τότε $k \leq x < k+1$ και άρα $[x] = k$ οπότε

$$f(x) = x - [x] = x - k \qquad \text{για } x \in [k, k+1).$$

Άρα το γράφημα της συνάρτησης είναι:



Τα αποτελέσματα για την συνέχεια της συνάρτησης διακρίνονται καθαρά στο γράφημα. Αλλά ας τα δούμε και αναλυτικά.
Σε κάθε *ανοικτό* διάστημα $(k, k+1)$ με $k \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων: $f(x) = x - k$ (όπου k είναι σταθερή συνάρτηση). Σε κάθε $k \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση είναι αριστερά ασυνεχής και δεξιά συνεχής. Πράγματι στο $[k-1, k)$ είναι $f(x) = x - (k-1)$ ενώ στο $(k, k+1)$ είναι $f(x) = x - k$ και η τιμή στο k είναι $f(k) = k - k = 0$. Άρα

$$\lim_{x\to k-} f(x) = \lim_{x\to k-} (x - (k-1)) = 1 \neq f(k), \qquad \lim_{x\to k+} f(x) = \lim_{x\to k+} (x - k) = 0 = f(k).$$

□

64. *Σε ποιά σημεία είναι συνεχής η συνάρτηση* $f(x) = \left|x - [x] - \frac{1}{2}\right|$;

Λύση. Έστω $k \in \mathbb{Z}$ και $x \in [k, k+1)$. Τότε $k \leq x < k+1$ και άρα $[x] = k$ οπότε

$$f(x) = \left|x - [x] - \tfrac{1}{2}\right| = \left|x - k - \tfrac{1}{2}\right| \qquad \text{για } x \in [k, k+1).$$

Σε κάθε *ανοικτό* διάστημα $(k, k+1)$ με $k \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Σε κάθε $k \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση είναι αριστερά και δεξιά συνεχής και άρα συνεχής. Πράγματι στο $[k-1, k)$ είναι

$$f(x) = \left|x - (k-1) - \tfrac{1}{2}\right| = \left|x - k + \tfrac{1}{2}\right|$$

ενώ στο $(k, k+1)$ είναι $f(x) = \left|x - k - \frac{1}{2}\right|$ και η τιμή στο k είναι $f(k) = \left|k - k - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$. Άρα

$$\lim_{x\to k-} f(x) = \lim_{x\to k-} \left|x - k + \tfrac{1}{2}\right| = \tfrac{1}{2} = f(k), \quad \lim_{x\to k+} f(x) = \lim_{x\to k+} \left|x - k - \tfrac{1}{2}\right| = \tfrac{1}{2} = f(k).$$

□

65. *Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στα αντίστοιχα σύνολα:*
(i) $\sin(x^2 + x - 1)$ *στο* $\mathbb{R}$.
(ii) $\log(\sin x)$ *στην ένωση των* $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ *για* $k \in \mathbb{Z}$.
(iii) $\frac{1}{\sqrt{1-e^x}}$ *στο* $(-\infty, 0)$.
(iv) $\sin(\log x)$ *στο* $(0, +\infty)$.
(v) $\sqrt{1 - \cos x}$ *στο* $\mathbb{R}$.
(vi) $(x^2 - 5x + 6)^{\sqrt{2}}$ *στο* $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.
(vii) $\log(\log x)$ *στο* $(1, +\infty)$.
(viii) $\log(1 - \cos x)$ *στο* $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$.
(ix) $\frac{\sqrt{100-x^2}\,\log x}{\sin^2 x - 2\sin x + 1}$ *στο* $(0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}) \cup (\frac{5\pi}{2}, 10]$.

Λύση. Όλες οι συναρτήσεις έχουν την μορφή σύνθεσης συνεχών συναρτήσεων. Άρα το μόνο το οποίο μένει να κάνουμε είναι να πιστοποιήσουμε ότι τα αναφερόμενα σύνολα είναι τα αντίστοιχα πεδία ορισμού (ή υποσύνολα των αντίστοιχων πεδίων ορισμού).
Για παράδειγμα, αφού ελέγξουμε ότι το πεδίο ορισμού της $\log(\sin x)$ είναι η ένωση των διαστημάτων $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$ για $k \in \mathbb{Z}$, παίρνουμε ένα τυχαίο x_0 σε κάποιο από αυτά τα διαστήματα και λέμε ότι: η συνάρτηση $z = \sin x$ είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση $\log z$ είναι συνεχής στο $z_0 = \sin x_0$ (αφού $z_0 > 0$) και άρα η σύνθεση $\log(\sin x)$ είναι συνεχής στο x_0.
Ελέγξτε εσείς *προσεκτικά* με τον ίδιο τρόπο τις υπόλοιπες συναρτήσεις. □

66. *Χρησιμοποιήστε την ταυτότητα $a^b = e^{b\log a}$ για $a > 0$ για να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς στα αντίστοιχα σύνολα:*
(i) x^x *στο* $(0, +\infty)$.
(ii) $(x^2-1)^{\frac{x-2}{x+2}}$ *στο* $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, +\infty)$.
(iii) $(1-x^2)^{\log x}$ *στο* $(0, 1)$.

Λύση. (i) Το πεδίο ορισμού της x^x είναι το $(0, +\infty)$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $x^x = e^{x\log x}$. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
(ii) Το πεδίο ορισμού της $(x^2-1)^{\frac{x-2}{x+2}}$ αποτελείται από τα x για τα οποία $x^2 - 1 > 0$ και $x \neq -2$ καθώς και από τα x για τα οποία $x^2 - 1 = 0$ και $\frac{x-2}{x+2} > 0$. Ο δεύτερος συνδυασμός είναι αδύνατος οπότε το πεδίο ορισμού προκύπτει από τον πρώτο συνδυασμό, δηλαδή είναι το $(-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (1, +\infty)$. Για αυτά τα x έχουμε $(x^2-1)^{\frac{x-2}{x+2}} = e^{\frac{x-2}{x+2}\log(x^2-1)}$ οπότε η συνάρτηση είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.
(iii) Το πεδίο ορισμού της $(1-x^2)^{\log x}$ αποτελείται από τα x για τα οποία $1 - x^2 > 0$ και $x > 0$ καθώς και από τα x για τα οποία $1 - x^2 = 0$ και $\log x > 0$. Ο δεύτερος συνδυασμός είναι αδύνατος οπότε το πεδίο ορισμού προκύπτει από τον πρώτο συνδυασμό, δηλαδή είναι το διάστημα $(0, 1)$. Για αυτά τα x έχουμε $(1-x^2)^{\log x} = e^{\log x \log(1-x^2)}$ οπότε η συνάρτηση είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. □

67. *Εφαρμόστε τον δεύτερο κανόνα αλλαγής μεταβλητής για να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια.*

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(\sqrt{x}+3)^5}{(\sqrt{x}+3)^4+(\sqrt{x}+3)^8+2}, \quad \lim_{x\to+\infty} e^{1/x^2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \lim_{x\to+\infty} \sin\frac{\sin x}{x}, \quad \lim_{x\to 0} e^{x\sin(1/x)}.$$

Λύση. (i) Γράφουμε $f(x) = \sqrt{x} + 3$ και $g(y) = \frac{y^5}{y^4+y^8+2}$.
Επειδή $\lim_{x\to 0+} f(x) = 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο 0, από τον δεύτερο κανόνα έχουμε

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(\sqrt{x}+3)^5}{(\sqrt{x}+3)^4+(\sqrt{x}+3)^8+2} = \lim_{x\to 0+} g(f(x)) = g(3) = \frac{243}{6644}.$$

(ii) Γράφουμε $f(x) = \frac{1}{x^2}$ και $g(y) = e^y$.
Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο 0, από τον δεύτερο κανόνα έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} e^{1/x^2} = \lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = g(0) = 1.$$

(iii) Γράφουμε $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ και $g(y) = \sin y$.
Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο 0, από τον δεύτερο κανόνα έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = g(0) = 0.$$

(iv) Γράφουμε $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ και $g(y) = \sin y$.
Επειδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο 0, από τον δεύτερο κανόνα έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = g(0) = 0.$$

(v) Γράφουμε $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ και $g(y) = e^y$.
Επειδή $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ και επειδή η g είναι συνεχής στο 0, από τον δεύτερο κανόνα έχουμε

$$\lim_{x\to 0} e^{x\sin(1/x)} = \lim_{x\to 0} g(f(x)) = g(0) = 1.$$

□

68. *Έστω συνεχής $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $|f(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \neq 0$. Υπολογίστε το*

$$\lim_{n\to+\infty} \big(\lim_{x\to 0} f\big(\tfrac{\sin(nx)}{x}\big) + \lim_{x\to 0} f\big(\tfrac{\sin((n+1)x)}{x}\big) + \cdots + \lim_{x\to 0} f\big(\tfrac{\sin(2nx)}{x}\big)\big).$$

Λύση. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ είναι

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{\sin(kx)}{x} = k \lim_{x\to 0} \tfrac{\sin(kx)}{kx} = k \lim_{y\to 0} \tfrac{\sin y}{y} = k.$$

Επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής,

$$\lim_{x\to 0} f\big(\tfrac{\sin(kx)}{x}\big) = f(k).$$

Άρα πρέπει να υπολογίσουμε το

$$\lim_{n\to+\infty} (f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} |f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)| &\leq |f(n)| + |f(n+1)| + \cdots + |f(2n)| \\ &\leq \tfrac{1}{n^2} + \tfrac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \tfrac{1}{(2n)^2} \leq \tfrac{n+1}{n^2}, \end{aligned}$$

διότι ο μεγαλύτερος από τους $n+1$ όρους του τελευταίου αθροίσματος είναι ο $\frac{1}{n^2}$ (ο πρώτος). Άρα

$$-\tfrac{n+1}{n^2} \leq f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n) \leq \tfrac{n+1}{n^2}$$

και με παρεμβολή συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty}(f(n) + f(n+1) + \cdots + f(2n)) = 0$. □

69. *Έχουν οι παρακάτω συναρτήσεις μέγιστη ή ελάχιστη τιμή στο διάστημα $(0,1)$; Στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$; Στο διάστημα $[0,1]$;*

$$x^2, \qquad x^2 - x, \qquad x - x^2, \qquad \sin(2\pi x).$$

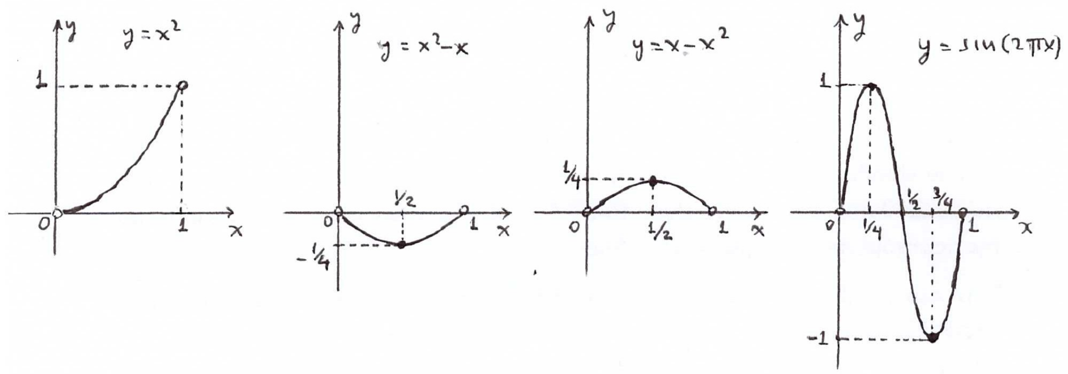
Για ποιό από τα τρία διαστήματα η απάντηση είναι άμεση για όλες τις συναρτήσεις;

Λύση. Το διάστημα $[0,1]$ είναι κλειστό και φραγμένο και όλες οι συναρτήσεις είναι συνεχείς. Άρα όλες οι συναρτήσεις έχουν μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα αυτό. Άρα για το $[0,1]$ η απάντηση είναι άμεση.
(i) Το σύνολο τιμών της x^2 στο διάστημα $(0,1)$ είναι το διάστημα $(0,1)$. Άρα η συνάρτηση δεν έχει μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο $(0,1)$. Το σύνολο τιμών της x^2 στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ είναι το διάστημα $[0,+\infty)$. Άρα η συνάρτηση δεν έχει μέγιστη τιμή στο $(-\infty,+\infty)$ αλλά έχει ελάχιστη τιμή 0.
(ii) Το σύνολο τιμών της $x^2 - x = (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ στο $(0,1)$ είναι το διάστημα $[-\frac{1}{4},0)$. Άρα η συνάρτηση δεν έχει μέγιστη τιμή στο $(0,1)$ αλλά έχει ελάχιστη τιμή $-\frac{1}{4}$. Το σύνολο τιμών της x^2-x στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ είναι το διάστημα $[-\frac{1}{4},+\infty)$. Άρα η συνάρτηση δεν έχει μέγιστη τιμή στο $(-\infty,+\infty)$ αλλά έχει ελάχιστη τιμή $-\frac{1}{4}$.
(iii) Το σύνολο τιμών της $x - x^2 = -(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$ στο $(0,1)$ είναι το διάστημα $(0,\frac{1}{4}]$. Άρα η συνάρτηση δεν έχει ελάχιστη τιμή στο $(0,1)$ αλλά έχει μέγιστη τιμή $\frac{1}{4}$. Το σύνολο τιμών της $x-x^2$

στο διάστημα $(-\infty,+\infty)$ είναι το διάστημα $(-\infty,\frac{1}{4}]$. Άρα η συνάρτηση δεν έχει ελάχιστη τιμή στο $(-\infty,+\infty)$ αλλά έχει μέγιστη τιμή $\frac{1}{4}$.

(iv) Η $\sin(2\pi x)$ έχει τιμή 1 στο σημείο $\frac{1}{4}$ του $(0,1)$ και προφανώς αυτή είναι η μέγιστη τιμή της στο $(0,1)$ αλλά και στο $(-\infty,+\infty)$. Επίσης η συνάρτηση έχει τιμή -1 στο σημείο $\frac{3}{4}$ του $(0,1)$ και προφανώς αυτή είναι η ελάχιστη τιμή της στο $(0,1)$ αλλά και στο $(-\infty,+\infty)$. Άρα η συνάρτηση έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο $(0,1)$ καθώς και στο $(-\infty,+\infty)$.

Στο σχήμα φαίνονται τα γραφήματα των συναρτήσεων για το διάστημα $(0,1)$.



□

70. *Έστω συνεχής $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x)<5$ για κάθε $x\in[a,b]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμός $u<5$ ώστε να ισχύει $f(x)<u$ για κάθε $x\in[a,b]$.*

Λύση. Από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής συνεπάγεται ότι η f έχει μέγιστη τιμή, έστω m, στο $[a,b]$ οπότε ισχύει $f(x)\leq m$ για κάθε $x\in[a,b]$. Επειδή κάθε τιμή της συνάρτησης είναι <5, συνεπάγεται ότι και η μέγιστη τιμή της είναι <5, δηλαδή $m<5$. Θεωρούμε τον αριθμό $u=\frac{m+5}{2}$ οπότε ισχύει $f(x)\leq m<u<5$ για κάθε $x\in[a,b]$. □

71. *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{x+1}\sin\frac{1}{x}$ είναι φραγμένη στο $(0,+\infty)$ αλλά και ότι δεν έχει ούτε μέγιστη ούτε ελάχιστη τιμή στο $(0,+\infty)$.*

Λύση. Κατ' αρχάς ισχύει

$$-1<-\tfrac{1}{x+1}\leq\tfrac{1}{x+1}\sin\tfrac{1}{x}\leq\tfrac{1}{x+1}<1\qquad\text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Άρα αν υπάρχει μέγιστη τιμή u της συνάρτησης αυτή πρέπει να είναι <1.
Το ότι το u είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\tfrac{1}{x+1}\sin\tfrac{1}{x}\leq u\qquad\text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Στα σημεία $x_n=\frac{2}{(4n-3)\pi}>0$, με $n\in\mathbb{N}$, η συνάρτηση έχει τιμές

$$\tfrac{(4n-3)\pi}{(4n-3)\pi+2}\sin\tfrac{(4n-3)\pi}{2}=\tfrac{(4n-3)\pi}{(4n-3)\pi+2}.$$

Άρα ισχύει

$$\tfrac{(4n-3)\pi}{(4n-3)\pi+2}\leq u\qquad\text{για κάθε } n\in\mathbb{N}$$

και, παίρνοντας όριο όταν $n\to+\infty$, βρίσκουμε $1\leq u$. Επειδή $u<1$, καταλήγουμε σε άτοπο οπότε δεν υπάρχει μέγιστη τιμή.
Ομοίως, αν υπάρχει ελάχιστη τιμή l της συνάρτησης αυτή πρέπει να είναι >-1.
Το ότι το l είναι η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\tfrac{1}{x+1}\sin\tfrac{1}{x}\geq l\qquad\text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Τώρα θεωρήστε τα σημεία $x_n=\frac{2}{(4n-1)\pi}>0$, με $n\in\mathbb{N}$, και καταλήξτε όπως πριν σε άτοπο. □

72. *Έστω συνεχής $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f(x)^2 = x$ για κάθε $x \geq 0$. Αποδείξτε ότι είτε $f(x) = \sqrt{x}$ για κάθε $x \geq 0$ είτε $f(x) = -\sqrt{x}$ για κάθε $x \geq 0$.*

Λύση. Λύνοντας την $f(x)^2 = x$ με $x \geq 0$, βρίσκουμε $f(x) = \sqrt{x}$ ή $f(x) = -\sqrt{x}$.
Παρατηρούμε ότι για κάθε $x > 0$ και οι δύο λύσεις είναι $\neq 0$ οπότε η συνάρτηση δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $(0, +\infty)$. Επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.
Στην περίπτωση κατά την οποία η f είναι σταθερά θετική στο $(0, +\infty)$ τότε ισχύει $f(x) = \sqrt{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
Στην περίπτωση κατά την οποία η f είναι σταθερά αρνητική στο $(0, +\infty)$ τότε ισχύει $f(x) = -\sqrt{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
Για $x = 0$ ισχύουν προφανώς και οι δύο τύποι. $\square$

73. *Έστω $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $x^2 + f(x)^2 = 1$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.*
(i) Αν η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$, αποδείξτε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο δυνατότητες για την f: δηλαδή, είτε $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ είτε $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ για κάθε $x \in [-1, 1]$.
(ii) Αν δεν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, πόσες δυνατότητες υπάρχουν για την f;

Λύση. Κατ' αρχάς, για να βρούμε τύπο της f, παρατηρούμε ότι η εξίσωση $x^2 + f(x)^2 = 1$ με άγνωστο το $f(x)$ έχει για κάθε $x \in (-1, 1)$ ακριβώς δύο λύσεις:

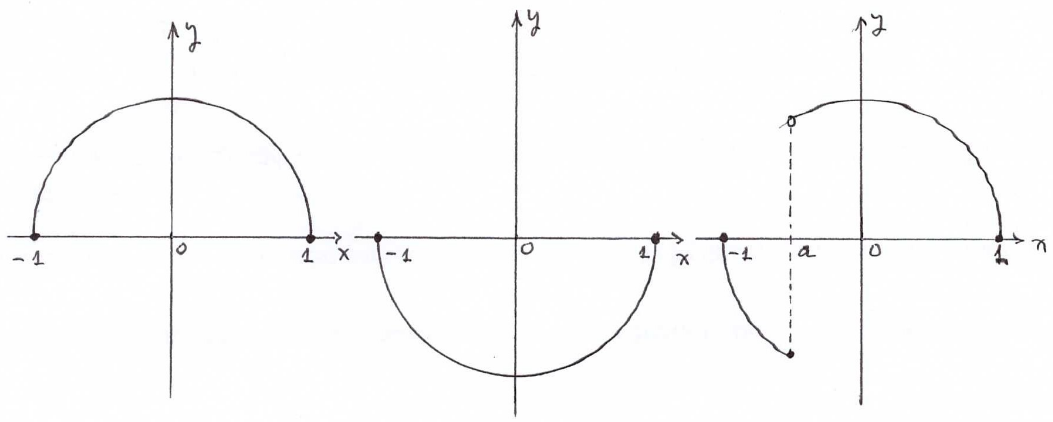
$$f(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \qquad f(x) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Για $x = -1$ και για $x = 1$ η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση: $f(-1) = f(1) = 0$.
(i) Παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$ και οι δύο λύσεις για το $f(x)$ είναι $\neq 0$. Με άλλα λόγια η f δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $(-1, 1)$. Άρα αν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1, 1)$.
Στην περίπτωση κατά την οποία η f είναι σταθερά θετική στο $(-1, 1)$ ο τύπος της είναι

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1, 1].$$

Στην περίπτωση κατά την οποία η f είναι σταθερά αρνητική στο $(-1, 1)$ ο τύπος της είναι

$$f(x) = -\sqrt{1 - x^2} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1, 1].$$



(ii) Αν δεν υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής τότε τίποτε δεν εμποδίζει την συνάρτηση να έχει σε άλλα σημεία $x \in (-1, 1)$ θετική τιμή, δηλαδή να είναι $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, και σε άλλα σημεία $x \in (-1, 1)$ αρνητική τιμή, δηλαδή να είναι $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

Για παράδειγμα, μπορούμε να επιλέξουμε ένα αυθαίρετο $a \in (-1,1)$ και να θεωρήσουμε την συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} & \text{αν } -1 \le x \le a \\ \sqrt{1-x^2} & \text{αν } a < x \le 1 \end{cases}$$

Αυτή η συνάρτηση ικανοποιεί την δοσμένη εξίσωση αλλά φυσικά δεν είναι συνεχής. Επειδή υπάρχουν άπειροι αριθμοί $a \in (-1,1)$, έχουμε άπειρες αντίστοιχες συναρτήσεις.
Υπάρχουν ακόμη περισσότερες δυνατότητες: μπορούμε να πάρουμε δύο αυθαίρετα $a, b \in (-1,1)$ με $a < b$ και να θεωρήσουμε την συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2} & \text{αν } -1 \le x \le a \\ \sqrt{1-x^2} & \text{αν } a < x \le b \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{αν } b < x \le 1 \end{cases}$$

□

74. *Έστω συνεχείς $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν $f(a) < g(a)$ και $f(b) > g(b)$ αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.*

Λύση. Η συνάρτηση $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι συνεχής και ισχύει $h(a) < 0$ και $h(b) > 0$. Άρα υπάρχει $\xi \in (a,b)$ ώστε $h(\xi) = 0$ οπότε $f(\xi) = g(\xi)$. □

75. *Αποδείξτε ότι η εξίσωση $e^x = x + 2$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις.*

Λύση. Θα δούμε ότι η εξίσωση έχει τουλάχιστον μία θετική και τουλάχιστον μία αρνητική λύση. Η συνάρτηση

$$f(x) = e^x - x - 2$$

είναι συνεχής στο διάστημα $[0,3]$ και παρατηρούμε ότι $f(0) = 1 - 2 = -1 < 0$ και $f(3) = e^3 - 3 - 2 > 2^3 - 5 = 3 > 0$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής συνεπάγεται ότι η f μηδενίζεται σε τουλάχιστον ένα σημείο του διαστήματος $(0,3)$ οπότε η εξίσωση $e^x = x + 2$ έχει τουλάχιστον μία θετική λύση.
Μπορούμε να αποδείξουμε το ίδιο πράγμα χωρίς να χρειαστεί να βρούμε τον συγκεκριμένο αριθμό 3 για τον οποίο ισχύει $f(3) > 0$. Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ οπότε υπάρχει κάποιο αρκετά μεγάλο $b > 0$ ώστε να είναι $f(b) > 0$. Τότε πάλι από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής συνεπάγεται ότι η f μηδενίζεται σε τουλάχιστον ένα σημείο του διαστήματος $(0,b)$ οπότε η εξίσωση $e^x = x + 2$ έχει τουλάχιστον μία θετική λύση.
Ομοίως, επειδή $f(-3) = \frac{1}{e^3} + 3 - 2 > 0$ και $f(0) < 0$, η f μηδενίζεται σε κάποιο σημείο του διαστήματος $(0,3)$ οπότε η εξίσωση $e^x = x + 2$ έχει τουλάχιστον μία αρνητική λύση.
Όπως πριν, μπορούμε να αποδείξουμε το ίδιο χωρίς να χρειαστεί να βρούμε τον συγκεκριμένο αριθμό -3 για τον οποίο ισχύει $f(-3) > 0$. Βλέπουμε ότι $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ οπότε υπάρχει κάποιο αρκετά μεγάλο $a < 0$ ώστε να είναι $f(a) > 0$. Από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής συνεπάγεται ότι η f μηδενίζεται σε τουλάχιστον ένα σημείο του διαστήματος $(a,0)$ οπότε η εξίσωση $e^x = x + 2$ έχει τουλάχιστον μία αρνητική λύση. □

76. *Αποδείξτε ότι η εξίσωση $3x^8 - x^7 - 24x^6 - 4x^5 - 1820x^4 - 13x^3 - x^2 - 8x = 7$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις.*

Λύση. Θεωρούμε την πολυωνυμική συνάρτηση

$$p(x) = 3x^8 - x^7 - 24x^6 - 4x^5 - 1820x^4 - 13x^3 - x^2 - 8x.$$

Είναι $p(0) = 0$ και θέλουμε να εξετάσουμε την εξίσωση $p(x) = 7$. Θα εργαστούμε όπως στην προηγούμενη άσκηση.
Ένας δρόμος είναι να βρούμε δύο αριθμούς a, b ώστε $a < 0 < b$ και ώστε $p(a) > 7$ και $p(b) > 7$

και μετά να εφαρμόσουμε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής στα διαστήματα $[a, 0]$ και $[0, b]$. Αντί να ψάξουμε για τα a, b θα πάρουμε τον δεύτερο δρόμο.
Βλέπουμε ότι $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = +\infty$ (πρόκειται για πολυώνυμο άρτιου βαθμού με θετικό μεγιστοβάθμιο συντελεστή) οπότε υπάρχει κάποιο αρκετά μεγάλο $a < 0$ και κάποιο αρκετά μεγάλο $b > 0$ ώστε να είναι $p(a) > 7$ και $p(b) > 7$ και τώρα εφαρμόζουμε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής στα διαστήματα $[a, 0]$ και $[0, b]$: υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, 0)$ και τουλάχιστον ένα $\eta \in (0, b)$ ώστε $p(\xi) = p(\eta) = 7$. $\square$

77. *Ποιά είναι τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων;*

$$-3x^5 + 4x^4 - x^3 + x^2 + x + 6, \qquad x^6 - 8x^3 + 2, \qquad x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1.$$

Λύση. (i) Η πρώτη συνάρτηση είναι πολυώνυμο περιττού βαθμού οπότε το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$.
Οι άλλες δύο συναρτήσεις είναι πολυώνυμα άρτιου βαθμού με θετικό μεγιστοβάθμιο συντελεστή οπότε τα σύνολα τιμών τους είναι του τύπου $[m, +\infty)$, όπου m είναι η ελάχιστη τιμή καθεμιάς από αυτές.
(ii) Για την δεύτερη συνάρτηση έχουμε

$$x^6 - 8x^3 + 2 = (x^3 - 4)^2 - 14 \geq -14 \qquad \text{για κάθε } x.$$

Επίσης, στο σημείο $x = \sqrt[3]{4}$ η συνάρτηση έχει τιμή -14. Άρα $m = -14$ και η δεύτερη συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $[-14, +\infty)$.
(iii) Για την τρίτη συνάρτηση έχουμε

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 &= (x^4 - 2x^3 + x^2) + (x^2 - 2x + 1) \\ &= (x^2 - 2x + 1)x^2 + (x^2 - 2x + 1) \\ &= (x - 1)^2(x^2 + 1) \geq 0 \qquad \text{για κάθε } x. \end{aligned}$$

Επίσης, στο σημείο $x = 1$ η συνάρτηση έχει τιμή 0. Άρα $m = 0$ και η τρίτη συνάρτηση έχει σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$. $\square$

78. *Βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης*

$$f(x) = \tfrac{1}{x} + \tfrac{7}{x-1} + \tfrac{3}{x-2} + \tfrac{4}{x-3}$$

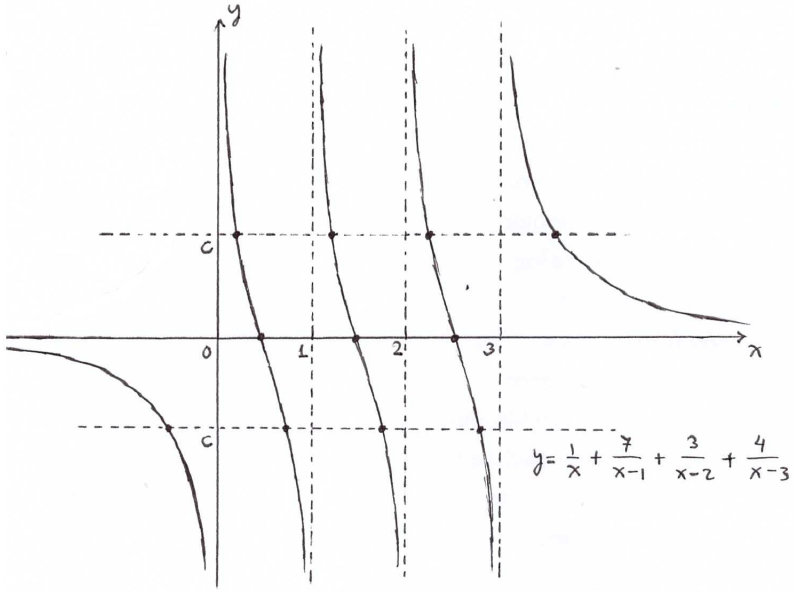
σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ *και* $(3, +\infty)$. *Για κάθε c βρείτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = c$.*

Λύση. Κάθε συνάρτηση

$$y = \tfrac{a}{x-x_0},$$

με $a > 0$, είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, x_0)$ καθώς και στο $(x_0, +\infty)$ αλλά και σε κάθε υποδιάστημα αυτών των δύο διαστημάτων. Επίσης, γνωρίζουμε ότι όταν προσθέτουμε γνησίως φθίνουσες συναρτήσεις το αποτέλεσμα είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση.
Άρα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, +\infty)$ η δοσμένη συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα. Θεωρώντας τα πλευρικά όρια της f στα άκρα αυτών των πέντε διαστημάτων, βλέπουμε ότι το σύνολο τιμών της στο $(-\infty, 0)$ είναι το $(-\infty, 0)$, το σύνολο τιμών της σε καθένα από τα $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$ είναι το $(-\infty, +\infty)$ και το σύνολο τιμών της στο $(3, +\infty)$ είναι το $(0, +\infty)$. Τέλος, λόγω γνήσιας μονοτονίας η f είναι ένα-προς-ένα σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.
Αν $c > 0$, τότε το c περιέχεται στα τέσσερα από τα πέντε σύνολα τιμών: στα σύνολα τιμών τα οποία αντιστοιχούν στα διαστήματα $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, +\infty)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = c$ έχει ακριβώς τέσσερις λύσεις, μία σε καθένα από αυτά τα τέσσερα διαστήματα.

Αν $c < 0$, τότε το c περιέχεται στα τέσσερα από τα πέντε σύνολα τιμών: στα σύνολα τιμών τα οποία αντιστοιχούν στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = c$ έχει ακριβώς τέσσερις λύσεις, μία σε καθένα από αυτά τα τέσσερα διαστήματα.
Αν $c = 0$, τότε το c περιέχεται στα τρία από τα πέντε σύνολα τιμών: στα σύνολα τιμών τα οποία αντιστοιχούν στα διαστήματα $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$. Άρα η εξίσωση $f(x) = c$ έχει ακριβώς τρεις λύσεις, μία σε καθένα από αυτά τα τρία διαστήματα.



□

79. *Βρείτε το σύνολο τιμών της* $f(x) = \cot x - 2x^2 + 3x$ *στο διάστημα* $(k\pi, (k+1)\pi)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$.

Λύση. Η $f(x) = \cot x - 2x^2 + 3x$ είναι συνεχής στο $(k\pi, (k+1)\pi)$ και έχει πλευρικά όρια $+\infty$ και $-\infty$ στα άκρα του διαστήματος:

$$\lim_{x \to k\pi+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to (k+1)\pi-} f(x) = -\infty.$$

Γνωρίζουμε γενικά ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα έχει σύνολο τιμών το οποίο είναι διάστημα. Άρα το σύνολο τιμών της f στο $(k\pi, (k+1)\pi)$ είναι κάποιο διάστημα J.
Αν b είναι το δεξιό άκρο του J τότε φυσικά ισχύει $f(x) \le b$ για κάθε $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$. Αν το b είναι αριθμός τότε συνεπάγεται $\lim_{x\to k\pi+} f(x) \le b$ το οποίο είναι άτοπο διότι $\lim_{x\to k\pi+} f(x) = +\infty$. Άρα το δεξιό άκρο του J είναι το $+\infty$.
Ομοίως, αν a είναι το αριστερό άκρο του J τότε ισχύει $a \le f(x)$ για κάθε $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$. Αν το a είναι αριθμός τότε συνεπάγεται $a \le \lim_{x\to(k+1)\pi-} f(x)$ το οποίο είναι άτοπο διότι $\lim_{x\to(k+1)\pi-} f(x) = -\infty$. Άρα το αριστερό άκρο του J είναι το $-\infty$.
Επομένως το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(k\pi, (k+1)\pi)$ είναι το $J = (-\infty, +\infty)$. □

80. *Βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων στα αντίστοιχα διαστήματα.*
(i) $x + \frac{1}{x}$ *στο* $(-\infty, 0)$.
(ii) $e^{2x} + 3x$ *στο* $(-\infty, +\infty)$.
(iii) $\frac{1-e^x}{1+e^x}$ *στο* $(-\infty, +\infty)$.
Ποιές από τις τρεις συναρτήσεις είναι αντιστρέψιμες; Για όποιες συναρτήσεις είναι αντιστρέψιμες να εξετάσετε τις αντίστοιχες αντίστροφες συναρτήσεις σε σχέση με τα: πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, μονοτονία και συνέχεια.

Λύση. (i) Η $y = x + \frac{1}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 0)$ (ελέγξτε το αλγεβρικά).
Βάσει του ορίου της συνάρτησης στο $-\infty$ έχουμε ότι το σύνολο τιμών της στο $(-\infty, -1]$ είναι το $(-\infty, -2]$. Επίσης βάσει του ορίου της συνάρτησης στο 0 έχουμε ότι το σύνολο τιμών της στο $[-1, 0)$ είναι πάλι το $(-\infty, -2]$. Άρα το σύνολο τιμών στο $(-\infty, 0)$ είναι το $(-\infty, -2]$.
Η συνάρτηση δεν είναι ένα-προς-ένα στο $(-\infty, 0)$ (αφού έχει ίδιο σύνολο τιμών σε διαφορετικά υποδιαστήματα του $(-\infty, 0)$) και άρα δεν είναι αντιστρέψιμη.
(ii) Η $y = e^{2x} + 3x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ (ελέγξτε το αλγεβρικά) και βάσει των ορίων της στα $-\infty$ και $+\infty$ έχουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-\infty, +\infty)$:

$$\lim_{x \to -\infty} (e^{2x} + 3x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} (e^{2x} + 3x) = +\infty.$$

Η συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα (ως γνησίως μονότονη) και άρα αντιστρέψιμη. Η αντίστροφη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, +\infty)$ (το σύνολο τιμών της αρχικής συνάρτησης) και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$ (το πεδίο ορισμού της αρχικής συνάρτησης), είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$ και συνεχής (όπως έχουμε αποδείξει στην θεωρία).
Δεν μπορούμε να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης διότι η εξίσωση $e^{2x} + 3x = y$ με άγνωστο το x δεν μπορεί να λυθεί.
(iii) Η $y = \frac{1-e^x}{1+e^x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, +\infty)$ (ελέγξτε το αλγεβρικά) και βάσει των ορίων της στα $-\infty$ και $+\infty$ έχουμε ότι το σύνολο τιμών της είναι το $(-1, 1)$:

$$\lim_{x \to -\infty} \tfrac{1-e^x}{1+e^x} = 1, \qquad \lim_{x \to +\infty} \tfrac{1-e^x}{1+e^x} = -1.$$

Η συνάρτηση είναι ένα-προς-ένα (ως γνησίως μονότονη) και άρα αντιστρέψιμη. Η αντίστροφη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $(-1, 1)$ (το σύνολο τιμών της αρχικής συνάρτησης) και σύνολο τιμών το $(-\infty, +\infty)$ (το πεδίο ορισμού της αρχικής συνάρτησης), είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 1)$ και συνεχής (όπως έχουμε αποδείξει στην θεωρία).
Στην περίπτωση αυτή μπορούμε αν θέλουμε να βρούμε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης: λύνουμε την εξίσωση $\frac{1-e^x}{1+e^x} = y$ με άγνωστο το x και βρίσκουμε τον τύπο $x = \log \frac{1-y}{1+y}$ με ανεξάρτητη μεταβλητή y. Έτσι μπορούμε να ελέγξουμε τα προηγούμενα συμπεράσματα για την αντίστροφη συνάρτηση στο διάστημα $(-1, 1)$. □

81. *Αποδείξτε ότι η* $x^3 - 3x$ *είναι αντιστρέψιμη στο* $[1, +\infty)$. *Τί μπορείτε να πείτε για την αντίστροφη συνάρτηση σε σχέση με τα: πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, μονοτονία και συνέχεια;*
Να επαναλάβετε για καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ *και* $[-1, 1]$.

Λύση. (i) Η $x^3 - 3x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Πράγματι, έστω $1 \leq x_1 < x_2$. Τότε

$$x_1^3 - 3x_1 < x_2^3 - 3x_2 \quad \Leftrightarrow \quad 3(x_2 - x_1) < x_2^3 - x_1^3 \quad \Leftrightarrow \quad 3 < x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$

και το τελευταίο είναι αληθές. Άρα η συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη. Με βάση το όριό της στο $+\infty$ έχει σύνολο τιμών το $[-2, +\infty)$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $[-2, +\infty)$, σύνολο τιμών το $[1, +\infty)$, είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής.
(ii) Η $x^3 - 3x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ (ελέγξτε το αλγεβρικά όπως πριν) και άρα αντιστρέψιμη. Με βάση το όριό της στο $-\infty$ έχει σύνολο τιμών το $(-\infty, 2]$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 2]$, σύνολο τιμών το $(-\infty, -1]$, είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής.
(iii) Η $x^3 - 3x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 1]$ (ελέγξτε το αλγεβρικά όπως πριν) και άρα αντιστρέψιμη. Το σύνολο τιμών της είναι το $[-2, 2]$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $[-2, 2]$, σύνολο τιμών το $[-1, 1]$, είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής.
Σε όλες τις περιπτώσεις δεν μπορούμε να βρούμε εύκολα τύπο για την αντίστροφη συνάρτηση διότι η εξίσωση $x^3 - 3x = y$ με άγνωστο το x δεν λύνεται εύκολα αλγεβρικά. □

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

82. *Γράψτε σε μορφή ορίου*

(i) την στιγμιαία επιτάχυνση οχήματος το οποίο κινείται σε ευθύ δρόμο.

(ii) την στιγμιαία ταχύτητα και την στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα ενός οχήματος το οποίο κινείται σε κυκλικό δρόμο και βρείτε την σχέση ανάμεσα στις δύο αυτές ταχύτητες.

Κατόπιν γράψτε τα προηγούμενα όρια σε μορφή παραγώγου.

Λύση. Όλες οι ταχύτητες και επιταχύνσεις είναι αριθμητικές (όχι διανυσματικές.)

(i) Η στιγμιαία επιτάχυνση $a(\tau)$ την χρονική στιγμή $t = \tau$ είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας $v(t)$ την ίδια χρονική στιγμή. Δηλαδή είναι:

$$a(\tau) = \lim_{t \to \tau} \tfrac{v(t)-v(\tau)}{t-\tau} = v'(\tau) = \tfrac{dv}{dt}\Big|_{t=\tau}.$$

(ii) Θεωρούμε ότι το όχημα A κινείται πάνω σε κυκλικό δρόμο κέντρου O και ακτίνας $r > 0$. Συμβολίζουμε $s(t)$ την απόσταση του A από ένα σταθερό σημείο A_0 του δρόμου την χρονική στιγμή t και $\theta(t)$ την αντίστοιχη γωνία ανάμεσα στις ακτίνες OA και OA_0.
Η στιγμιαία ταχύτητα $v(\tau)$ την χρονική στιγμή $t = \tau$ είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της απόστασης $s(t)$ την ίδια χρονική στιγμή και η στιγμιαία γωνιακή ταχύτητα $\omega(\tau)$ την χρονική στιγμή $t = \tau$ είναι ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής της γωνίας $\theta(t)$ την ίδια χρονική στιγμή. Δηλαδή:

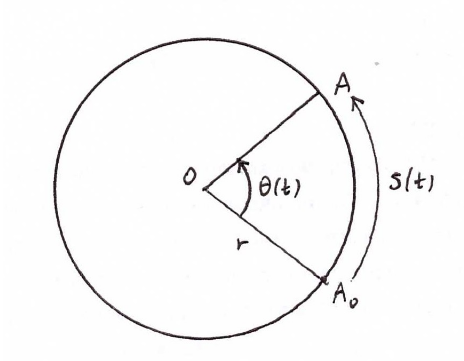
$$v(\tau) = \lim_{t \to \tau} \tfrac{s(t)-s(\tau)}{t-\tau} = s'(\tau) = \tfrac{ds}{dt}\Big|_{t=\tau}$$

και

$$\omega(\tau) = \lim_{t \to \tau} \tfrac{\theta(t)-\theta(\tau)}{t-\tau} = \theta'(\tau) = \tfrac{d\theta}{dt}\Big|_{t=\tau}.$$

Από την γεωμετρία γνωρίζουμε ότι $s(t) = r\theta(t)$ για κάθε t. Επομένως $s(t)-s(\tau) = r(\theta(t)-\theta(\tau))$ οπότε

$$v(\tau) = \lim_{t \to \tau} \tfrac{s(t)-s(\tau)}{t-\tau} = r \lim_{t \to \tau} \tfrac{\theta(t)-\theta(\tau)}{t-\tau} = r\omega(\tau).$$



□

83. *Υπολογίστε (αν υπάρχουν) τις παραγώγους και τις πλευρικές παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στο* 0.

$$f(x) = \begin{cases} 5x & \text{αν } x \le 0 \\ 3x & \text{αν } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 5x^2 & \text{αν } x \le 0 \\ 3x^2 & \text{αν } x > 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \neq 0 \\ 1 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Λύση. (i)

$$f'(0-) = \lim_{x \to 0-} \tfrac{5x-0}{x-0} = 5, \qquad f'(0+) = \lim_{x \to 0+} \tfrac{3x-0}{x-0} = 3.$$

Δεν υπάρχει η παράγωγος της f στο 0.

(ii)

$$g'(0-) = \lim_{x\to 0-} \tfrac{5x^2-0}{x-0} = 0, \qquad g'(0+) = \lim_{x\to 0+} \tfrac{3x^2-0}{x-0} = 0.$$

Άρα $g'(0) = 0$.

(iii)

$$h'(0-) = \lim_{x\to 0-} \tfrac{0-1}{x-0} = +\infty, \qquad h'(0+) = \lim_{x\to 0+} \tfrac{0-1}{x-0} = -\infty.$$

Δεν υπάρχει η παράγωγος της h στο 0. □

84. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $x \leq f(x) \leq x+x^2$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι η παράγωγος στο 0 υπάρχει και υπολογίστε την.*

Λύση. Από την $x \leq f(x) \leq x + x^2$ παίρνουμε ότι $f(0) = 0$. Έτσι, για $x > 0$, αν διαιρέσουμε την ανισότητα με x έχουμε

$$1 \leq \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \tfrac{f(x)}{x} \leq 1 + x.$$

Επομένως, από το κριτήριο παρεμβολής βρίσκουμε $\lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$.
Ομοίως, για $x < 0$ έχουμε

$$1 + x \leq \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \tfrac{f(x)}{x} \leq 1$$

οπότε $\lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$.
Άρα $f'(0) = 1$. □

85. *Βρείτε τα a, b ώστε η συνάρτηση $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{αν } x < 1 \\ bx + 1 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ να έχει παράγωγο στο 1.*

Λύση. Η δεξιά πλευρική παράγωγος στο 1 της συνάρτησης είναι

$$\lim_{x\to 1+} \tfrac{(bx+1)-(b+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+} b = b.$$

Επομένως πρέπει η αριστερή πλευρική παράγωγος στο 1 να υπάρχει και να είναι ίση με b:

$$\lim_{x\to 1-} \tfrac{(x^2+ax+b)-(b+1)}{x-1} = b.$$

Ισοδύναμα

$$\lim_{x\to 1-} \tfrac{x^2+ax-1}{x-1} = b. \tag{2}$$

Συνεπάγεται

$$\lim_{x\to 1-} (x^2 + ax - 1) = \lim_{x\to 1-} \tfrac{x^2+ax-1}{x-1} \lim_{x\to 1-} (x - 1) = b \cdot 0 = 0$$

και άρα $a = 0$. Με $a = 0$ η (2) γίνεται $\lim_{x\to 1-} \frac{x^2-1}{x-1} = b$ και άρα $b = \lim_{x\to 1-}(x + 1) = 2$. □

86. *Βρείτε την σχέση ανάμεσα στα a, b η οποία είναι ισοδύναμη με το να εφάπτονται σε κάποιο κοινό τους σημείο τα γραφήματα των συναρτήσεων $ax^2 + 3$ και $x^2 + bx + 1$.*

Λύση. Το να εφάπτονται τα γραφήματα σε κάποιο σημείο (x_0, y_0) σημαίνει ότι το σημείο (x_0, y_0) ανήκει και στα δύο γραφήματα και ότι τα δύο γραφήματα έχουν την ίδια εφαπτόμενη ευθεία στο κοινό τους σημείο (x_0, y_0). Η εφαπτόμενη ευθεία της $ax^2 + 3$ στο σημείο (x_0, y_0) έχει κλίση

$$\tfrac{d(ax^2+3)}{dx}\Big|_{x=x_0} = 2ax_0$$

και άρα έχει εξίσωση

$$y - y_0 = 2ax_0(x - x_0).$$

Η εφαπτόμενη ευθεία της $x^2 + bx + 1$ στο σημείο (x_0, y_0) έχει κλίση

$$\frac{d(x^2+bx+1)}{dx}\Big|_{x=x_0} = 2x_0 + b$$

και άρα έχει εξίσωση

$$y - y_0 = (2x_0 + b)(x - x_0).$$

Άρα τα δύο γραφήματα έχουν ίδια εφαπτόμενη ευθεία στο (x_0, y_0) αν και μόνο αν

$$2ax_0 = 2x_0 + b,$$

δηλαδή αν και μόνο αν οι δύο εφαπτόμενες ευθείες έχουν την ίδια κλίση.
Άρα τα δύο γραφήματα εφάπτονται σε κάποιο κοινό τους σημείο αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} y_0 &= ax_0^2 + 3 \\ y_0 &= x_0^2 + bx_0 + 1 \\ 2ax_0 &= 2x_0 + b \end{aligned} \tag{3}$$

(Οι πρώτες δύο εξισώσεις εκφράζουν το ότι το (x_0, y_0) ανήκει και στα δύο γραφήματα και η τρίτη εξίσωση εκφράζει το ότι στο σημείο αυτό τα γραφήματα έχουν την ίδια εφαπτόμενη ευθεία.)
Από την τρίτη εξίσωση έχουμε ότι

$$2(a-1)x_0 = b.$$

Αν $a = 1$, τότε $b = 0$ οπότε οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται $y_0 = x_0^2 + 3$ και $y_0 = x_0^2 + 1$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα $a \neq 1$ και τότε

$$x_0 = \frac{b}{2(a-1)}.$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις παίρνουμε $ax_0^2 + 3 = x_0^2 + bx_0 + 1$ ή, ισοδύναμα,

$$(a-1)x_0^2 + 2 = bx_0.$$

Με την τιμή του x_0 την οποία βρήκαμε η τελευταία εξίσωση είναι ισοδύναμη με

$$b^2 = 8(a-1). \tag{4}$$

Η σχέση (4) είναι η ζητούμενη. Πράγματι, παίρνοντας $x_0 = \frac{b}{2(a-1)}$, ικανοποιείται η τρίτη εξίσωση του συστήματος (3). Παίρνοντας επίσης

$$y_0 = ax_0^2 + 3 = \frac{ab^2}{4(a-1)^2} + 3$$

ικανοποιείται η πρώτη εξίσωση του συστήματος (3). Τότε όμως ικανοποιείται αυτομάτως και η δεύτερη εξίσωση του συστήματος (3) διότι λόγω της (4) έχουμε ότι $ax_0^2 + 3 = x_0^2 + bx_0 + 1$. □

87. *(i) Θεωρήστε την καμπύλη $y^6 = x^5$, δηλαδή το σύνολο των σημείων (x, y) τα οποία ικανοποιούν την σχέση $y^6 = x^5$. Η καμπύλη μπορεί να θεωρηθεί είτε ως ένωση των γραφημάτων των συναρτήσεων $y = \sqrt[6]{x^5}$ και $y = -\sqrt[6]{x^5}$ για $x \in [0, +\infty)$ είτε ως το γράφημα της συνάρτησης $x = \sqrt[5]{y^6}$ για $y \in (-\infty, +\infty)$. Βρείτε και με τους δύο τρόπους την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας σε κάθε σημείο της καμπύλης. Προσέξτε ιδιαιτέρως το σημείο $(0, 0)$ της καμπύλης.*
(ii) Να επαναλάβετε τα προηγούμενα για την καμπύλη $y^4 = x^5$. Μήπως τώρα υπάρχει κάποιο πρόβλημα με την εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(0, 0)$;

Λύση. (i) *Πρώτος τρόπος.* Επειδή $x^5 = y^6 \geq 0$, πρέπει να είναι $x \geq 0$. Θεωρούμε την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή και τότε έχουμε δύο τιμές για την y ως εξαρτημένη μεταβλητή: $y = \sqrt[6]{x^5} = x^{5/6}$ και $y = -\sqrt[6]{x^5} = -x^{5/6}$. Άρα η καμπύλη είναι η ένωση του γραφήματος της συνάρτησης

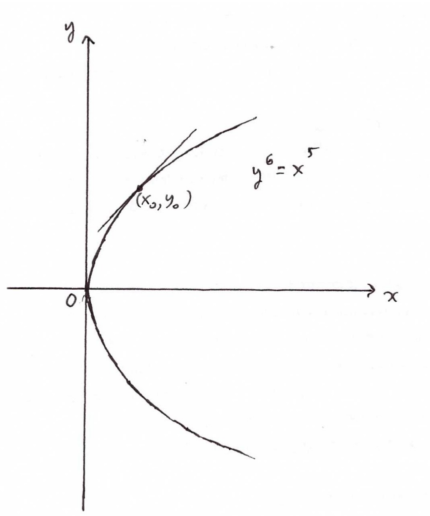
$y = x^{5/6}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$ και του γραφήματος της συνάρτησης $y = -x^{5/6}$ στο ίδιο διάστημα. (Το πρώτο γράφημα είναι στο πρώτο τεταρτημόριο και το δεύτερο είναι στο τέταρτο τεταρτημόριο.)

Έστω $x_0 > 0$ και το σημείο $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^{5/6})$ στο άνω μέρος της καμπύλης. Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο αυτό είναι

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = \frac{5}{6}\, x_0^{-1/6}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$y = \frac{5}{6}\, x_0^{-1/6}(x - x_0) + y_0 = \frac{5}{6}\, x_0^{-1/6}(x - x_0) + x_0^{5/6}.$$



Ομοίως, στο σημείο $(x_0, y_0) = (x_0, -x_0^{5/6})$ στο κάτω μέρος της καμπύλης η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = -\frac{5}{6}\, x_0^{-1/6}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$y = -\frac{5}{6}\, x_0^{-1/6}(x - x_0) + y_0 = -\frac{5}{6}\, x_0^{-1/6}(x - x_0) - x_0^{5/6}.$$

Τώρα έστω $x_0 = 0$ οπότε έχουμε το σημείο $(x_0, y_0) = (0, 0)$ της καμπύλης. Και οι δύο συναρτήσεις $y = x^{5/6}$ και $y = -x^{5/6}$ ορίζονται μόνο δεξιά του 0 οπότε ορίζονται οι δύο αντίστοιχες εφαπτόμενες ημιευθείες με αντίστοιχες κλίσεις

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0+} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^{5/6} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} x^{-1/6} = +\infty$$

και

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0+} = \lim_{x\to 0+} \frac{-x^{5/6} - 0}{x - 0} = -\lim_{x\to 0+} x^{-1/6} = -\infty.$$

Οι δύο αυτές ημιευθείες είναι αντίθετες: η πρώτη έχει κατεύθυνση προς πάνω και η δεύτερη προς κάτω. Άρα ορίζουν τον y-άξονα ως εφαπτόμενη ευθεία.

Δεύτερος τρόπος. Αν θεωρήσουμε την y ως ανεξάρτητη μεταβλητή στο $(-\infty, +\infty)$, τότε η x ως εξαρτημένη μεταβλητή ορίζεται μέσω του τύπου

$$x = \sqrt[5]{y^6} = |y|^{6/5} = \begin{cases} y^{6/5} & \text{αν } y \geq 0 \\ (-y)^{6/5} & \text{αν } y \leq 0 \end{cases}$$

Αν $y_0 > 0$ τότε στο σημείο $(x_0, y_0) = (y_0^{6/5}, y_0)$ η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της συνάρτησης είναι

$$\frac{dx}{dy}\Big|_{y=y_0} = \frac{6}{5}\, y_0^{1/5}$$

και η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι η

$$x = \tfrac{6}{5}\, y_0^{1/5}(y - y_0) + x_0 = \tfrac{6}{5}\, y_0^{1/5}(y - y_0) + y_0^{6/5}.$$

Αν $y_0 < 0$ τότε στο σημείο $(x_0, y_0) = ((-y_0)^{6/5}, y_0)$ η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της συνάρτησης είναι

$$\tfrac{dx}{dy}\big|_{y=y_0} = -\tfrac{6}{5}\,(-y_0)^{1/5}$$

και η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι η

$$x = -\tfrac{6}{5}\,(-y_0)^{1/5}(y - y_0) + x_0 = -\tfrac{6}{5}\,(-y_0)^{1/5}(y - y_0) + (-y_0)^{6/5}.$$

Αν $y_0 = 0$ τότε στο σημείο $(x_0, y_0) = (0, 0)$ η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο γράφημα της συνάρτησης είναι

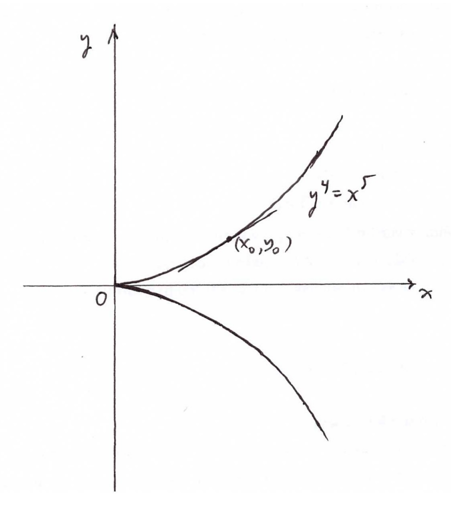
$$\tfrac{dx}{dy}\big|_{y=0} = 0$$

(γιατί;) και η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι η

$$x = 0(y - 0) + 0 = 0.$$

Αυτή είναι η εξίσωση του y-άξονα.

(ii) Επειδή $x^5 = y^4 \geq 0$, πρέπει να είναι $x \geq 0$. Θεωρούμε την x ως ανεξάρτητη μεταβλητή και έχουμε δύο τιμές για την y ως εξαρτημένη μεταβλητή: $y = x^{5/4}$ και $y = -x^{5/4}$. Άρα η καμπύλη είναι η ένωση του γραφήματος της συνάρτησης $y = x^{5/4}$ στο διάστημα $[0, +\infty)$ και του γραφήματος της συνάρτησης $y = -x^{5/4}$ στο ίδιο διάστημα. (Το πρώτο γράφημα είναι στο πρώτο τεταρτημόριο και το δεύτερο είναι στο τέταρτο τεταρτημόριο.)



Έστω $x_0 > 0$ και το σημείο $(x_0, y_0) = (x_0, x_0^{5/4})$ στο άνω μέρος της καμπύλης. Η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας στο σημείο αυτό είναι

$$\tfrac{dy}{dx}\big|_{x=x_0} = \tfrac{5}{4}\, x_0^{1/4}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$y = \tfrac{5}{4}\, x_0^{1/4}(x - x_0) + y_0 = \tfrac{5}{4}\, x_0^{1/4}(x - x_0) + x_0^{5/4}.$$

Ομοίως, στο σημείο $(x_0, y_0) = (x_0, -x_0^{5/4})$ στο κάτω μέρος της καμπύλης η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$\tfrac{dy}{dx}\big|_{x=x_0} = -\tfrac{5}{4}\, x_0^{1/4}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$y = -\tfrac{5}{4}\, x_0^{1/4}(x - x_0) + y_0 = -\tfrac{5}{4}\, x_0^{1/4}(x - x_0) - x_0^{5/4}.$$

Τώρα έστω $x_0 = 0$ οπότε έχουμε το σημείο $(x_0, y_0) = (0, 0)$ της καμπύλης. Και οι δύο συναρτήσεις $y = x^{5/4}$ και $y = -x^{5/4}$ ορίζονται μόνο δεξιά του 0 οπότε ορίζονται οι δύο αντίστοιχες εφαπτόμενες ημιευθείες με αντίστοιχες κλίσεις

$$\tfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0+} = \lim_{x\to 0+} \tfrac{x^{5/4}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0+} x^{1/4} = 0$$

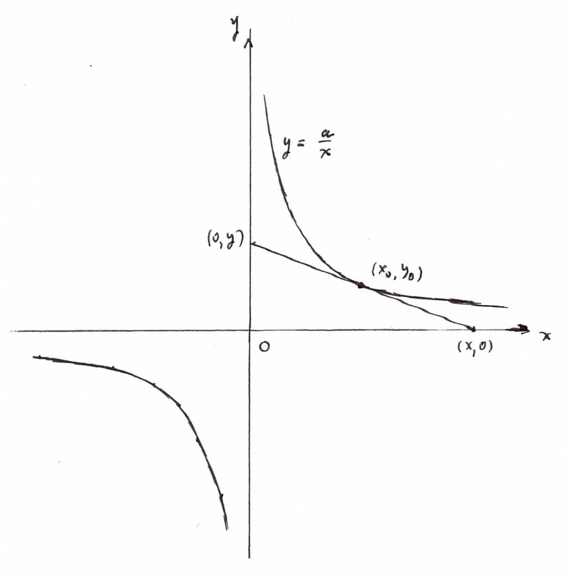
και

$$\tfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0+} = \lim_{x\to 0+} \tfrac{-x^{5/4}-0}{x-0} = -\lim_{x\to 0+} x^{1/4} = 0.$$

Οι δύο αυτές ημιευθείες ταυτίζονται: είναι και οι δύο ο θετικός x-ημιάξονας. Άρα ορίζουν εφαπτόμενη ημιευθεία, αλλά όχι εφαπτόμενη ευθεία. $\square$

88. *Έστω $a > 0$. Αποδείξτε ότι αν πάρουμε οποιαδήποτε ευθεία εφαπτόμενη στο γράφημα της $\frac{a}{x}$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα της το οποίο αποκόπτεται από τον x-άξονα και τον y-άξονα διχοτομείται από το σημείο επαφής (της εφαπτόμενης ευθείας με το γράφημα).*

Λύση. Έστω ότι η ευθεία εφάπτεται στο γράφημα στο σημείο (x_0, y_0).



Τότε

$$y_0 = \tfrac{a}{x_0} \tag{5}$$

και η κλίση της εφαπτόμενης ευθείας είναι ίση με

$$\tfrac{d}{dx}\left(\tfrac{a}{x}\right)\Big|_{x=x_0} = -\tfrac{a}{x^2}\Big|_{x=x_0} = -\tfrac{a}{x_0^2}$$

οπότε η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας είναι

$$y - y_0 = -\tfrac{a}{x_0^2}\,(x - x_0). \tag{6}$$

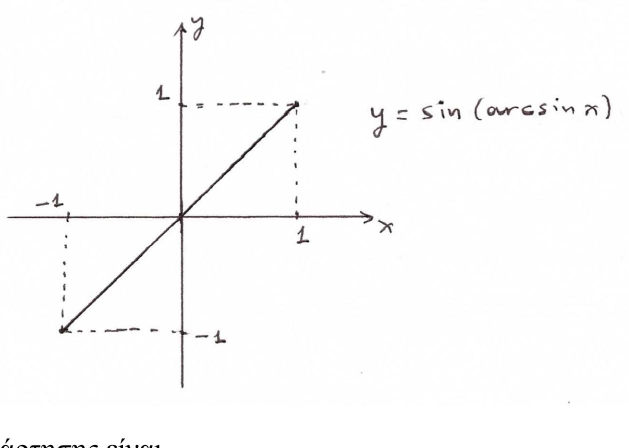
Το σημείο τομής της εφαπτόμενης ευθείας με τον x-άξονα ικανοποιεί την εξίσωση (6) και έχει την μορφή $(x, 0)$. Βρίσκουμε επομένως το x από την

$$0 - y_0 = -\tfrac{a}{x_0^2}\,(x - x_0)$$

δηλαδή
$$x = \frac{x_0^2 y_0}{a} + x_0 = 2x_0$$
λόγω της (5).
Το σημείο τομής της εφαπτόμενης ευθείας με τον y-άξονα ικανοποιεί την εξίσωση (6) και έχει την μορφή $(0, y)$ οπότε βρίσκουμε το y από την
$$y - y_0 = -\frac{a}{x_0^2}\,(0 - x_0)$$
δηλαδή
$$y = \frac{a}{x_0} + y_0 = \frac{2a}{x_0}$$
λόγω της (5).
Άρα το σημείο επαφής και τα σημεία τομής της εφαπτόμενης ευθείας με τον x-άξονα και με τον y-άξονα είναι αντιστοίχως τα:
$$(x_0, y_0) = (x_0, \tfrac{a}{x_0}), \qquad (2x_0, 0), \qquad (0, \tfrac{2a}{x_0}).$$
Άρα το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα δύο τελευταία σημεία είναι το σημείο
$$\left(\frac{2x_0+0}{2}, \frac{0+\frac{2a}{x_0}}{2}\right) = (x_0, \tfrac{a}{x_0}),$$
δηλαδή το σημείο επαφής. □

89. *Σχεδιάστε τα γραφήματα των συναρτήσεων:*
$$y = \sin(\arcsin x), \quad y = \cos(\arcsin x), \quad y = \arcsin(\sin x), \quad y = \arcsin(\cos x).$$
(Οι δύο πρώτες έχουν πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και οι δύο τελευταίες το $(-\infty, +\infty)$.)
Βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων με δύο τρόπους: με τον κανόνα αλυσίδας καθώς και με την βοήθεια των αντίστοιχων γραφημάτων.

Λύση. (i) Για $x \in [-1, 1]$ το $z = \arcsin x$ ορίστηκε ως ο (μοναδικός) αριθμός στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με την ιδιότητα $\sin z = x$. Άρα προφανώς:
$$y = \sin(\arcsin x) = x \qquad \text{για κάθε } x \in [-1, 1].$$
Το γράφημα της συνάρτησης $y = \sin(\arcsin x)$ είναι:



Η παράγωγος της συνάρτησης είναι
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1 \qquad \text{για κάθε } x \in [-1, 1].$$

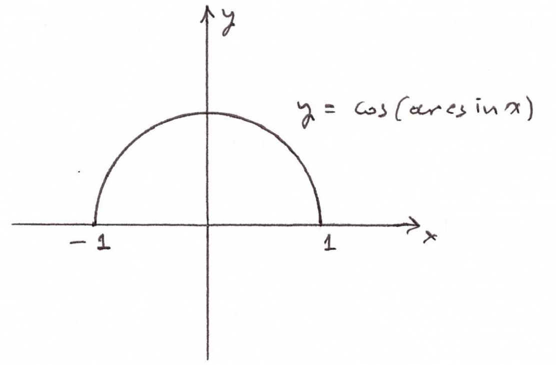
Αυτό είναι φανερό και στο γράφημα: έχει σταθερή κλίση 1.
Με τον κανόνα αλυσίδας έχουμε μέσω της ενδιάμεσης μεταβλητής $z = \arcsin x$ και της $y = \sin z$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = \cos z \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \cos z \, \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 z}} = \cos z \, \frac{1}{\cos z} = 1.$$

Χρησιμοποιήσαμε το $\sqrt{1-\sin^2 z} = \cos z$ το οποίο ισχύει διότι $\cos z \geq 0$ για $z \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
(ii) Όπως στο (i), για $x \in [-1, 1]$ το $z = \arcsin x$ είναι ο (μοναδικός) αριθμός στο $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ με την ιδιότητα $\sin z = x$. Άρα:

$$y = \cos(\arcsin x) = \cos z = \sqrt{1-\sin^2 z} = \sqrt{1-x^2} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1, 1].$$

Το γράφημα της συνάρτησης $y = \cos(\arcsin x)$ είναι το ημικύκλιο:



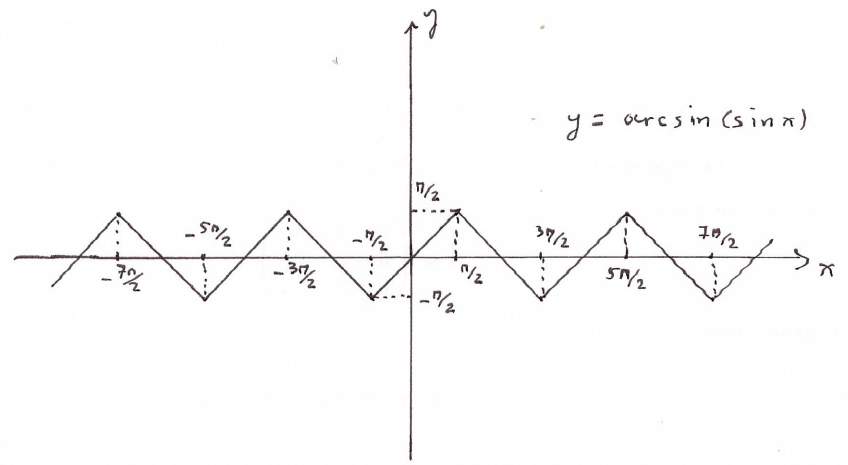
Η παράγωγος της συνάρτησης είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\sqrt{1-x^2}}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{για κάθε } x \in [-1, 1].$$

Παρατηρήστε ότι στο -1 η παράγωγος είναι $+\infty$ και στο 1 η παράγωγος είναι $-\infty$.
Με τον κανόνα αλυσίδας έχουμε μέσω της ενδιάμεσης μεταβλητής $z = \arcsin x$ και της $y = \cos z$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = -\sin z \, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(iii) Η συνάρτηση $y = \arcsin(\sin x)$ μελετήθηκε στην άσκηση 20. Είδαμε ότι σε κάθε διάστημα $[-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi]$ με $k \in \mathbb{Z}$ η συνάρτηση έχει τύπο $y = x-k\pi$ αν το k είναι άρτιο και $y = -x+k\pi$ αν το k είναι περιττό. Το γράφημα της συνάρτησης είναι το:

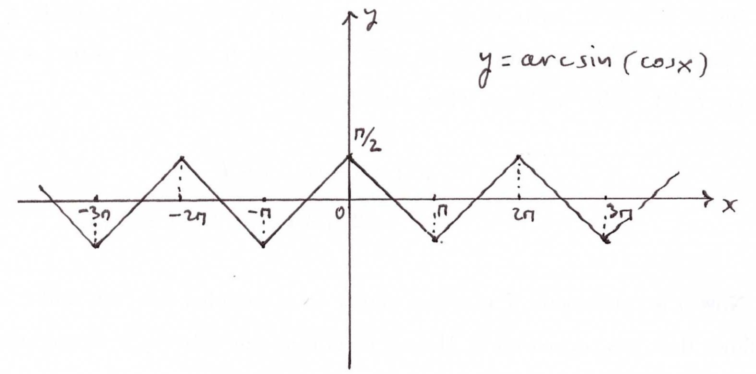


Η παράγωγος της συνάρτησης στο *ανοικτό* διάστημα $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ είναι σταθερή $+1$ αν το k είναι άρτιο και σταθερή -1 αν το k είναι περιττό. Στα σημεία $\frac{\pi}{2} + k\pi$ δεν υπάρχει παράγωγος: στο γράφημα σχηματίζεται γωνία στα σημεία αυτά.

(iv) Για την συνάρτηση $y = \arcsin(\cos x)$ μπορούμε να επαναλάβουμε τα ίδια με το (iii), αλλά είναι καλύτερα να παρατηρήσουμε ότι

$$y = \arcsin(\cos x) = \arcsin(\sin(x + \tfrac{\pi}{2}))$$

οπότε το γράφημα της συνάρτησης προκύπτει από το γράφημα της συνάρτησης στο (iii) με οριζόντια μεταφορά κατά $-\frac{\pi}{2}$:



□

90. *Θεωρήστε την συνάρτηση* $\begin{cases} x^a \sin(1/x) & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ *αν και μόνο αν* $a > 0$ *και ότι είναι παραγωγίσιμη στο* $[0, +\infty)$ *αν και μόνο αν* $a > 1$. *Αποδείξτε ότι η παράγωγος είναι συνεχής στο* $[0, +\infty)$ *αν και μόνο αν* $a > 2$.

Λύση. (i) Αν $a > 0$ τότε έχουμε

$$\lim_{x \to 0+} x^a \sin \tfrac{1}{x} = 0$$

διότι $\lim_{x \to 0+} x^a = 0$ και η $\sin \frac{1}{x}$ είναι φραγμένη. Άρα η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0 και άρα σε ολόκληρο το $[0, +\infty)$.

Αν $a = 0$ τότε το $\lim_{x \to 0+} x^a \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0+} \sin \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει και άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο 0.

Αν $a < 0$ και υποθέσουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο 0 τότε

$$\lim_{x \to 0+} x^a \sin \tfrac{1}{x} = 0$$

οπότε, επειδή $\lim_{x \to 0+} x^{-a} = 0$, βρίσκουμε

$$\lim_{x \to 0+} \sin \tfrac{1}{x} = \lim_{x \to 0+} x^{-a} x^a \sin \tfrac{1}{x} = \lim_{x \to 0+} x^{-a} \lim_{x \to 0+} x^a \sin \tfrac{1}{x} = 0 \cdot 0 = 0$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.

(ii) Αν $a > 1$ τότε

$$\lim_{x \to 0+} \tfrac{x^a \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} x^{a-1} \sin \tfrac{1}{x} = 0$$

διότι $\lim_{x \to 0+} x^{a-1} = 0$ και η $\sin \frac{1}{x}$ είναι φραγμένη. Άρα η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο 0 και άρα σε ολόκληρο το $[0, +\infty)$. Η τιμή της παραγώγου στο 0 είναι 0.

Αν $a = 1$ τότε το

$$\lim_{x \to 0+} \tfrac{x^a \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \tfrac{x \sin \frac{1}{x}}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \sin \tfrac{1}{x}$$

δεν υπάρχει και άρα η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
Αν $a < 1$ τότε, όπως είδαμε στο (i), το

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^a \sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0+} x^{a-1} \sin\frac{1}{x}$$

δεν υπάρχει οπότε η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.
(iii) Για να μελετήσουμε την παράγωγο στο $[0, +\infty)$ υποθέτουμε (βάσει του (ii)) ότι $a > 1$ και τότε η παράγωγος δίνεται από τον τύπο

$$\begin{cases} ax^{a-1}\sin(1/x) - x^{a-2}\cos(1/x) & \text{αν } x > 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Αν $a > 2$ τότε έχουμε

$$\lim_{x\to 0+} \left(ax^{a-1}\sin\tfrac{1}{x} - x^{a-2}\cos\tfrac{1}{x}\right) = 0$$

διότι $\lim_{x\to 0+} x^{a-1} = \lim_{x\to 0+} x^{a-2} = 0$ και οι $\sin\frac{1}{x}$ και $\cos\frac{1}{x}$ είναι φραγμένες. Άρα η παράγωγος είναι συνεχής στο 0 και άρα σε ολόκληρο το $[0, +\infty)$.
Αν $a = 2$ τότε το

$$\lim_{x\to 0+} \left(ax^{a-1}\sin\tfrac{1}{x} - x^{a-2}\cos\tfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0+} \left(2x\sin\tfrac{1}{x} - \cos\tfrac{1}{x}\right)$$

δεν υπάρχει διότι $\lim_{x\to 0+} 2x\sin\frac{1}{x} = 0$ αλλά το $\lim_{x\to 0+}\cos\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει. Άρα η παράγωγος δεν είναι συνεχής στο 0.
Αν $1 < a < 2$ και υποθέσουμε ότι η παράγωγος είναι συνεχής στο 0 τότε

$$\lim_{x\to 0+} \left(ax^{a-1}\sin\tfrac{1}{x} - x^{a-2}\cos\tfrac{1}{x}\right) = 0$$

και, επειδή $\lim_{x\to 0+} ax^{a-1}\sin\frac{1}{x} = 0$, έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0+} x^{a-2}\cos\tfrac{1}{x} = 0.$$

Τότε, επειδή $\lim_{x\to 0+} x^{2-a} = 0$, συνεπάγεται

$$\lim_{x\to 0+}\cos\tfrac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} x^{2-a}x^{a-2}\cos\tfrac{1}{x} = \lim_{x\to 0+} x^{2-a} \lim_{x\to 0+} x^{a-2}\cos\tfrac{1}{x} = 0\cdot 0 = 0$$

και καταλήγουμε σε άτοπο αφού το $\lim_{x\to 0+}\cos\frac{1}{x}$ δεν υπάρχει. □

91. *Αν η $r(x)$ είναι ρητή συνάρτηση τότε αποδείξτε ότι $\lim_{x\to+\infty}\frac{xr'(x)}{r(x)} = 0$ αν και μόνο αν οι βαθμοί των πολυωνύμων στον αριθμητή και στον παρονομαστή της συνάρτησης είναι ίσοι.*

Λύση. Έστω $r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots}$ με $a_n \neq 0$ και $b_m \neq 0$.
Αν $n \neq m$ τότε

$$r'(x) = \frac{(na_n x^{n-1} + \cdots)(b_m x^m + \cdots) - (a_n x^n + \cdots)(mb_m x^{m-1} + \cdots)}{(b_m x^m + \cdots)^2} = \frac{(n-m)a_n b_m x^{n+m-1} + \cdots}{(b_m x^m + \cdots)^2}$$

οπότε

$$\frac{xr'(x)}{r(x)} = \frac{(n-m)a_n b_m x^{n+m} + \cdots}{(a_n x^n + \cdots)(b_m x^m + \cdots)}$$

και άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{xr'(x)}{r(x)} = n - m \neq 0$.
Τώρα έστω $n = m$ οπότε $r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots}$. Μετά από λίγες πράξεις βρίσκουμε

$$r'(x) = \frac{(a_n b_{n-1} - a_{n-1}b_n)x^{2n-2} + \cdots}{(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots)^2}$$

οπότε

$$\frac{xr'(x)}{r(x)} = \frac{(a_n b_{n-1} - a_{n-1}b_n)x^{2n-1} + \cdots}{(a_n x^n + \cdots)(b_n x^n + \cdots)}$$

και άρα $\lim_{x\to+\infty}\frac{xr'(x)}{r(x)} = 0$. □

92. *Στο xy-επίπεδο ένα όχημα με ζεύγος συντεταγμένων (x, y) κινείται (με μη-μηδενική ταχύτητα) πάνω στην καμπύλη με εξίσωση $y^3 - y = 2x^3 - 2x$. Αποδείξτε ότι οι θέσεις του οχήματος στις οποίες ο ρυθμός μεταβολής του y (ως προς τον χρόνο) είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής του x (ως προς τον χρόνο) είναι οι:* $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ *και* $(-1,-1)$.

Λύση. Έστω $(x(t), y(t))$ η θέση του οχήματος την χρονική στιγμή t. Το ότι το όχημα κινείται πάνω στην δοσμένη καμπύλη ισοδυναμεί με

$$y(t)^3 - y(t) = 2x(t)^3 - 2x(t) \qquad \text{για κάθε } t. \tag{7}$$

Παραγωγίζουμε αυτήν την σχέση χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας και βρίσκουμε

$$(3y(t)^2 - 1)y'(t) = 2(3x(t)^2 - 1)x'(t) \qquad \text{για κάθε } t. \tag{8}$$

Έστω ότι την χρονική στιγμή t_0 η θέση του οχήματος είναι $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ και ο ρυθμός μεταβολής του y (ως προς τον χρόνο) είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής του x (ως προς τον χρόνο), δηλαδή

$$y'(t_0) = 2x'(t_0). \tag{9}$$

Με την (9) η (8) γίνεται

$$(3y_0^2 - 1)2x'(t_0) = 2(3x_0^2 - 1)x'(t_0). \tag{10}$$

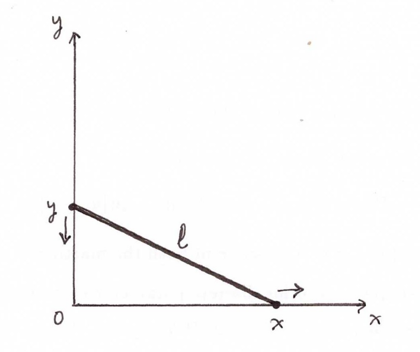
Αν $x'(t_0) = 0$ τότε η (9) δίνει $y'(t_0) = 0$ οπότε η (διανυσματική) ταχύτητα του οχήματος την χρονική στιγμή t_0 είναι $(x'(t_0), y'(t_0)) = (0,0)$ το οποίο είναι άτοπο. Άρα η (10) γίνεται $3y_0^2 - 1 = 3x_0^2 - 1$ ή, ισοδύναμα, $y_0 = \pm x_0$. Τώρα η (7) με $t = t_0$ δίνει

$$y_0^3 - y_0 = 2x_0^3 - 2x_0$$

και με $y_0 = \pm x_0$ παίρνουμε $x_0^3 = x_0$. Άρα $x_0 = 0$ ή $x_0 = 1$ ή $x_0 = -1$ και, λόγω της $y_0 = \pm x_0$, το (x_0, y_0) μπορεί να είναι ένα από τα $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ και $(-1,-1)$. □

93. *Μία μεταλλική ράβδος μήκους l έχει το ένα άκρο της στην πλευρά Ox και το άλλο άκρο της στην άλλη πλευρά Oy μίας ορθής γωνίας. Αν το άκρο x απομακρύνεται από την κορυφή O της γωνίας με σταθερή ταχύτητα v βρείτε την ταχύτητα με την οποία το άκρο y πλησιάζει την κορυφή O. Ειδικώτερα, ποιά είναι η ταχύτητα του άκρου y όταν το άκρο x ξεκινάει από την κορυφή O καθώς και όταν το άκρο x φτάνει στην θέση l. Βρείτε επίσης τον ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x.*

Λύση. Έχουμε το εξής σχήμα:



Τα x, y συνδέονται με την σχέση

$$x^2 + y^2 = l^2 \text{ (σταθερό)}. \tag{11}$$

Τα x, y είναι συναρτήσεις $x(t), y(t)$ του χρόνου και γνωρίζουμε ότι

$$\frac{dx}{dt} = v \text{ (σταθερό)}.$$

Παραγωγίζουμε την σχέση (11) ως προς t και με τον κανόνα αλυσίδας βρίσκουμε:

$$2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt} = 0.$$

Άρα η ταχύτητα του y είναι:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\,\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{y}\,v.$$

Η ταχύτητα του y δεν είναι σταθερή: εξαρτάται από τον λόγο $\frac{x}{y}$.
Όταν το άκρο x ξεκινάει από την κορυφή O, δηλαδή όταν $x = 0$, τότε το y είναι ίσο με l και η ταχύτητα του y είναι $-\frac{x}{y}\,v = -\frac{0}{l}\,v = 0$. Όταν το άκρο x φτάνει στην θέση l, δηλαδή όταν $x = l$, τότε το y είναι ίσο με 0 και η ταχύτητα του y είναι $-\frac{x}{y}\,v = -\frac{l}{0}\,v$ και προκύπτει απροσδιόριστη μορφή. Σ' αυτήν την περίπτωση πρέπει να σκεφτούμε τί γίνεται όταν το x πλησιάζει το l από αριστερά του, δηλαδή όταν $x \to l-$. Τότε $y \to 0+$ και για την ταχύτητα του y έχουμε ότι

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\,v \to -\infty.$$

Για να βρούμε τον ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x, δηλαδή το $\frac{dy}{dx}$, παραγωγίζουμε την (11) ως προς x:

$$2x + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

οπότε $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. □

94. *Παρατηρήστε ότι τα όρια*

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x-1}$$

είναι γνωστές παράγωγοι συγκεκριμένων συναρτήσεων σε συγκεκριμένα σημεία. Βάσει των ορίων αυτών βρείτε τα όρια

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x^a-1}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^a-x^b}{x-1}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}.$$

Λύση. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\log x-\log 1}{x-1} = \frac{d\log x}{dx}\Big|_{x=1} = \frac{1}{x}\Big|_{x=1} = 1.\\
\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^0}{x-0} = \frac{de^x}{dx}\Big|_{x=0} = e^x\Big|_{x=0} = 1.\\
\lim_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{x^a-1^a}{x-1} = \frac{dx^a}{dx}\Big|_{x=1} = ax^{a-1}\Big|_{x=1} = a.
\end{aligned} \tag{12}$$

Τα επόμενα όρια υπολογίζονται από τα όρια στην (12) ως εξής:

(i)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x^a-1} = \frac{1}{a}\lim_{x\to 1} \frac{\log x^a}{x^a-1} = \frac{1}{a}\lim_{y\to 1} \frac{\log y}{y-1} = \frac{1}{a}.$$

(ii)

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^a-x^b}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^a-1}{x-1} - \lim_{x\to 1} \frac{x^b-1}{x-1} = a-b$$

αλλά και

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^a-x^b}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^b\,\frac{x^{a-b}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x^b\,\lim_{x\to 1} \frac{x^{a-b}-1}{x-1} = 1^b(a-b) = a-b.$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{b^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log a}-1}{x} - \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log b}-1}{x}\\
&= \log a\,\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log a}-1}{x\log a} - \log b\,\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log b}-1}{x\log b}\\
&= \log a\,\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} - \log b\,\lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = \log a - \log b = \log\frac{a}{b}.
\end{aligned}$$

αλλά και

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{a^x-b^x}{x}=\lim_{x\to 0}b^x\,\tfrac{(a/b)^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}b^x\,\lim_{x\to 0}\tfrac{(a/b)^x-1}{x}$$
$$=b^0\,\lim_{x\to 0}\tfrac{e^{x\log(a/b)}-1}{x}=\log\tfrac{a}{b}\,\lim_{x\to 0}\tfrac{e^{x\log(a/b)}-1}{x\log(a/b)}=\log\tfrac{a}{b}\,\lim_{y\to 0}\tfrac{e^y-1}{y}=\log\tfrac{a}{b}.$$

(iv)

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\tfrac{e^{ax}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\tfrac{e^{bx}-1}{x}=a\lim_{x\to 0}\tfrac{e^{ax}-1}{ax}-b\lim_{x\to 0}\tfrac{e^{bx}-1}{bx}$$
$$=a\lim_{y\to 0}\tfrac{e^y-1}{y}-b\lim_{y\to 0}\tfrac{e^y-1}{y}=a-b$$

αλλά και

$$\lim_{x\to 0}e^{bx}\,\tfrac{e^{(a-b)x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}e^{bx}\,\lim_{x\to 0}\tfrac{e^{(a-b)x}-1}{x}=e^0\,(a-b)\lim_{x\to 0}\tfrac{e^{(a-b)x}-1}{(a-b)x}$$
$$=(a-b)\lim_{y\to 0}\tfrac{e^y-1}{y}=a-b.$$

□

95. *Έστω $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ και $0<\xi<+\infty$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο ξ αποδείξτε ότι:*

$$\lim_{x\to\xi}\big(\tfrac{f(x)}{f(\xi)}\big)^{1/(x-\xi)}=e^{f'(\xi)/f(\xi)},\qquad \lim_{x\to\xi}\big(\tfrac{f(x)}{f(\xi)}\big)^{1/(\log x-\log\xi)}=e^{\xi f'(\xi)/f(\xi)}.$$

Λύση. (i)

$$\lim_{x\to\xi}\big(\tfrac{f(x)}{f(\xi)}\big)^{1/(x-\xi)}=\lim_{x\to\xi}e^{\frac{1}{x-\xi}\,\log\frac{f(x)}{f(\xi)}}=\lim_{x\to\xi}e^{\frac{\log f(x)-\log f(\xi)}{x-\xi}}=e^{\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}$$

λόγω συνέχειας της εκθετικής συνάρτησης και διότι από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\lim_{x\to\xi}\tfrac{\log f(x)-\log f(\xi)}{x-\xi}=\tfrac{d\log f(x)}{dx}\Big|_{x=\xi}=\tfrac{f'(\xi)}{f(\xi)}.$$

(ii)

$$\lim_{x\to\xi}\big(\tfrac{f(x)}{f(\xi)}\big)^{1/(\log x-\log\xi)}=\lim_{x\to\xi}e^{\frac{1}{\log x-\log\xi}\,\log\frac{f(x)}{f(\xi)}}=\lim_{x\to\xi}e^{\frac{\log f(x)-\log f(\xi)}{\log x-\log\xi}}=e^{\frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)}}$$

λόγω συνέχειας της εκθετικής συνάρτησης και διότι

$$\lim_{x\to\xi}\tfrac{\log f(x)-\log f(\xi)}{\log x-\log\xi}=\lim_{x\to\xi}\tfrac{\log f(x)-\log f(\xi)}{x-\xi}\,\lim_{x\to\xi}\tfrac{x-\xi}{\log x-\log\xi}$$
$$=\lim_{x\to\xi}\tfrac{\log f(x)-\log f(\xi)}{x-\xi}\Big/\lim_{x\to\xi}\tfrac{\log x-\log\xi}{x-\xi}$$
$$=\tfrac{d\log f(x)}{dx}\Big|_{x=\xi}\Big/\tfrac{d\log x}{dx}\Big|_{x=\xi}=\tfrac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)}.$$

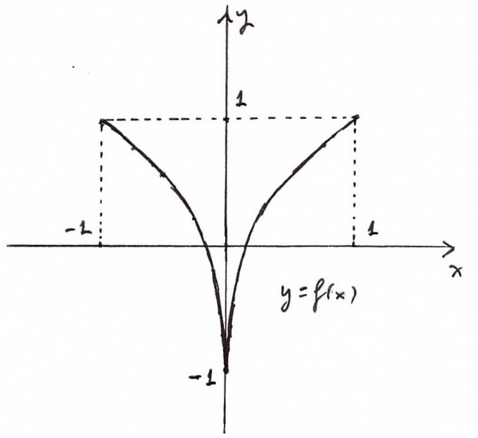
□

96. *Θεωρήστε την $f(x)=2\sqrt[3]{x^2}-1=2|x|^{2/3}-1$ και παρατηρήστε ότι έχει την ίδια τιμή 1 στα σημεία 1 και -1. Το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle είναι ότι υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης. Υπάρχει τέτοιο ξ και ποιό είναι το πρόβλημα;*

Λύση. Η παράγωγος της f έχει τύπο

$$f'(x)=\begin{cases}(4/3)|x|^{-1/3}, & \text{αν } x>0\\ -(4/3)|x|^{-1/3}, & \text{αν } x<0\end{cases}$$

Η f δεν έχει παράγωγο στο 0 αφού μπορούμε εύκολα να δούμε (με το όριο του λόγου διαφορών) ότι $f'_-(0)=-\infty$ και $f'_+(0)=+\infty$.
Είναι σαφές ότι δεν υπάρχει $\xi\in(-1,1)$ στο οποίο μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης. Επομένως το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle δεν ισχύει, και αυτό οφείλεται στο ότι ούτε οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle ισχύουν όλες: η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και $f(-1)=f(1)$ αλλά δεν είναι σωστό ότι η f έχει παράγωγο στο εσωτερικό του $[-1,1]$.



□

97. *Έστω $a < b$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ξ ώστε*
(i) $a < \xi < b$ και $e^b - e^a = (b-a)e^\xi$.
(ii) $a < \xi < b$ και $\cos b - \cos a = -(e^b - e^a)e^{-\xi}\sin\xi$.

Λύση. (i) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange στην συνάρτηση $f(x) = e^x$ στο διάστημα $[a,b]$.

(ii) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy στις συναρτήσεις $f(x) = \cos x$ και $g(x) = e^x$ στο διάστημα $[a,b]$.

Προσοχή: δεν μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα εφαρμόζοντας δύο φορές το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange, μία φορά για την συνάρτηση $f(x) = \cos x$ και μία φορά για την $g(x) = e^x$. Αν κάνουμε κάτι τέτοιο, θα έχουμε ότι υπάρχει κάποιο $\xi_1 \in (a,b)$ ώστε $\frac{\cos b - \cos a}{b-a} = -\sin\xi_1$ και ότι υπάρχει κάποιο $\xi_2 \in (a,b)$ ώστε $\frac{e^b-e^a}{b-a} = e^{\xi_2}$, αλλά τα ξ_1, ξ_2 *μπορεί να είναι διαφορετικά.*

Για να κατανοήσουμε ακριβώς τί γίνεται, ας θεωρήσουμε ένα πολύ συγκεκριμένο παράδειγμα όπου υπολογίζονται ακριβώς τα διάφορα ξ.

Το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange για την συνάρτηση $f(x) = x^3$ στο διάστημα $[0,1]$ λέει ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $\frac{1^3-0^3}{1-0} = 3\xi^2$. Αμέσως υπολογίζουμε: $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange για την συνάρτηση $g(x) = x^2$ στο διάστημα $[0,1]$ λέει ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $\frac{1^2-0^2}{1-0} = 2\xi$. Υπολογίζουμε: $\xi = \frac{1}{2}$. Βλέπουμε ότι τα δύο ξ είναι διαφορετικά. Το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy για τις συναρτήσεις $f(x) = x^3$ και $g(x) = x^2$ (ταυτόχρονα) στο διάστημα $[0,1]$ λέει ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $\frac{1^3-0^3}{1^2-0^2} = \frac{3\xi^2}{2\xi}$. Υπολογίζουμε: $\xi = \frac{2}{3}$. Αυτό είναι ένα τρίτο ξ διαφορετικό από τα άλλα δύο. □

98. *Έστω $a < b$. Αποδείξτε ότι $e^a < \frac{e^b-e^a}{b-a} < e^b$.*

Λύση. Στην προηγούμενη άσκηση είδαμε ότι υπάρχει ξ ώστε $a < \xi < b$ και $e^b - e^a = (b-a)e^\xi$. Τώρα η ανισότητα την οποία θέλουμε να αποδείξουμε προκύπτει από την $e^a < e^\xi < e^b$. □

99. *Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $[0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και έστω ότι ισχύει $f'(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.*

Λύση. Για κάθε $x > 0$ εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange στο διάστημα $[0,x]$ και παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi) \geq 1.$$

Επομένως ισχύει $f(x) \geq x + f(0)$ για κάθε $x > 0$ οπότε το συμπέρασμα προκύπτει από το $\lim_{x\to+\infty}(x + f(0)) = +\infty$. □

100. *Έστω ότι ισχύει* $|f'(x)| \leq \frac{1}{x}$ *για κάθε* $x \geq 1$. *Αποδείξτε ότι* $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x+\sqrt{x})-f(x)\big) = 0$.

Λύση. Έστω $x > 1$. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange, υπάρχει ξ ώστε $x < \xi < x + \sqrt{x}$ και

$$\left|\frac{f(x+\sqrt{x})-f(x)}{(x+\sqrt{x})-x}\right| = |f'(\xi)| \leq \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}.$$

Συνεπάγεται

$$\big|f(x+\sqrt{x})-f(x)\big| < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

και, επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{x\to+\infty}\big(f(x+\sqrt{x})-f(x)\big) = 0$. □

101. *Έστω* $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *συνεχής στο* $[0,+\infty)$ *και παραγωγίσιμη στο* $(0,+\infty)$, *έστω* $f(0) = 0$ *και έστω ότι η* f' *είναι αύξουσα στο* $(0,+\infty)$. *Αποδείξτε ότι η συνάρτηση* $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ *είναι αύξουσα στο* $(0,+\infty)$.

Λύση. Έχουμε ότι

$$g'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \qquad \text{για κάθε } x > 0.$$

Αν $x > 0$, εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange στο διάστημα $[0,x]$, παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0,x)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(\xi) \leq f'(x).$$

Άρα ισχύει $xf'(x) - f(x) \geq 0$ και επομένως $g'(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$. Άρα η g είναι αύξουσα στο $(0,+\infty)$. □

102. *Αν* $0 < x_1 < x_2$ *αποδείξτε ότι* $\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}-1} < \frac{1}{x_2-x_1}\log\frac{e^{x_2}-1}{e^{x_1}-1} < \frac{e^{x_1}}{e^{x_1}-1}$.

Λύση. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \log(e^x - 1)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. Αν $0 < x_1 < x_2$ τότε η f είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange, υπάρχει $\xi \in (x_1,x_2)$ ώστε $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi)$ ή, ισοδύναμα,

$$\frac{1}{x_2-x_1}\log\frac{e^{x_2}-1}{e^{x_1}-1} = \frac{e^{\xi}}{e^{\xi}-1}.$$

Η συνάρτηση $g(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$ στο $(0,+\infty)$ έχει παράγωγο $g'(x) = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2} < 0$ οπότε η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Άρα από $x_1 < \xi < x_2$ συνεπάγεται

$$\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}-1} < \frac{e^{\xi}}{e^{\xi}-1} < \frac{e^{x_1}}{e^{x_1}-1}$$

και επομένως $\frac{e^{x_2}}{e^{x_2}-1} < \frac{1}{x_2-x_1}\log\frac{e^{x_2}-1}{e^{x_1}-1} < \frac{e^{x_1}}{e^{x_1}-1}$. □

103. *Έστω* f *συνεχής στο* $[-1,3]$, $f(3) = -7$ *και έστω ότι ισχύει* $f'(x) \geq -2$ *στο* $(-1,3)$.

(i) Αποδείξτε ότι $f(-1) \leq 1$.

(ii) Αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $f(-1) = 1$, *αποδείξτε ότι ισχύει* $f(x) = -2x - 1$ *στο* $[-1,3]$.

Λύση. (i) Από το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange έχουμε ότι

$$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = f'(\xi)$$

για κάποιο $\xi \in (-1,3)$. Επομένως $\frac{-7-f(-1)}{4} \geq -2$ και άρα $f(-1) \leq 1$.

(ii) Τώρα έστω επιπλέον ότι $f(-1) = 1$. Τότε η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) + 2x + 1$$

είναι συνεχής στο $[-1,3]$ με $g(-1) = g(3) = 0$. Ισχύει

$$g'(x) = f'(x) + 2 \geq 0$$

στο $(-1,3)$ οπότε η g είναι αύξουσα στο $[-1,3]$. Οι τιμές της g στα άκρα του $[-1,3]$ είναι ίσες οπότε η g είναι σταθερή στο $[-1,3]$. Άρα ισχύει $g(x) = 0$ δηλαδή $f(x) = -2x-1$ στο $[-1,3]$ □

104. *Έστω* $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ *συνεχής στο* $[a,b)$ *και παραγωγίσιμη στο* (a,b) *και έστω ότι ισχύει* $f'(x) \geq \mu$ *για κάθε* $x \in (a,b)$. *Αποδείξτε ότι* $f(x) \geq f(a) + \mu(x-a)$ *για κάθε* $x \in [a,b)$.

Λύση. Έστω $x \in (a,b)$. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange υπάρχει $\xi \in (a,x)$ ώστε

$$\tfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi) \geq \mu$$

από το οποίο συνεπάγεται $f(x) \geq f(a) + \mu(x-a)$. Η ανισότητα αυτή ισχύει προφανώς και για $x = a$ ως ισότητα.
Υπάρχει και δεύτερος τρόπος. Η συνάρτηση

$$g(x) = f(x) - f(a) - \mu(x-a)$$

είναι συνεχής στο $[a,b)$ και έχει παράγωγο

$$g'(x) = f'(x) - \mu \geq 0$$

στο (a,b). Άρα η g είναι αύξουσα στο $[a,b)$ οπότε για κάθε $x \in [a,b)$ ισχύει

$$f(x) - f(a) - \mu(x-a) = g(x) \geq g(a) = 0.$$

□

105. *Αποδείξτε ότι η* $(1+\frac{1}{x})^x$ *είναι γνησίως αύξουσα στο* $(0,+\infty)$.

Λύση. Επειδή $(1+\frac{1}{x})^x = e^{x\log(1+\frac{1}{x})}$, μπορούμε ισοδύναμα να αποδείξουμε ότι η $x\log(1+\frac{1}{x})$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.
Τώρα, κάνουμε μία τελευταία απλοποίηση βλέποντας εύκολα ότι μπορούμε ισοδύναμα να αποδείξουμε ότι η

$$f(x) = \tfrac{1}{x}\,\log(1+x)$$

είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.
Είναι

$$f'(x) = -\tfrac{1}{x^2}\,\log(1+x) + \tfrac{1}{x(1+x)}$$

οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι ισχύει $\frac{1}{x^2}\,\log(1+x) > \frac{1}{x(1+x)}$ ή, ισοδύναμα,

$$\log(1+x) - \tfrac{x}{x+1} > 0 \qquad \text{για κάθε } x > 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $h(x) = \log(1+x) - \frac{x}{x+1}$ στο $[0,+\infty)$ με παράγωγο

$$h'(x) = \tfrac{1}{x+1} - \tfrac{1}{(x+1)^2} = \tfrac{x}{(x+1)^2}.$$

Επειδή ισχύει $h'(x) > 0$ για κάθε $x > 0$, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και άρα ισχύει $h(x) > h(0) = 0$ για κάθε $x > 0$. □

106. *Έστω* $p > 1$.
(i) Αποδείξτε ότι $px^{p-1} < (x+1)^p - x^p < p(x+1)^{p-1}$ *για κάθε* $x \geq 0$.
(ii) Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας (x_n) *με τύπο* $x_n = \frac{1^{p-1}+2^{p-1}+\cdots+n^{p-1}}{n^p}$.

Λύση. (i) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x^p$ για $x \geq 0$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange στο διάστημα $[x,x+1]$: υπάρχει $\xi \in (x,x+1)$ ώστε

$$(x+1)^p - x^p = \tfrac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} = f'(\xi) = p\xi^{p-1}.$$

Έχουμε ότι $px^{p-1} < p\xi^{p-1} < p(x+1)^{p-1}$ και άρα

$$px^{p-1} < (x+1)^p - x^p < p(x+1)^{p-1}.$$

(ii) Εφαρμόζουμε την πρώτη ανισότητα του (i) για $x = 1, 2, \ldots, n$ και, προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες οι οποίες προκύπτουν, παίρνουμε

$$p(1^{p-1} + \cdots + n^{p-1}) < (n+1)^p - 1.$$

Εφαρμόζουμε τώρα την δεύτερη ανισότητα τού (i) για $x = 0, 1, \ldots, n-1$ και, προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$n^p < p(1^{p-1} + \cdots + n^{p-1}).$$

Έτσι έχουμε ότι $n^p < p\left(1^{p-1} + 2^{p-1} + \cdots + n^{p-1}\right) < (n+1)^p - 1$ οπότε

$$\tfrac{1}{p} < x_n < \tfrac{1}{p}\big(\big(1 + \tfrac{1}{n}\big)^p - \tfrac{1}{n^p}\big).$$

Συμπεραίνουμε από το κριτήριο παρεμβολής ότι $x_n \to \frac{1}{p}$. □

107. *(i) Έστω παραγωγίσιμη $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και έστω ότι ισχύει $f'(x) = f(x)$ για κάθε x. Αποδείξτε ότι υπάρχει αριθμός c ώστε να ισχύει $f(x) = ce^x$ για κάθε x.*
(ii) Βρείτε όλες τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:
(α) $f'(0) = 1$.
(β) $f(x+y) = f(x)f(y)$ για κάθε x, y.

Λύση. (i) Ορίζουμε την συνάρτηση

$$g(x) = f(x)e^{-x}.$$

Τότε

$$g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0 \qquad \text{για κάθε } x$$

οπότε η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή υπάρχει αριθμός c ώστε να ισχύει $g(x) = c$ ή, ισοδύναμα, $f(x) = ce^x$ για κάθε x.
(ii) Σταθεροποιώντας το τυχαίο x και παραγωγίζοντας την σχέση $f(x+y) = f(x)f(y)$ ως προς y, παίρνουμε

$$f'(x+y) = f(x)f'(y)$$

για κάθε x, y. Άρα για $y = 0$ έχουμε

$$f'(x) = f(x)f'(0) = f(x)$$

για κάθε x. Από το (i) συνεπάγεται ότι υπάρχει αριθμός c ώστε να ισχύει $f(x) = ce^x$ για κάθε x. Συνεπάγεται $1 = f'(0) = c$ και άρα $f(x) = e^x$ για κάθε x. □

108. *Μελετήστε τις παρακάτω συναρτήσεις σχετικά με την μονοτονία, την κυρτότητα και τα ακρότατά τους.*
(i) $f(x) = x^2(x-1)^2$.
(ii) $f(x) = 1/\log x$.
(iii) $f(x) = |x|(x-1)$ στο διάστημα $[-1, 2]$.

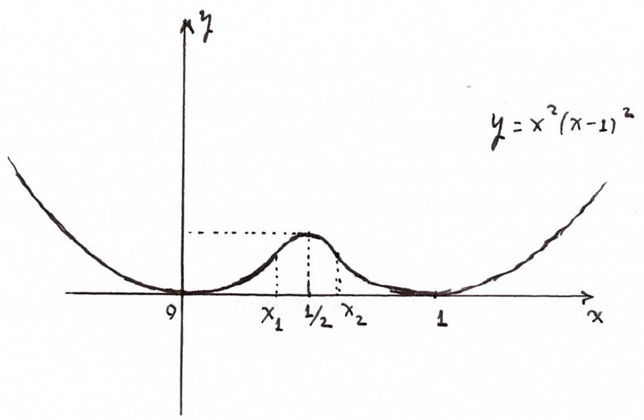
Λύση. (i) Η f έχει παράγωγο

$$f'(x) = 2x(x-1)^2 + 2x^2(x-1) = 2x(x-1)(x-1+x) = 2x(x-1)(2x-1)$$

και δεύτερη παράγωγο (μετά από πράξεις)

$$f''(x) = 3(2x-1)^2 - 1.$$

Ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(0, \frac{1}{2})$ και στο $(1, +\infty)$ και $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(\frac{1}{2}, 1)$. Άρα η f είναι, διαδοχικά, γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{1}{2}]$, γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{1}{2}, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$. Ειδικώτερα, τα σημεία 0 και 1 είναι σημεία τοπικού ελαχίστου της f και το σημείο $\frac{1}{2}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f. Επειδή $f(0) = f(1) = 0$, τα σημεία 0 και 1 είναι σημεία ολικού ελαχίστου της f. Το σημείο $\frac{1}{2}$ δεν είναι σημείο ολικού μεγίστου της f διότι $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.



Η f'' μηδενίζεται στα σημεία $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}$ και $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}$ και ισχύει $f''(x) > 0$ στο $(-\infty, x_1)$ και στο $(x_2, +\infty)$ και $f''(x) < 0$ στο (x_1, x_2). Άρα η f είναι, διαδοχικά, κυρτή στο $(-\infty, x_1]$, κοίλη στο $[x_1, x_2]$ και κυρτή στο $[x_2, +\infty)$. Τα σημεία x_1, x_2 είναι σημεία καμπής της f. Ας σημειώσουμε ότι $0 < x_1 < \frac{1}{2} < x_2 < 1$.

(ii) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Η f έχει παράγωγο

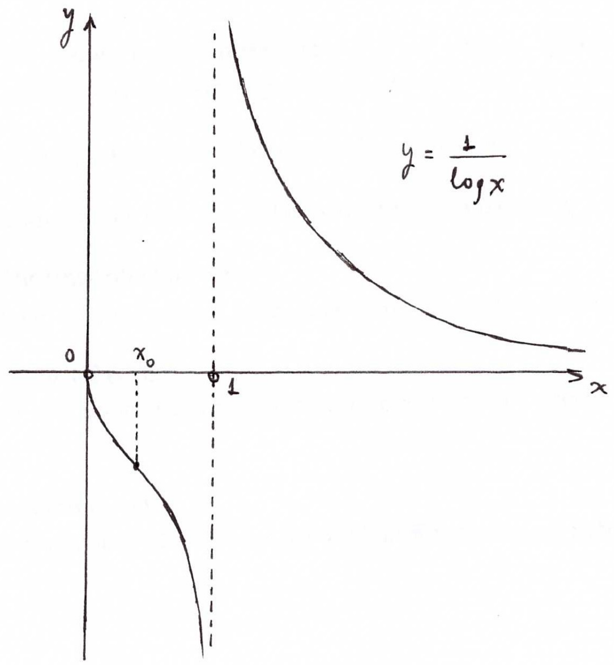
$$f'(x) = -\frac{1}{x \log^2 x}$$

και δεύτερη παράγωγο (μετά από πράξεις)

$$f''(x) = \frac{\log x + 2}{x \log^3 x}.$$

Ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$ και στο $(1, +\infty)$. Επειδή $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$ και $\lim_{x \to 1-} f(x) = -\infty$, το σύνολο τιμών της f στο $(0, 1)$ είναι το $(-\infty, 0)$. Η f δεν έχει σημεία τοπικού ακροτάτου στο $(0, 1)$. Επειδή $\lim_{x \to 1+} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, το σύνολο τιμών της f στο $(1, +\infty)$ είναι το $(0, +\infty)$. Η f δεν έχει σημεία τοπικού ακροτάτου στο $(1, +\infty)$. Η κατακόρυφη ευθεία με εξίσωση $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη του γραφήματος της f.

Η f'' μηδενίζεται στο $x_0 = e^{-2}$ το οποίο ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$. Ισχύει $f''(x) > 0$ στο $(0, x_0)$ και στο $(1, +\infty)$ και $f''(x) < 0$ στο $(x_0, 1)$. Άρα η f είναι, διαδοχικά, κυρτή στο $(0, x_0]$, κοίλη στο $[x_0, 1)$ και κυρτή στο $(1, +\infty)$. Το σημείο x_0 είναι σημείο καμπής της f.



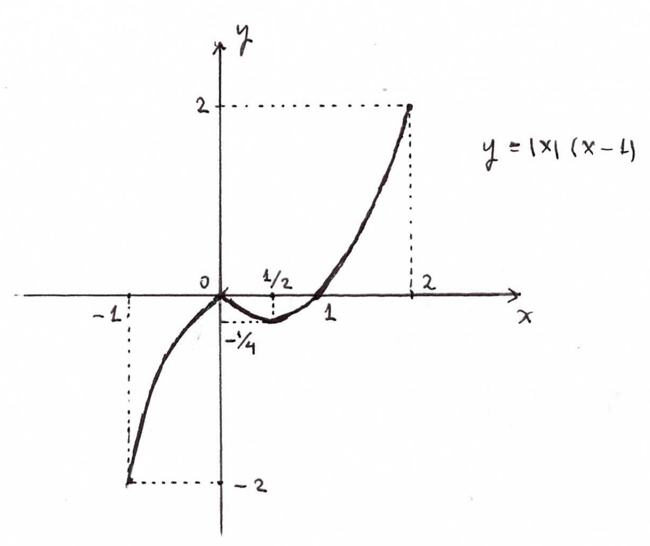
(iii) Η f έχει παράγωγο

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+1, & \text{αν } -1 \le x < 0 \\ 2x-1, & \text{αν } 0 < x \le 2 \end{cases}$$

Η f δεν έχει παράγωγο στο 0 αφού εύκολα βλέπουμε (με το όριο του λόγου διαφορών) ότι $f'_-(0) = 1$ και $f'_+(0) = -1$.
Ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(-1, 0)$ και στο $(\frac{1}{2}, 2)$ και $f'(x) < 0$ στο $(0, \frac{1}{2})$. Άρα η f είναι, διαδοχικά, γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{1}{2}]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{2}, 2]$. Ειδικώτερα, το σημείο 0 είναι σημείο τοπικού μεγίστου της f και το σημείο $\frac{1}{2}$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f. Το σημείο -1 είναι σημείο ολικού ελαχίστου της f και το σημείο 2 είναι σημείο ολικού μεγίστου της f.
Η f έχει δεύτερη παράγωγο

$$f''(x) = \begin{cases} -2, & \text{αν } -1 \le x < 0 \\ 2, & \text{αν } 0 < x \le 2 \end{cases}$$

Άρα η f είναι κοίλη στο $[-1, 0]$ και κυρτή στο $[0, 2]$. Η f δεν έχει σημεία καμπής. (Αριστερά του σημείου 0 η f είναι κοίλη και δεξιά του είναι κυρτή, αλλά η f δεν έχει παράγωγο στο 0.)



□

109. *Αποδείξτε ότι ισχύει $x < \sin x$ για κάθε $x < 0$ και $\sin x < x$ για κάθε $x > 0$.*

Λύση. Έχουμε αποδείξει αυτές τις ανισότητες με γεωμετρικό τρόπο. Τώρα θα τις αποδείξουμε με αναλυτικό τρόπο.
Στο $(-\infty, +\infty)$ η συνάρτηση

$$g(x) = x - \sin x$$

έχει παράγωγο

$$g'(x) = 1 - \cos x$$

για την οποία ισχύει $g'(x) \ge 0$. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει $g'(x) > 0$ στα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα $(2k\pi, 2(k+1)\pi)$ για $k \in \mathbb{Z}$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στα αντίστοιχα κλειστά διαστήματα και, επειδή αυτά είναι διαδοχικά και η ένωσή τους είναι ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$, η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$. Άρα ισχύει $g(x) < g(0) = 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $g(x) > g(0) = 0$ στο $(0, +\infty)$ □

110. *Αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{2}{\pi} x < \sin x$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.*

Λύση. Θεωρούμε την συνάρτηση
$$f(x) = \sin x - \tfrac{2}{\pi}\, x$$
με παράγωγο
$$f'(x) = \cos x - \tfrac{2}{\pi}$$
και δεύτερη παράγωγο
$$f''(x) = -\sin x.$$
Ισχύει $f''(x) < 0$ στο $(0, \pi/2)$, οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi/2]$. Επειδή $f'(0) = 1 - (2/\pi) > 0$ και $f'(\pi/2) = -2/\pi < 0$, υπάρχει κάποιο $x_0 \in (0, \pi/2)$ ώστε $f'(x_0) = 0$ και επομένως ώστε να ισχύει $f'(x) > 0$ στο $[0, x_0)$ και $f'(x) < 0$ στο $(x_0, \pi/2]$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, x_0]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \pi/2]$. Επειδή $f(0) = f(\pi/2) = 0$, ισχύει $f(x) > 0$ στο $(0, \pi/2)$.

Υπάρχει και δεύτερος τρόπος. Εφαρμόζουμε στην συνάρτηση $\sin x$ το θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange στο διάστημα $[0, x]$ και στο διάστημα $[x, \frac{\pi}{2}]$. Υπάρχουν λοιπόν $\xi \in (0, x)$ και $\eta \in (x, \frac{\pi}{2})$ ώστε
$$\tfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos \xi, \qquad \tfrac{\sin(\pi/2) - \sin x}{(\pi/2) - x} = \cos \eta.$$
Από $0 < \xi < x < \eta < \frac{\pi}{2}$ συνεπάγεται $\cos \xi > \cos \eta$ και άρα
$$\tfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} > \tfrac{\sin(\pi/2) - \sin x}{(\pi/2) - x}.$$
Δηλαδή $\frac{\sin x}{x} > \frac{1 - \sin x}{(\pi/2) - x}$ και μετά από λίγες πράξεις προκύπτει η $\frac{2}{\pi}\, x < \sin x$. □

111. *Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση* $e^x - 16x + 13 = 0$*;*

Λύση. Θεωρούμε την συνάρτηση
$$f(x) = e^x - 16x + 13$$
στο $(-\infty, +\infty)$. Η παράγωγός της είναι η συνάρτηση
$$f'(x) = e^x - 16.$$
Ισχύει $f'(x) < 0$ στο διάστημα $(-\infty, \log 16)$ και $f'(x) > 0$ στο διάστημα $(\log 16, +\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, \log 16]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\log 16, +\infty)$. Επίσης, είναι
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$
Άρα το σύνολο τιμών της f στο $(-\infty, \log 16]$ και στο $[\log 16, +\infty)$ είναι το $[f(\log 16), +\infty)$. Επειδή $f(\log 16) = 29 - 16 \log 16 < 0$, ο αριθμός 0 περιέχεται στο σύνολο τιμών $[f(\log 16), +\infty)$ και η εξίσωση $e^x - 16x + 13 = 0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις: μία λύση στο $(-\infty, \log 16]$ και άλλη μία στο $[\log 16, +\infty)$. □

112. *(i) Αποδείξτε ότι η εξίσωση* $x^3/3 = \sin x - x \cos x$ *έχει ακριβώς μία λύση.*
(ii) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^3/6 = \sin x - x \cos x$ *έχει ακριβώς τρεις λύσεις.*

Λύση. (i) Θεωρούμε την συνάρτηση
$$f(x) = \tfrac{x^3}{3} - \sin x + x \cos x$$
στο $(-\infty, +\infty)$. Η παράγωγός της είναι η συνάρτηση
$$f'(x) = x^2 - x \sin x = x(x - \sin x).$$
Γνωρίζουμε ότι ισχύει $x < \sin x$ στο $(-\infty, 0)$ και $\sin x < x$ στο $(0, +\infty)$. Επομένως ισχύει $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ και στο

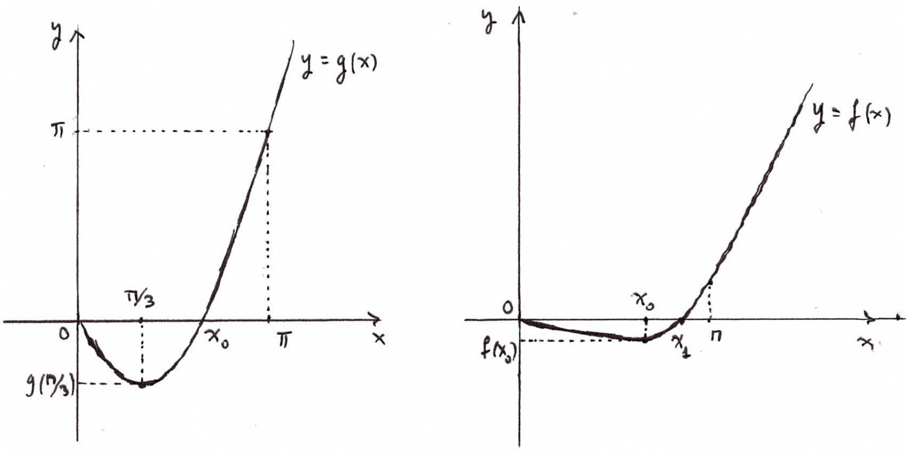
$[0, +\infty)$ οπότε είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, +\infty)$.
Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει προφανή λύση το $x = 0$. Επειδή η f είναι ένα-προς-ένα, η λύση αυτή είναι μοναδική.
(ii) Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3}{6} - \sin x + x \cos x$$

στο $(-\infty, +\infty)$. Η παράγωγός της είναι η συνάρτηση

$$f'(x) = \frac{x^2}{2} - x \sin x = \frac{x(x-2\sin x)}{2}.$$

Όπως κάναμε στο (i), θα μελετήσουμε το πρόσημο της παραγώγου.



Στο διάστημα $[0, \pi]$ η συνάρτηση

$$g(x) = x - 2\sin x$$

έχει παράγωγο

$$g'(x) = 1 - 2\cos x$$

για την οποία ισχύει $g'(x) < 0$ στο $(0, \pi/3)$ και $g'(x) > 0$ στο $(\pi/3, \pi)$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi/3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[\pi/3, \pi]$. Από το ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi/3]$ συνεπάγεται ότι ισχύει $g(x) < g(0) = 0$ στο $(0, \pi/3]$ και, ειδικώτερα, $g(\pi/3) < 0$. Από το ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[\pi/3, \pi]$ και από το ότι $g(\pi/3) < 0$ και $g(\pi) = \pi > 0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (\pi/3, \pi)$ ώστε $g(x_0) = 0$ και ώστε να ισχύει $g(x) < 0$ στο $[\pi/3, x_0)$ και $g(x) > 0$ στο $(x_0, \pi]$. Δηλαδή συνολικά ισχύει $g(x) < 0$ στο $(0, x_0)$ και $g(x) > 0$ στο $(x_0, \pi]$. Επιπλέον, για $x \in [\pi, +\infty)$ έχουμε ότι $g(x) = x - 2\sin x \geq \pi - 2 > 0$. Συμπεραίνουμε ότι ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(0, x_0)$ και $f'(x) > 0$ στο $(x_0, +\infty)$.
Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$. Από το ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, x_0]$ συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x) < f(0) = 0$ στο $(0, x_0]$ και, ειδικώτερα, $f(x_0) < 0$. Από το ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$ και από το ότι $f(x_0) < 0$ και $f(\pi) > 0$ συνεπάγεται ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (x_0, +\infty)$ ώστε $f(x_1) = 0$. Άρα η f έχει στο $(0, +\infty)$ μοναδική ρίζα το x_1.
Επειδή η f είναι περιττή, έχει στο $(-\infty, 0)$ μοναδική ρίζα το $-x_1$.
Άρα η f έχει ακριβώς τρείς ρίζες: $-x_1, 0, x_1$. □

113. *Έστω οποιαδήποτε ευθεία l του xy-επιπέδου με εξίσωση $ax + by = c$, όπου ένα τουλάχιστον από τα a, b είναι $\neq 0$, και οποιοδήποτε σημείο $M = (x_0, y_0)$ του ίδιου επιπέδου. Η απόσταση του M από την l είναι η ελάχιστη απόσταση από το M προς οποιοδήποτε σημείο της l. Αποδείξτε ότι η απόσταση του M από την l δίνεται από τον τύπο*

$$\frac{|ax_0 + by_0 - c|}{(a^2 + b^2)^{1/2}}.$$

Λύση. (i) Αν $b = 0$, η l είναι κατακόρυφη με εξίσωση $x = \kappa = \frac{c}{a}$. Τα σημεία της l είναι τα $K = (\kappa, y)$ και η απόσταση ενός τέτοιου K από το M είναι $\sqrt{(\kappa - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Είναι προφανές ότι η ελάχιστη τιμή αυτής της απόστασης είναι ίση με

$$\sqrt{(\kappa - x_0)^2} = |\kappa - x_0| = \tfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{(a^2+b^2)^{1/2}}$$

και πιάνεται όταν $y = y_0$, δηλαδή όταν το σημείο K συμπέσει με το σημείο (κ, y_0) της l.
(ii) Αν $b \neq 0$, η l είναι πλάγια με εξίσωση $y = \mu x + \nu$, με $\mu = -\frac{a}{b}$, $\nu = \frac{c}{b}$. Τα σημεία της l είναι τα $K = (x, \mu x + \nu)$ και η απόσταση ενός τέτοιου K από το M είναι $\sqrt{(x - x_0)^2 + (\mu x + \nu - y_0)^2}$. Για να ελαχιστοποιήσουμε αυτήν την απόσταση είναι αρκετό να ελαχιστοποιήσουμε την

$$f(x) = (x - x_0)^2 + (\mu x + \nu - y_0)^2.$$

Η f έχει παράγωγο

$$f'(x) = 2(x - x_0) + 2\mu(\mu x + \nu - y_0) = 2(1 + \mu^2)\big(x - \tfrac{x_0 + \mu y_0 - \mu\nu}{1+\mu^2}\big).$$

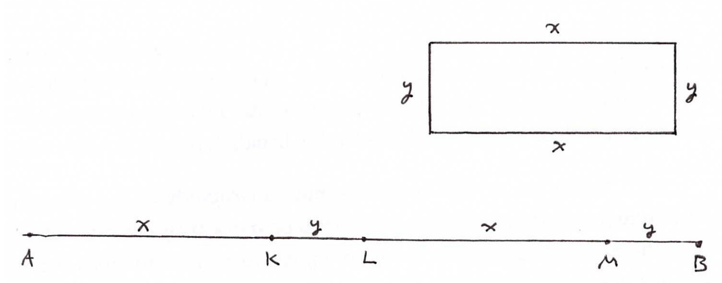
Ορίζουμε $p = \frac{x_0 + \mu y_0 - \mu\nu}{1+\mu^2}$ και έχουμε ότι ισχύει $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, p)$ και $f'(x) > 0$ στο $(p, +\infty)$. Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, p]$ και γνησίως αύξουσα στο $[p, +\infty)$ και άρα έχει ελάχιστη τιμή (μόνο) στο p. Άρα η απόσταση $\sqrt{(x - x_0)^2 + (\mu x + \nu - y_0)^2}$ γίνεται ελάχιστη όταν $x = p$ και η ελάχιστη τιμή της απόστασης αυτής είναι ίση με

$$\sqrt{(p - x_0)^2 + (\mu p + \nu - y_0)^2} = \tfrac{|\mu x_0 + \nu - y_0|}{(1+\mu^2)^{1/2}} = \tfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{(a^2+b^2)^{1/2}}.$$

□

114. *Λυγίζουμε μία λεπτή ευθεία ράβδο μήκους l ώστε να σχηματισθεί ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Σε ποιά σημεία της πρέπει να λυγίσουμε την ράβδο ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να έχει μέγιστο εμβαδό;*

Λύση. Αν A, B είναι τα άκρα της ράβδου, για να σχηματιστεί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από την ράβδο πρέπει να την λυγίσουμε στα διαδοχικά (από το A προς το B) σημεία K, L, M έτσι ώστε τα τμήματα AK, LM να έχουν ίσα μήκη και τα τμήματα KL, MB να έχουν, επίσης, ίσα μήκη.



Αν x είναι το κοινό μήκος των AK, LM και y είναι το κοινό μήκος των KL, MB, τότε είναι $2x + 2y = l$ και το εμβαδό του ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι ίσο με xy. Έχουμε λοιπόν να βρούμε τα $x, y > 0$ ώστε να μεγιστοποιηθεί η συνάρτηση xy με τον περιορισμό $2x + 2y = l$. Ισοδύναμα, έχουμε να βρούμε το $x \in (0, \frac{l}{2})$ ώστε να μεγιστοποιηθεί η

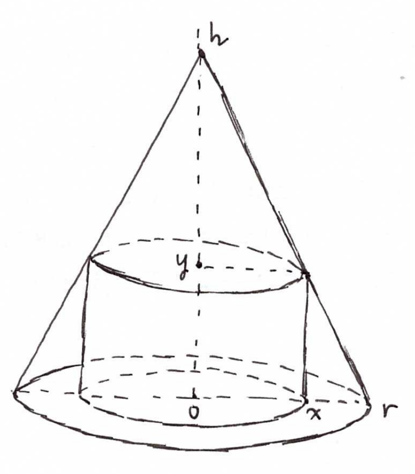
$$f(x) = x\big(\tfrac{l}{2} - x\big).$$

Η παράγωγος της f είναι η

$$f'(x) = \tfrac{l}{2} - 2x.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \frac{l}{4}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{l}{4}, \frac{l}{2})$, οπότε το $\frac{l}{4}$ είναι το σημείο ολικού μεγίστου της f και η μέγιστη τιμή της είναι ίση με $f(\frac{l}{4}) = \frac{l^2}{16}$. Άρα η ράβδος πρέπει να χωριστεί σε τέσσερα ίσα μέρη και το αντίστοιχο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι τετράγωνο. □

115. *Έστω ορθός κυκλικός κώνος με ύψος h και ακτίνα βάσης r. Ποιός είναι ο κύλινδρος ο οποίος περιέχεται στον κώνο με μία βάση του πάνω στην βάση του κώνου και έχει τον μέγιστο όγκο;*



Λύση. Είναι αναμενόμενο ο κύλινδρος να έχει το κέντρο της βάσης του πάνω στο κέντρο της βάσης του κώνου. Αν η ακτίνα της βάσης του κυλίδρου είναι $x \in (0, r)$, τότε εύκολα βλέπουμε (μέσω όμοιων τριγώνων) ότι το ύψος του είναι $y = h(1 - \frac{x}{r})$.
Ο όγκος του κυλίνδρου είναι ίσος με

$$V(x) = \pi x^2 y = \pi h x^2 (1 - \tfrac{1}{r}\, x).$$

Η παράγωγος του όγκου είναι

$$V'(x) = \pi h x (2 - \tfrac{3}{r}\, x).$$

Ισχύει $V'(x) > 0$ στο $(0, \frac{2r}{3})$ και $V'(x) < 0$ στο $(\frac{2r}{3}, r)$. Άρα η V είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, \frac{2r}{3}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{2r}{3}, r)$. Επομένως ο όγκος μεγιστοποιείται όταν η ακτίνα της βάσης του είναι ίση με $\frac{2r}{3}$. □

116. *Έστω ότι η f έχει δεύτερη παράγωγο στο (a, b) και ότι ισχύει $f(x)f''(x) \geq 0$ στο (a, b). Αν στο (a, b) περιέχονται δύο λύσεις της εξίσωσης $f(x)f'(x) = 0$ αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή ανάμεσα στις δύο αυτές λύσεις.*

Λύση. Έστω x_1 και x_2 με $x_1 < x_2$ οι δύο λύσεις της $f(x)f'(x) = 0$. Δηλαδή

$$f(x_1)f'(x_1) = f(x_2)f'(x_2) = 0.$$

Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = f(x)f'(x)$ στο (a, b) και έχουμε ότι ισχύει

$$g'(x) = f(x)f''(x) + f'(x)^2 \geq 0 \qquad \text{στο } (a, b),$$

οπότε η g είναι αύξουσα στο (a, b). Όμως, $g(x_1) = g(x_2) = 0$, οπότε η g είναι σταθερή 0 στο $[x_1, x_2]$. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι ισχύει

$$f(x)f''(x) + f'(x)^2 = g'(x) = 0 \qquad \text{στο } [x_1, x_2]$$

και, επειδή ισχύει $f(x)f''(x) \geq 0$ στο $[x_1, x_2]$, συνεπάγεται ότι ισχύει $f'(x) = 0$ στο $[x_1, x_2]$. Άρα η f είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$.
Από το σημείο στο οποίο βρήκαμε ότι η $g(x) = f(x)f'(x)$ είναι σταθερή 0 στο $[x_1, x_2]$ μπορούμε να ακολουθήσουμε έναν δεύτερο δρόμο λιγότερο σύντομο αλλά διδακτικό.
Έχουμε ότι ισχύει

$$\tfrac{d}{dx} f(x)^2 = 2f(x)f'(x) = 0 \qquad \text{στο } [x_1, x_2].$$

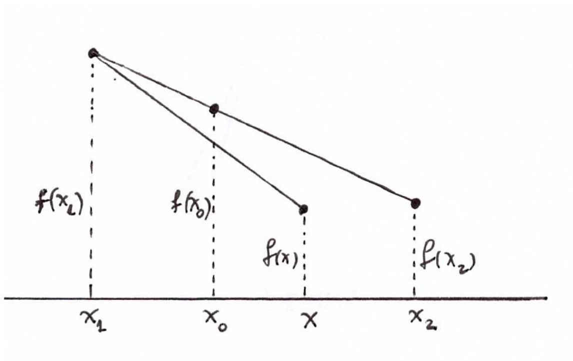
Άρα η συνάρτηση $f(x)^2$ είναι σταθερή στο διάστημα $[x_1, x_2]$. Δηλαδή ισχύει

$$f(x)^2 = c \qquad \text{στο } [x_1, x_2]$$

για κάποια σταθερά $c \geq 0$.
Αν $c = 0$ τότε ισχύει $f(x) = 0$ στο $[x_1, x_2]$ οπότε η f είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$.
Αν $c > 0$ τότε η f δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του $[x_1, x_2]$ και, επειδή είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, διατηρεί πρόσημο στο $[x_1, x_2]$. Άρα είτε ισχύει $f(x) = +\sqrt{c}$ στο $[x_1, x_2]$ είτε ισχύει $f(x) = -\sqrt{c}$ στο $[x_1, x_2]$.
Σε κάθε περίπτωση η f είναι σταθερή στο $[x_1, x_2]$. □

117. *Έστω ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα I και έστω $x_1, x_0, x_2 \in I$ με $x_1 < x_0 < x_2$. Αν το σημείο $(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ αποδείξτε ότι το μέρος του γραφήματος της f το οποίο αντιστοιχεί στο $[x_1, x_2]$ ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ενώνει τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$.*

Λύση. Το ότι η f είναι κυρτή συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in (x_1, x_2)$ το σημείο $(x, f(x))$ δεν βρίσκεται πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα l με άκρα τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$. Αυτό το οποίο πρέπει να αποδείξουμε λέει ότι το $(x, f(x))$ ανήκει στο ευθ. τμήμα l. Άρα πρέπει να αποδείξουμε ότι το $(x, f(x))$ δεν βρίσκεται κάτω από το ευθ. τμήμα l.
Τώρα έστω $x_0 < x < x_2$ και έστω (για άτοπο) ότι το $(x, f(x))$ βρίσκεται κάτω από το ευθ. τμήμα l. Τότε όμως το $(x_0, f(x_0))$ βρίσκεται πάνω από το ευθ. τμήμα με άκρα τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x, f(x))$ και καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα το $(x, f(x))$ βρίσκεται πάνω στο ευθ. τμήμα l.
Αν $x_1 < x < x_0$ τότε με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι το $(x, f(x))$ βρίσκεται πάνω στο ευθ. τμήμα l.



□

118. *Χρησιμοποιώντας την κυρτότητα ή κοιλότητα σχετικών συναρτήσεων αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες:*
(i) $(\frac{x_1+x_2}{2})^a \leq \frac{x_1^a+x_2^a}{2}$ *για* $0 \leq x_1 < x_2$ *και* $a \geq 1$.
(ii) $(\frac{x_1+x_2}{2})^a \geq \frac{x_1^a+x_2^a}{2}$ *για* $0 \leq x_1 < x_2$ *και* $0 < a \leq 1$.
(iii) $e^{\frac{x_1+x_2}{2}} \leq \frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2}$ *για* $x_1 < x_2$.
(iv) $\log \frac{x_1+x_2}{2} \geq \frac{\log x_1+\log x_2}{2}$ *για* $0 < x_1 < x_2$.

Λύση. Έστω ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα I και έστω $x_1, x_2 \in I$ με $x_1 < x_2$. Το $\xi = \frac{x_1+x_2}{2}$ είναι το μέσο του διαστήματος $[x_1, x_2]$ και, λόγω κυρτότητας της f, η κλίση του ευθ. τμήματος με άκρα τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(\xi, f(\xi))$ είναι το πολύ ίση με την κλίση του ευθ. τμήματος με άκρα τα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$. Δηλαδή

$$\frac{f(\xi)-f(x_1)}{\xi-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Από το ότι $x_2 - x_1 = 2(\xi - x_1)$ παίρνουμε ότι $f(\xi) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, δηλαδή

$$f(\tfrac{x_1+x_2}{2}) \leq \tfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}. \tag{13}$$

Αν η f είναι κοίλη, τότε με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε την αντίθετη ανισότητα.

Τώρα τα (i)-(iv) προκύπτουν από την (13) (ή την αντίθετή της) και από το ότι η x^a είναι κυρτή στο $[0, +\infty)$ αν $a \geq 1$ και κοίλη στο $[0, +\infty)$ αν $0 < a \leq 1$, η e^x είναι κυρτή στο $(-\infty, +\infty)$ και η $\log x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$. □

119. *(i) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση* $f(x) = x \log x$ *είναι κυρτή στο* $(0, +\infty)$.
(ii) Αποδείξτε ότι αν $x, y, a, b > 0$ *τότε*

$$(x + y) \log \tfrac{x+y}{a+b} \leq x \log \tfrac{x}{a} + y \log \tfrac{y}{b}.$$

Λύση. (i) Ισχύει $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$ οπότε η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.
(ii) Με την συνάρτηση f του (i) η ανισότητα την οποία θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται

$$(a + b) f\big(\tfrac{x+y}{a+b}\big) \leq a f\big(\tfrac{x}{a}\big) + b f\big(\tfrac{y}{b}\big)$$

και αν ορίσουμε $u = \frac{x}{a} > 0$ και $v = \frac{y}{b} > 0$ τότε η ανισότητα γίνεται

$$f\big(\tfrac{a}{a+b}\, u + \tfrac{b}{a+b}\, v\big) \leq \tfrac{a}{a+b}\, f(u) + \tfrac{b}{a+b}\, f(v).$$

Τέλος, ορίζουμε $t = \frac{b}{a+b}$ οπότε είναι $0 < t < 1$ και $1 - t = \frac{a}{a+b}$ και η ανισότητα γράφεται

$$f((1 - t)u + tv) \leq (1 - t)f(u) + tf(v).$$

Ακριβώς η ανισότητα αυτή εκφράζει την κυρτότητα της f. □

120. *Χρησιμοποιώντας τους κανόνες του l' Hopitâl, βρείτε τα όρια*

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{\log(x+\log x)}{\log(\log x)}, \quad \lim_{x\to 0} \tfrac{\sin x}{\arctan x}, \quad \lim_{x\to 0} \big(\tfrac{1}{\log(1+x)} - \tfrac{1}{x}\big), \quad \lim_{x\to 0} (x + e^x)^{1/x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \big(1 + \tfrac{1}{x^a}\big)^{x^b},$$

$$\lim_{x\to 0+} \big(1 + \tfrac{1}{x^a}\big)^{x^b}, \quad \lim_{x\to 1+} \log x \log(x - 1), \quad \lim_{x\to 0+} x^{x^x - 1}, \quad \lim_{x\to+\infty} \tfrac{x(x^{1/x}-1)}{\log x}.$$

Στο πέμπτο και στο έκτο όριο υποθέτουμε ότι $a, b > 0$.

Λύση. Πριν ξεκινήσουμε θα κάνουμε ένα σχόλιο για την χρήση των κανόνων του l' Hopitâl. Όταν το όριο $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $0/0$ ή (οτιδήποτε)$/(\pm\infty)$, τότε επιτρέπεται να γράψουμε την ισότητα $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **υπό την προϋπόθεση** ότι το δεύτερο όριο (του λόγου των παραγώγων) υπάρχει. Τυπικά, πρέπει *πρώτα* να αποδείξουμε την ύπαρξη του δεύτερου ορίου και *κατόπιν* να επιστρέψουμε και να γράψουμε την ισότητα των δύο ορίων (εννοώντας ότι και το πρώτο όριο υπάρχει και είναι ίσο με το δεύτερο). Πολλές φορές για να μην διακόψουμε την *ροή των υπολογισμών* γράφουμε την ισότητα και συνεχίζουμε υπολογίζοντας το δεύτερο όριο. Μάλιστα μπορεί και το δεύτερο όριο να είναι απροσδιόριστη μορφή οπότε ξαναχρησιμοποιούμε τους κανόνες του l' Hopitâl εξισώνοντας το δεύτερο όριο με το όριο του λόγου των δεύτερων παραγώγων και ούτω καθ' εξής. Όμως, κάθε φορά που γράφουμε την ισότητα $\lim_{x\to\xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ **πρέπει να έχουμε υπ'όψιν ότι στην περίπτωση κατά την οποία το τελικό όριο δεν υπάρχει τότε ούτε η ισότητα την οποία γράψαμε ισχύει**.

Για παράδειγμα, το όριο $\lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{x}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και υπολογίζεται εύκολα χωρίς χρήση του κανόνα του l' Hopitâl:

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{x-\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \big(1 - \tfrac{\sin x}{x}\big) = 1 - 0 = 1.$$

Όμως αν γράψουμε την ισότητα

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{x-\sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{1-\cos x}{1}$$

καταλήγουμε σε όριο το οποίο δεν υπάρχει και κινδυνεύουμε να συμπεράνουμε λανθασμένα ότι λόγω της ισότητας ούτε το αρχικό όριο υπάρχει.
Μετά από αυτό το σχόλιο υπολογίζουμε τα διάφορα όρια της άσκησης. Όταν μία ισότητα προκύπτει από κανόνα του l' Hopitâl θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\overset{\mathrm{H}}{=}$ γι αυτήν.
(i) Το πρώτο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)/(+\infty)$. Γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{\log(x+\log x)}{\log(\log x)} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \tfrac{\frac{x+1}{x(x+\log x)}}{\frac{1}{x\log x}} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{(x+1)\log x}{x+\log x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \tfrac{\log x+\frac{x+1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \tfrac{+\infty+1}{1} = +\infty.$$

(ii) Το δεύτερο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $0/0$. Γράφουμε

$$\lim_{x\to0} \tfrac{\sin x}{\arctan x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to0} \tfrac{\cos x}{1/(1+x^2)} = 1.$$

(iii) Το τρίτο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $(\pm\infty)-(\pm\infty)$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0} \left(\tfrac{1}{\log(1+x)} - \tfrac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to0} \tfrac{x-\log(1+x)}{x\log(1+x)} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to0} \tfrac{1-1/(1+x)}{\log(1+x)+x/(1+x)} \\ &\overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to0} \tfrac{1/(1+x)^2}{1/(1+x)+1/(1+x)^2} = \lim_{x\to0} \tfrac{1}{2+x} = \tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

(iv) Το τέταρτο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $1^{\pm\infty}$. Γράφουμε $(x+e^x)^{1/x} = e^{(1/x)\log(x+e^x)}$ και υπολογίζουμε το όριο $\lim_{x\to0} \frac{\log(x+e^x)}{x}$ το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Έχουμε

$$\lim_{x\to0} \tfrac{\log(x+e^x)}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to0} \tfrac{1+e^x}{x+e^x} = 2$$

και άρα $\lim_{x\to0}(x+e^x)^{1/x} = e^2$.
(v) Το πέμπτο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $1^{+\infty}$. Γράφουμε $\left(1+\frac{1}{x^a}\right)^{x^b} = e^{x^b\log(1+x^{-a})}$ και υπολογίζουμε το όριο $\lim_{x\to+\infty} x^b\log(1+x^{-a})$ το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)0$. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty} x^b\log(1+x^{-a}) = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{\log(1+x^{-a})}{x^{-b}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \tfrac{ax^b}{b(1+x^a)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } b<a \\ 1 & \text{αν } b=a \\ +\infty & \text{αν } b>a \end{cases}$$

Άρα

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\tfrac{1}{x^a}\right)^{x^b} = \lim_{x\to+\infty} e^{x^b\log(1+x^{-a})} = \begin{cases} 1 & \text{αν } b<a \\ e & \text{αν } b=a \\ +\infty & \text{αν } b>a \end{cases}$$

(vi) Το έκτο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^0$. Όπως στο προηγούμενο όριο, γράφουμε $\left(1+\frac{1}{x^a}\right)^{x^b} = e^{x^b\log(1+x^{-a})}$ και υπολογίζουμε το όριο $\lim_{x\to0+} x^b\log(1+x^{-a})$ το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $0(+\infty)$. Έχουμε

$$\lim_{x\to0+} x^b\log(1+x^{-a}) = \lim_{x\to0+} \tfrac{\log(1+x^{-a})}{x^{-b}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to0+} \tfrac{ax^b}{b(1+x^a)} = 0.$$

Άρα

$$\lim_{x\to0+} \left(1+\tfrac{1}{x^a}\right)^{x^b} = \lim_{x\to0+} e^{x^b\log(1+x^{-a})} = 1.$$

(vii) Το έβδομο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $(0+)(-\infty)$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+} \log x \log(x-1) &= \lim_{x\to 1+} \tfrac{\log(x-1)}{1/\log x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 1+} \tfrac{1/(x-1)}{-1/(x\log^2 x)} \\ &= -\lim_{x\to 1+} \tfrac{x\log^2 x}{x-1} = -\lim_{x\to 1+} \tfrac{\log^2 x}{x-1} \overset{\mathrm{H}}{=} -\lim_{x\to 1+} \tfrac{2\log x}{x} = 0.\end{aligned}$$

(viii) Το όγδοο όριο είναι πιο σύνθετο από τα προηγούμενα. Το $\lim_{x\to 0+} x^x$ είναι απροσδιόριστη μορφή 0^0 και το υπολογίζουμε αφού γράψουμε $x^x = e^{x\log x}$. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0+} x\log x = \lim_{x\to 0+} \tfrac{\log x}{1/x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0+} \tfrac{1/x}{-1/x^2} = -\lim_{x\to 0+} x = 0.$$

Επομένως $\lim_{x\to 0+} x^x = e^0 = 1$ και άρα το $\lim_{x\to 0+} x^{x^x - 1}$ είναι πάλι απροσδιόριστη μορφή 0^0. Τώρα γράφουμε $x^{x^x-1} = e^{(x^x-1)\log x}$ οπότε αρκεί να βρούμε το $\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\log x$ το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $0(-\infty)$. Τώρα

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\log x &= \lim_{x\to 0+} \tfrac{x^x-1}{1/\log x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0+} \tfrac{x^x(\log x+1)}{-1/(x\log^2 x)} \\ &= -\lim_{x\to 0+} x^{x+1}(\log x+1)\log^2 x \\ &= -\lim_{x\to 0+} x(\log x+1)\log^2 x \\ &= -\lim_{x\to 0+} (x\log^3 x + x\log^2 x).\end{aligned}$$

Από το $\lim_{x\to 0+} x\log x = 0$ προκύπτει εύκολα το $\lim_{x\to 0+} x\log^n x = 0$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} x\log^n x &= \lim_{x\to 0+} (x^{1/n}\log x)^n = n^n \lim_{x\to 0+} (x^{1/n}\log(x^{1/n}))^n \\ &= n^n \lim_{y\to 0+} (y\log y)^n = 0.\end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{x\to 0+}(x^x-1)\log x = -\lim_{x\to 0+}(x\log^3 x + x\log^2 x) = 0$$

και επομένως $\lim_{x\to 0+} x^{x^x-1} = e^0 = 1$.

(ix) Το ένατο όριο είναι κι αυτό σύνθετο. Το $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$ είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)^0$. Έχουμε $x^{1/x} = e^{(\log x)/x}$ και υπολογίζουμε το $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x}$ το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Τώρα

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{\log x}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \tfrac{1}{x} = 0,$$

οπότε $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = e^0 = 1$. Επομένως στο $\lim_{x\to+\infty} \frac{x(x^{1/x}-1)}{\log x}$ ακόμη και το όριο του αριθμητή είναι απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)0$.

Σκεφτόμαστε όμως ένα κόλπο. Γράφουμε

$$\lim_{x\to+\infty} \tfrac{x(x^{1/x}-1)}{\log x} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{e^{(\log x)/x}-1}{(\log x)/x} = \lim_{y\to 0} \tfrac{e^y-1}{y} = 1.$$

□

121. *Έστω* $a_1,\dots,a_n > 0$. *Αποδείξτε ότι*

$$\lim_{p\to 0+} \big(\tfrac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}\big)^{1/p} = \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}, \qquad \lim_{p\to+\infty} \big(\tfrac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}\big)^{1/p} = \max\{a_1,\dots,a_n\}.$$

Λύση. (i) Είναι $\left(\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{1/p} = e^{\frac{1}{p}\log\left(\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)}$. Από τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl έχουμε

$$\lim_{p\to 0+} \frac{1}{p}\log\left(\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}\right) \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{p\to 0+} \frac{a_1^p\log a_1+\cdots+a_n^p\log a_n}{a_1^p+\cdots+a_n^p} = \frac{\log a_1+\cdots+\log a_n}{n} = \log(a_1\cdots a_n)^{1/n}.$$

Τώρα λόγω της συνέχειας της εκθετικής συνάρτησης έχουμε

$$\lim_{p\to 0+} \left(\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)^{1/p} = \lim_{p\to 0+} e^{\frac{1}{p}\log\left(\frac{a_1^p+\cdots+a_n^p}{n}\right)} = e^{\log(a_1\cdots a_n)^{1/n}} = \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}.$$

(ii) Ορίζουμε $M = \max\{a_1,\ldots,a_n\}$ και τότε έχουμε

$$M \le \left(a_1^p+\cdots+a_n^p\right)^{1/p} \le Mn^{1/p}$$

οπότε το συμπέρασμα προκύπτει από τον κανόνα παρεμβολής. □

122. *Υπολογίστε τα όρια ακολουθιών:*

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2+1)^{1/n}, \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{\log(\log n)}{\log(n+n^2)}.$$

Λύση. (i) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = (x^2+1)^{1/x} = e^{\frac{\log(x^2+1)}{x}}$ και υπολογίζουμε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x^2+1)}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2+1} = 0$$

οπότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^0 = 1.$$

Για την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = n$ ισχύει $x_n \to +\infty$ οπότε

$$\lim_{n\to+\infty}(n^2+1)^{1/n} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

(ii) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{\log(\log x)}{\log(x+x^2)}$ και υπολογίζουμε το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x}{(1+2x)\log x} = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

Για την ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = n$ ισχύει $x_n \to +\infty$ οπότε

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\log(\log n)}{\log(n+n^2)} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

□

123. *Μπορείτε να υπολογίσετε το* $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ *με διαδοχικές εφαρμογές του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl; Μήπως το όριο αυτό υπολογίζεται πολύ εύκολα χωρίς αναφορά στον δεύτερο κανόνα του l' Hopitâl;*

Λύση. Με διαδοχικές εφαρμογές του δεύτερου κανόνα του l' Hopitâl προκύπτει συνεχώς η ίδια απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$ και δημιουργείται ένας αέναος φαύλος κύκλος:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \overset{\mathrm{H}}{=} \ldots$$

Το όριο υπολογίζεται πάρα πολύ εύκολα χωρίς τον δεύτερο κανόνα του l' Hopitâl:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} = 1.$$

□

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ RIEMANN

124. *Υπολογίστε το* $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$ *όταν* $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } -2 \le x < 0 \\ 2 & \text{αν } 0 \le x \le 1 \\ 3/x & \text{αν } 1 < x \le 4 \end{cases}$

Λύση. Η f ταυτίζεται στο $[-2, 0]$, εκτός στο σημείο 0, με την συνεχή συνάρτηση x. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-2, 0]$ και

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x\,dx = \tfrac{0^2-(-2)^2}{2} = -2.$$

Η f ταυτίζεται στο $[0, 1]$ με την σταθερή συνάρτηση 2 οπότε η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$ και

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} 2\,dx = 2(1-0) = 2.$$

Τέλος η f ταυτίζεται στο $[1, 4]$, εκτός στο σημείο 1, με την συνεχή συνάρτηση $\frac{3}{x}$. Άρα η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[1, 4]$ και

$$\int_{1}^{4} f(x)\,dx = \int_{1}^{4} \tfrac{3}{x}\,dx = 3\int_{1}^{4} \tfrac{1}{x}\,dx = 3\log 4.$$

Άρα συνολικά:

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{4} f(x)\,dx = -2 + 2 + 3\log 4 = 3\log 4.$$

□

125. *Υπολογίστε το* $\int_{-3/2}^{5/2} [x]\,dx$.

Λύση. Αν $k \in \mathbb{Z}$, ισχύει $[x] = k$ στο διάστημα $[k, k+1)$. Άρα η συνάρτηση $[x]$ είναι σταθερή k στο $[k, k+1]$ εκτός στο σημείο $k+1$ οπότε είναι ολοκληρώσιμη στο $[k, k+1]$ και

$$\int_{k}^{k+1} [x]\,dx = \int_{k}^{k+1} k\,dx = k(k+1-k) = k.$$

Ειδικώτερα:

$$\int_{-1}^{0} [x]\,dx = -1, \qquad \int_{0}^{1} [x]\,dx = 0, \qquad \int_{1}^{2} [x]\,dx = 1.$$

Στο $[-\frac{3}{2}, -1]$, εκτός στο σημείο -1, η συνάρτηση $[x]$ είναι σταθερή -2 και άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\frac{3}{2}, -1]$ και

$$\int_{-3/2}^{-1} [x]\,dx = \int_{-3/2}^{-1} (-2)\,dx = (-2)(-1 + \tfrac{3}{2}) = -1.$$

Τέλος, στο $[2, \frac{5}{2}]$ η $[x]$ είναι σταθερή 2 και άρα είναι ολοκληρώσιμη στο $[2, \frac{5}{2}]$ και

$$\int_{2}^{5/2} [x]\,dx = \int_{2}^{5/2} 2\,dx = 2(\tfrac{5}{2} - 2) = 1.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \int_{-3/2}^{5/2} [x]\,dx &= \int_{-3/2}^{-1} [x]\,dx + \int_{-1}^{0} [x]\,dx + \int_{0}^{1} [x]\,dx + \int_{1}^{2} [x]\,dx + \int_{2}^{5/2} [x]\,dx \\ &= -1 - 1 + 0 + 1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

□

126. *Έστω ότι η* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι ολοκληρώσιμη στο* $[a, b]$ *και έστω ότι ισχύει* $f(x) \ge 0$ *για κάθε* $x \in [a, b]$*. Αποδείξτε ότι* $0 \le \int_{c}^{d} f(x)\,dx \le \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ *για κάθε υποδιάστημα* $[c, d]$ *του* $[a, b]$*.*

Λύση. Επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, c]$ και για κάθε $x \in [d, b]$, συνεπάγεται

$$\int_a^c f(x)\,dx \geq \int_a^c 0\,dx = 0, \qquad \int_d^b f(x)\,dx \geq \int_d^b 0\,dx = 0.$$

Άρα

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx \geq 0 + \int_c^d f(x)\,dx + 0 = \int_c^d f(x)\,dx.$$

Τέλος, επειδή $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [c, d]$, συνεπάγεται $\int_c^d f(x)\,dx \geq \int_c^d 0\,dx = 0$. □

127. *Χωρίς να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα, αποδείξτε ότι* $0.60 < \int_{1/2}^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx < 0.75$.

Λύση. Η συνάρτηση $\frac{x}{x^2+1}$ έχει παράγωγο $\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ η οποία είναι > 0 στο $[\frac{1}{2}, 1)$ και < 0 στο $(1, 2]$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{2}, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$. Επομένως στο $[\frac{1}{2}, 2]$ η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι η τιμή της στο 1, δηλαδή $\frac{1}{2}$, και η ελάχιστη τιμή της είναι η μικρότερη από τις τιμές της στα $\frac{1}{2}$ και 2: και οι δύο αυτές τιμές είναι $\frac{2}{5}$. Άρα ισχύει

$$\frac{2}{5} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{στο } [\tfrac{1}{2}, 2].$$

Η συνάρτηση είναι και ολοκληρώσιμη στο $[\frac{1}{2}, 2]$ ως συνεχής και άρα

$$\frac{3}{5} = \frac{2}{5}(2 - \tfrac{1}{2}) \leq \int_{1/2}^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx \leq \frac{1}{2}(2 - \tfrac{1}{2}) = \frac{3}{4}.$$

□

128. *Βρείτε τα όρια* $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt$ *και* $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} \int_{1-x}^{1+x} \frac{t}{1+t^2}\,dt$ *χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.*

Λύση. (i) Η συνάρτηση $\frac{t}{1+t^2}$ έχει παράγωγο $\frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ η οποία είναι > 0 στο $(-1, 1)$ και < 0 στα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$. Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$.
Επειδή μας ενδιαφέρει το όριο καθώς $x \to +\infty$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $x \geq 1$, οπότε η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x, x + \sqrt{x}]$. Άρα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο διάστημα αυτό είναι οι τιμές της στα άκρα του διαστήματος και έχουμε ότι ισχύει

$$\frac{x+\sqrt{x}}{1+(x+\sqrt{x})^2} \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{x}{1+x^2} \qquad \text{για } t \in [x, x + \sqrt{x}].$$

Άρα

$$\frac{x+\sqrt{x}}{1+(x+\sqrt{x})^2}\left((x + \sqrt{x}) - x\right) \leq \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt \leq \frac{x}{1+x^2}\left((x + \sqrt{x}) - x\right)$$

και επομένως

$$\frac{(x+\sqrt{x})\sqrt{x}}{1+(x+\sqrt{x})^2} \leq \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt \leq \frac{x\sqrt{x}}{1+x^2}$$

Αυτό ισχύει για κάθε $x \geq 1$ και τώρα με την ιδιότητα παρεμβολής βρίσκουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\sqrt{x}} \frac{t}{1+t^2}\,dt = 0.$$

(ii) Επειδή μας ενδιαφέρει το όριο καθώς $x \to 0+$, θεωρούμε ότι $0 < x \leq 1$ οπότε, σύμφωνα με όσα είπαμε στην αρχή του (i), η συνάρτηση $\frac{t}{1+t^2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1-x, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 1 + x]$. Άρα η μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο $[1 - x, 1 + x]$ είναι η τιμή της στο 1 και η ελάχιστη τιμή της στο $[1-x, 1+x]$ είναι η μικρότερη από τις τιμές της στα άκρα $1-x$ και $1 + x$. Με μία απλή σύγκριση βρίσκουμε ότι η μικρότερη από τις δύο τιμές στα άκρα είναι η τιμή στο $1 - x$ και συμπεραίνουμε ότι, αν $0 < x \leq 1$, τότε ισχύει

$$\frac{1-x}{1+(1-x)^2} \leq \frac{t}{1+t^2} \leq \frac{1}{2} \qquad \text{για } t \in [1 - x, 1 + x].$$

Συνεπάγεται ότι ισχύει

$$\tfrac{1-x}{1+(1-x)^2}\left((1+x)-(1-x)\right) \leq \int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\,dt \leq \tfrac{1}{2}\left((1+x)-(1-x)\right)$$

και επομένως

$$\tfrac{2(1-x)}{1+(1-x)^2} \leq \tfrac{1}{x}\int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\,dt \leq 1$$

για κάθε x με $0 < x \leq 1$. Από την ιδιότητα παρεμβολής έχουμε ότι

$$\lim_{x\to 0+} \tfrac{1}{x}\int_{1-x}^{1+x} \tfrac{t}{1+t^2}\,dt = 1.$$

□

129. *Από το ότι $\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \log\frac{b}{a}$ για $0 < a < b$ αποδείξτε ότι $\frac{1}{n+1} \leq \log(n+1) - \log n \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και μετά αποδείξτε ότι η ακολουθία (x_n) με τύπο $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n$ είναι φθίνουσα με κάτω φράγμα το 0.*

Λύση. Η ανισότητα γράφεται, ισοδύναμα, $\frac{1}{n+1} \leq \log\frac{n+1}{n} \leq \frac{1}{n}$, δηλαδή

$$\tfrac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \tfrac{1}{x}\,dx \leq \tfrac{1}{n}.$$

Αυτό είναι σωστό διότι ισχύει $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $x \in [n, n+1]$.
Τώρα, ισχύει

$$x_{n+1} - x_n = \tfrac{1}{n+1} - \log(n+1) + \log n \leq 0$$

οπότε η (x_n) είναι φθίνουσα. Τέλος, προσθέτοντας τις ανισότητες $\log(k+1) - \log k \leq \frac{1}{k}$ για $k = 1, 2, \ldots, n$, βρίσκουμε ότι

$$\log(n+1) \leq 1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{n}$$

οπότε $x_n \geq \log(n+1) - \log n > 0$. □

130. *Έστω $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$ για κάθε $x_1, x_2 \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι για κάθε υποδιάστημα $[a,b]$ του $[0,1]$ ισχύει $\left|\int_a^b f(x)\,dx - (b-a)f(b)\right| \leq \frac{M}{2}(b-a)^2$.*

Λύση. Είναι

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - (b-a)f(b)\right| &\leq \left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(b)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f(x) - f(b))\,dx\right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f(b)|\,dx \leq M\int_a^b |x-b|\,dx = \tfrac{M}{2}(b-a)^2.\end{aligned}$$

□

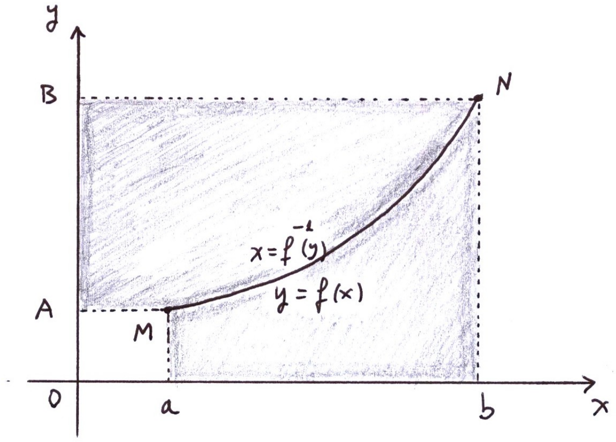
131. *Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$.*
(i) Τί συμπέρασμα προκύπτει αν $\int_a^b f(x)^2\,dx = 0$;
(ii) Τί συμπέρασμα προκύπτει αν $\int_a^b f(x)^2\,dx = 0$ και η f είναι συνεχής στο $[a,b]$;

Λύση. (i) Προφανώς ισχύει $f(x)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in [a,b]$ και άρα $\int_a^b f(x)^2\,dx \geq 0$. Στην περίπτωση της ισότητας $\int_a^b f(x)^2\,dx = 0$ συνεπάγεται ότι ισχύει $f(x)^2 = 0$, ή ισοδύναμα $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [a,b]$ το οποίο είναι σημείο συνέχειας της f.
(ii) Αν επιπλέον η f είναι συνεχής στο $[a,b]$ τότε κάθε $x \in [a,b]$ είναι σημείο συνέχειας της f οπότε το συμπέρασμα είναι ότι ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. □

132. *Έστω $0 \leq a < b$ και $0 \leq A < B$ και ότι η $y = f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[a,b]$ με $f(a) = A$, $f(b) = B$. Γνωρίζουμε ότι η $x = f^{-1}(y)$ είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[A,B]$ με $f^{-1}(A) = a$, $f^{-1}(B) = b$. Αποδείξτε με γεωμετρικό τρόπο ότι*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_A^B f^{-1}(y)\,dy = Bb - Aa.$$

Λύση. Στο σχήμα φαίνεται το γράφημα της f ως συνάρτηση από το $[a, b]$ στο $[A, B]$ και το γράφημα της f^{-1} ως συνάρτηση από το $[A, B]$ στο $[a, b]$.



Τα δύο γραφήματα ταυτίζονται με την ίδια καμπύλη. Προσέξτε: αν θέλαμε να τοποθετήσουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της f^{-1} σε οριζόντιο άξονα και την εξαρτημένη μεταβλητή της σε κατακόρυφο άξονα, θα κάναμε ανάκλαση του γραφήματος της f ως προς την κύρια διαγώνιο του επιπέδου και τότε το γράφημα της f^{-1} θα ήταν το συμμετρικό του γραφήματος της f ως προς την κύρια διαγώνιο. Όμως εμείς τώρα κρατάμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της f^{-1}, δηλαδή την y, στον κατακόρυφο άξονα και την εξαρτημένη μεταβλητή της, δηλαδή την x, στον οριζόντιο άξονα. Τώρα, το $\int_a^b f(x)\,dx$ είναι ίσο με το εμβαδό του καμπυλόγραμμου σχήματος $abNM$ και το $\int_A^B f^{-1}(y)\,dy$ είναι ίσο με το εμβαδό του καμπυλόγραμμου σχήματος $ABNM$. Άρα το άθροισμα των δύο ολοκληρωμάτων είναι ίσο με το εμβαδό του σχήματος $aMABNb$, το οποίο είναι ίσο με την διαφορά των εμβαδών των ορθογωνίων παραλληλογράμμων $0bNB$ και $0aMA$, δηλαδή ίσο με $Bb - Aa$. □

Πριν προχωρήσουμε στην λύση των επόμενων πέντε ασκήσεων, ας ξεκαθαρίσουμε κάποια πράγματα σχετικά με τον συμβολισμό $\sum$ για αθροίσματα.
Πολλές φορές συναντάμε αθροίσματα με n προσθετέους στα οποία η διάταξη των προσθετέων καθορίζεται από ένα δείκτη, ας πούμε k, ο οποίος παίρνει όλες τις ακέραιες τιμές από 1 μέχρι n: ο πρώτος προσθετέος, ο δεύτερος προσθετέος, κ.τ.λ., ο k-οστός προσθετέος, κ.τ.λ., ο n-οστός προσθετέος. Για παράδειγμα:

$$1 + 2 + \cdots + k + \cdots + n, \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + \cdots + n^2, \quad \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{k} + \cdots + \tfrac{1}{n}.$$

Τότε, για εξοικονόμηση χώρου, συνηθίζουμε να συμπτύσσουμε το άθροισμα χρησιμοποιώντας το σύμβολο $\sum$ ως εξής: γράφουμε μόνο τον k-οστό προσθετέο και μπροστά από αυτόν το σύμβολο $\sum_{k=1}^n$ στο οποίο δηλώνουμε ότι ο δείκτης k διατρέχει όλες τις ακέραιες τιμές από 1 μέχρι n. Για παράδειγμα, τα προηγούμενα τρία αθροίσματα γράφονται:

$$\textstyle\sum_{k=1}^n k, \qquad \sum_{k=1}^n k^2, \qquad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Πιο γενικά, αν έχουμε ένα άθροισμα $a_1 + \cdots + a_k + \cdots + a_n$ μπορούμε να το γράψουμε

$$\textstyle\sum_{k=1}^n a_k.$$

(Μπορεί να συναντήσουμε και αθροίσματα $\sum_{k=m}^n a_k$ στα οποία ο δείκτης k διατρέχει όλες τις ακέραιες τιμές από m μέχρι n.)
Ας δούμε δύο απλούς κανόνες αλγεβρικού χειρισμού τέτοιων αθροισμάτων.
Παίρνουμε τον γνωστό τύπο αναδιάταξης των προσθετέων

$$(a_1+\cdots+a_k+\cdots+a_n)+(b_1+\cdots+b_k+\cdots+b_n) = (a_1+b_1)+\cdots+(a_k+b_k)+\cdots+(a_n+b_n)$$

και με το σύμβολο $\sum$ τον γράφουμε

$$\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k).$$

Επίσης, τον τύπο εξαγωγής κοινού παράγοντα

$$\lambda a_1 + \cdots + \lambda a_k + \cdots + \lambda a_n = \lambda(a_1 + \cdots + a_k + \cdots + a_n)$$

με το σύμβολο $\sum$ τον γράφουμε

$$\sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k.$$

Συνεχίζουμε με τις υπόλοιπες ασκήσεις.

133. *Θεωρήστε διαμέριση του $[a, b]$ με ισαπέχοντα διαιρετικά σημεία για να αποδείξετε ότι*

$$\int_a^b e^x \, dx = e^b - e^a.$$

Λύση. Για κάθε n θεωρούμε την διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα ίδιου μήκους $\frac{b-a}{n}$. Όπως έχουμε δει, τα διαιρετικά σημεία της Δ δίνονται από τον τύπο

$$x_k = a + k\tfrac{b-a}{n} \qquad \text{για } 0 \le k \le n.$$

Όλα τα υποδιαστήματα $[x_{k-1}, x_k]$ έχουν ίδιο μήκος

$$x_k - x_{k-1} = \tfrac{b-a}{n}$$

οπότε το πλάτος της Δ είναι ακριβώς $\frac{b-a}{n}$.
Επίσης επιλέγουμε το σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, όπου το κάθε ξ_k είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του αντίστοιχου διαστήματος $[x_{k-1}, x_k]$. Εμείς θα επιλέξουμε

$$\xi_k = x_k = a + k\tfrac{b-a}{n} \qquad \text{για } 1 \le k \le n.$$

Δηλαδή σε κάθε υποδιάστημα επιλέγουμε το δεξιό άκρο του ως ενδιάμεσο σημείο.
Τότε το αντίστοιχο άθροισμα Riemann της συνάρτησης e^x στο $[a, b]$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n e^{\xi_k}(x_k - x_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n e^{a+k\frac{b-a}{n}} \tfrac{b-a}{n} \\
&= \sum_{k=1}^n e^a e^{kt_n} t_n \qquad\qquad \text{με } t_n = \tfrac{b-a}{n} \\
&= e^a t_n \sum_{k=1}^n (e^{t_n})^k \\
&= e^a t_n e^{t_n} \tfrac{(e^{t_n})^n - 1}{e^{t_n} - 1} \\
&= e^a t_n e^{t_n} \tfrac{e^{b-a} - 1}{e^{t_n} - 1} \\
&= e^a (e^{b-a} - 1) e^{t_n} \tfrac{t_n}{e^{t_n} - 1} \\
&= (e^b - e^a) e^{t_n} \tfrac{t_n}{e^{t_n} - 1}.
\end{aligned}$$

Επεξήγηση για την τέταρτη ισότητα: με $\lambda = e^{t_n}$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^n (e^{t_n})^k = \sum_{k=1}^n \lambda^k = \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^n = \lambda(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{n-1}) = \lambda \tfrac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1}.$$

Τώρα, αν $n \to +\infty$ έχουμε ότι το πλάτος της Δ, δηλαδή το $\frac{b-a}{n}$, τείνει στο 0. Επομένως το αντίστοιχο άθροισμα Riemann τείνει στο ολοκλήρωμα $\int_a^b e^x \, dx$:

$$\sum_{k=1}^n e^{\xi_k}(x_k - x_{k-1}) \to \int_a^b e^x \, dx.$$

Δηλαδή:
$$(e^b-e^a)e^{t_n}\,\tfrac{t_n}{e^{t_n}-1}\to\int_a^b e^x\,dx.$$
Επομένως η τιμή του $\int_a^b e^x\,dx$ είναι το όριο του $(e^b-e^a)e^{t_n}\,\frac{t_n}{e^{t_n}-1}$ όταν $n\to+\infty$.
Το e^b-e^a είναι σταθερό αφού δεν εξαρτάται από το n. Επειδή $t_n=\frac{b-a}{n}\to 0$ συνεπάγεται $e^{t_n}\to 1$. Απομένει να βρούμε το όριο του $\frac{t_n}{e^{t_n}-1}$ το οποίο είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Όμως γνωρίζουμε το όριο
$$\lim_{t\to 0}\tfrac{e^t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\tfrac{e^t-e^0}{t-0}=\tfrac{de^t}{dt}\Big|_{t=0}=1.$$
Άρα
$$(e^b-e^a)e^{t_n}\,\tfrac{t_n}{e^{t_n}-1}\to(e^b-e^a)\cdot 1\cdot 1=e^b-e^a$$
και συμπεραίνουμε ότι $\int_a^b e^x\,dx=e^b-e^a$. □

134. *Θεωρήστε διαμέριση του* $[a,b]$ *με ισαπέχοντα διαιρετικά σημεία για να αποδείξετε ότι*
$$\int_a^b\cos x\,dx=\sin b-\sin a,\qquad \int_a^b\sin x\,dx=\cos a-\cos b.$$
Θα χρειαστείτε τους τύπους
$$\cos t+\cos(2t)+\cos(3t)+\cdots+\cos(nt)=\big(\sin\tfrac{nt}{2}\cos\tfrac{(n+1)t}{2}\big)/\big(\sin\tfrac{t}{2}\big)$$
$$\sin t+\sin(2t)+\sin(3t)+\cdots+\sin(nt)=\big(\sin\tfrac{nt}{2}\sin\tfrac{(n+1)t}{2}\big)/\big(\sin\tfrac{t}{2}\big)$$
οι οποίοι προκύπτουν πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη τους με το $\sin\frac{t}{2}$.

Λύση. Ο πρώτος τύπος προκύπτει εύκολα από την ισότητα
$$\sin\tfrac{t}{2}\cos(kt)=\tfrac12\sin(kt+\tfrac{t}{2})-\tfrac12\sin(kt-\tfrac{t}{2})$$
με άθροιση για $k=1,\dots,n$. Ο δεύτερος τύπος προκύπτει με τον ίδιο τρόπο από την ισότητα
$$\sin\tfrac{t}{2}\sin(kt)=-\tfrac12\cos(kt+\tfrac{t}{2})+\tfrac12\cos(kt-\tfrac{t}{2}).$$
Για κάθε n θεωρούμε την διαμέριση $\Delta=\{x_0,x_1,\dots,x_{n-1},x_n\}$ του $[a,b]$ σε n υποδιαστήματα ίδιου μήκους $\frac{b-a}{n}$ (όπως στην προηγούμενη άσκηση). Τα διαιρετικά σημεία της Δ δίνονται από τον τύπο
$$x_k=a+k\tfrac{b-a}{n}\qquad\text{για } 0\le k\le n$$
και όλα τα υποδιαστήματα $[x_{k-1},x_k]$ έχουν ίδιο μήκος $x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}$ οπότε το πλάτος της Δ είναι $\frac{b-a}{n}$. Κατόπιν επιλέγουμε το σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi=\{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ όπου το κάθε ξ_k είναι το δεξιό άκρο του αντίστοιχου διαστήματος $[x_{k-1},x_k]$:
$$\xi_k=x_k=a+k\tfrac{b-a}{n}\qquad\text{για } 1\le k\le n.$$
Τότε το αντίστοιχο άθροισμα Riemann της συνάρτησης $\cos x$ στο $[a,b]$ είναι ίσο με
$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=1}^n\cos\xi_k\,(x_k-x_{k-1})&=\textstyle\sum_{k=1}^n\cos(a+k\frac{b-a}{n})\,\frac{b-a}{n}\\
&=\textstyle\sum_{k=1}^n\cos(a+kt_n)t_n\qquad\qquad \text{με } t_n=\frac{b-a}{n}\\
&=t_n\textstyle\sum_{k=1}^n\cos(a+kt_n)\\
&=t_n\textstyle\sum_{k=1}^n(\cos a\cos(kt_n)-\sin a\sin(kt_n))\\
&=t_n\textstyle\sum_{k=1}^n\cos a\cos(kt_n)-t_n\sum_{k=1}^n\sin a\sin(kt_n)\\
&=t_n\cos a\textstyle\sum_{k=1}^n\cos(kt_n)-t_n\sin a\sum_{k=1}^n\sin(kt_n)\\
&=t_n\cos a\,\frac{\sin\frac{nt_n}{2}\cos\frac{(n+1)t_n}{2}}{\sin\frac{t_n}{2}}-t_n\sin a\,\frac{\sin\frac{nt_n}{2}\sin\frac{(n+1)t_n}{2}}{\sin\frac{t_n}{2}}\\
&=t_n\cos a\,\frac{\sin\frac{b-a}{2}\cos\frac{(n+1)t_n}{2}}{\sin\frac{t_n}{2}}-t_n\sin a\,\frac{\sin\frac{b-a}{2}\sin\frac{(n+1)t_n}{2}}{\sin\frac{t_n}{2}}\\
&=\sin\tfrac{b-a}{2}\big(\cos a\cos\tfrac{(n+1)t_n}{2}-\sin a\sin\tfrac{(n+1)t_n}{2}\big)\,\tfrac{t_n}{\sin\frac{t_n}{2}}\\
&=\sin\tfrac{b-a}{2}\cos\big(a+\tfrac{(n+1)t_n}{2}\big)\,\tfrac{t_n}{\sin\frac{t_n}{2}}
\end{aligned}$$

Τώρα, αν $n \to +\infty$ έχουμε ότι το πλάτος της Δ, δηλαδή το $\frac{b-a}{n}$, τείνει στο 0. Επομένως το αντίστοιχο άθροισμα Riemann τείνει στο ολοκλήρωμα $\int_a^b \cos x\, dx$:

$$\sum_{k=1}^n \cos\xi_k\,(x_k - x_{k-1}) \to \int_a^b \cos x\, dx.$$

Δηλαδή:

$$\sin\tfrac{b-a}{2}\cos\big(a + \tfrac{(n+1)t_n}{2}\big)\,\tfrac{t_n}{\sin\frac{t_n}{2}} \to \int_a^b \cos x\, dx.$$

Όταν $n \to +\infty$ έχουμε

$$\tfrac{(n+1)t_n}{2} = \tfrac{(b-a)(n+1)}{2n} \to \tfrac{b-a}{2}$$

οπότε

$$\cos\big(a + \tfrac{(n+1)t_n}{2}\big) \to \cos\big(a + \tfrac{b-a}{2}\big) = \cos\tfrac{b+a}{2}.$$

Τέλος, επειδή $t_n = \frac{b-a}{n} \to 0$, από το $\frac{t_n}{\sin\frac{t_n}{2}}$ προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Όμως

$$\lim_{t\to 0}\tfrac{\sin\frac{t}{2}}{t} = \tfrac{1}{2}\lim_{t\to 0}\tfrac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}} = \tfrac{1}{2}\lim_{u\to 0}\tfrac{\sin u}{u} = \tfrac{1}{2}$$

και άρα

$$\sin\tfrac{b-a}{2}\cos\big(a + \tfrac{(n+1)t_n}{2}\big)\,\tfrac{t_n}{\sin\frac{t_n}{2}} \to 2\sin\tfrac{b-a}{2}\cos\tfrac{b+a}{2} = \sin b - \sin a.$$

Έτσι έχουμε $\int_a^b \cos x\, dx = \sin b - \sin a$ και ομοίως βρίσκουμε $\int_a^b \sin x\, dx = \cos a - \cos b$. $\square$

135. *Αν $0 < a < b$, $p \neq -1$, με την διαμέριση του παραδείγματος $\int_a^b \frac{1}{x}\, dx$ αποδείξτε ότι*

$$\int_a^b x^p\, dx = \tfrac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}.$$

Λύση. Για κάθε n θεωρούμε την διαμέριση $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$ του $[a,b]$ όπου τα διαιρετικά σημεία δίνονται από τον τύπο

$$x_k = a\mu_n^k \qquad \text{για } 0 \le k \le n.$$

Ο αριθμός $\mu_n > 1$ προσδιορίζεται από την ισότητα $a\mu_n^n = b$ ώστε το τελευταίο σημείο της διαμέρισης να είναι το b. Δηλαδή

$$\mu_n = \big(\tfrac{b}{a}\big)^{1/n} > 1.$$

Προσέξτε: τα υποδιαστήματα δεν έχουν ίδιο μήκος.

Θεωρούμε και το σύνολο ενδιάμεσων σημείων $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ όπου το κάθε ξ_k είναι το δεξιό άκρο του αντίστοιχου διαστήματος $[x_{k-1}, x_k]$:

$$\xi_k = x_k = a\mu_n^k \qquad \text{για } 1 \le k \le n.$$

Τότε το αντίστοιχο άθροισμα Riemann της συνάρτησης x^p στο $[a,b]$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \xi_k^p(x_k - x_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n a^p\mu_n^{kp}(a\mu_n^k - a\mu_n^{k-1})\\
&= \sum_{k=1}^n a^p\mu_n^{kp}a\mu_n^k\big(1 - \tfrac{1}{\mu_n}\big)\\
&= a^{p+1}\big(1 - \tfrac{1}{\mu_n}\big)\sum_{k=1}^n(\mu_n^{p+1})^k\\
&= a^{p+1}\big(1 - \tfrac{1}{\mu_n}\big)\mu_n^{p+1}\,\tfrac{(\mu_n^{p+1})^n - 1}{\mu_n^{p+1} - 1}\\
&= a^{p+1}(\mu_n - 1)\mu_n^p\,\tfrac{(b/a)^{p+1} - 1}{\mu_n^{p+1} - 1}\\
&= a^{p+1}((b/a)^{p+1} - 1)\mu_n^p\,\tfrac{\mu_n - 1}{\mu_n^{p+1} - 1}\\
&= (b^{p+1} - a^{p+1})\mu_n^p\,\tfrac{\mu_n - 1}{\mu_n^{p+1} - 1}.
\end{aligned}$$

Το μήκος του k-οστού υποδιαστήματος της Δ είναι $a\mu_n^k - a\mu_n^{k-1} = a(1-\frac{1}{\mu_n})\mu_n^k$ και, επειδή $\mu_n > 1$, το μεγαλύτερο μήκος είναι το n-οστό. Δηλαδή το πλάτος της Δ είναι ίσο με

$$a\big(1-\tfrac{1}{\mu_n}\big)\mu_n^n = b\big(1-(\tfrac{a}{b})^{1/n}\big).$$

Άρα όταν $n \to +\infty$ το πλάτος της Δ τείνει στο 0 και επομένως το αντίστοιχο άθροισμα Riemann τείνει στο ολοκλήρωμα $\int_a^b x^p\,dx$:

$$\textstyle\sum_{k=1}^n \xi_k^p(x_k - x_{k-1}) \to \int_a^b x^p\,dx.$$

Δηλαδή:

$$(b^{p+1}-a^{p+1})\mu_n^p\,\tfrac{\mu_n-1}{\mu_n^{p+1}-1} \to \textstyle\int_a^b x^p\,dx.$$

Τώρα έχουμε ότι $\mu_n = (\frac{b}{a})^{1/n} \to 1$ οπότε $\mu_n^p \to 1$. Από το $\frac{\mu_n-1}{\mu_n^{p+1}-1}$ προκύπτει απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$, αλλά γνωρίζουμε το όριο

$$\lim_{t\to1}\tfrac{t^{p+1}-1}{t-1} = \lim_{t\to1}\tfrac{t^{p+1}-1^{p+1}}{t-1} = \tfrac{dt^{p+1}}{dt}\Big|_{t=1} = p.$$

Επομένως

$$(b^{p+1}-a^{p+1})\mu_n^p\,\tfrac{\mu_n-1}{\mu_n^{p+1}-1} \to (b^{p+1}-a^{p+1})\cdot 1\cdot\tfrac{1}{p} = \tfrac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p}.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\int_a^b x^p\,dx = \frac{b^{p+1}-a^{p+1}}{p}$. □

136. *Γράψτε το όριο* $\lim_{n\to+\infty}\big(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+k}+\cdots+\frac{1}{n+n}\big)$ *με την μορφή ολοκληρώματος ως εξής: γράψτε* $\frac{1}{n+k} = \frac{1}{1+(k/n)}\frac{1}{n} = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ *με κατάλληλη συνάρτηση* f *στο διάστημα* $[0,1]$*, κατάλληλη διαμέριση* $\Delta = \{x_0,\ldots,x_n\}$ *του* $[0,1]$ *και κατάλληλο σύνολο* $\Xi = \{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ *ενδιάμεσων σημείων.*

Λύση. Αν πάρουμε διαιρετικά σημεία στο $[0,1]$ έτσι ώστε να σχηματίζονται n υποδιαστήματα ίδιου μήκους τότε κάθε υποδιάστημα θα έχει μήκος $\frac{1}{n}$. Τα διαιρετικά σημεία θα δίνονται από τον γνωστό τύπο:

$$x_k = \tfrac{k}{n} \qquad \text{για } 0 \le k \le n.$$

Τώρα επιλέγουμε σε κάθε υποδιάστημα το δεξιό άκρο του ως ενδιάμεσο σημείο. Δηλαδή

$$\xi_k = x_k = \tfrac{k}{n} \qquad \text{για } 1 \le k \le n.$$

Τέλος, θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \tfrac{1}{1+x} \qquad \text{για } x \in [0,1].$$

Τώρα έχουμε ότι

$$\tfrac{1}{n+k} = \tfrac{1}{1+(k/n)}\,\tfrac{1}{n} = f(\tfrac{k}{n})\,\tfrac{1}{n} = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad \text{για } 1 \le k \le n.$$

Επομένως το δοσμένο άθροισμα γράφεται

$$\tfrac{1}{n+1}+\cdots+\tfrac{1}{n+k}+\cdots+\tfrac{1}{n+n} = \textstyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

οπότε είναι ίσο με το άθροισμα Riemann της f στο $[0,1]$ ως προς την διαμέριση $\Delta = \{x_0,\ldots,x_n\}$ του $[0,1]$ και το σύνολο $\Xi = \{\xi_1,\ldots,\xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Επειδή το πλάτος της Δ είναι $\frac{1}{n}$ και τείνει στο 0 όταν $n \to +\infty$, συνεπάγεται ότι το άθροισμα Riemann (δηλαδή το δοσμένο άθροισμα) τείνει στο ολοκλήρωμα της συνάρτησης στο $[0,1]$. Άρα

$$\lim_{n\to+\infty}\big(\tfrac{1}{n+1}+\cdots+\tfrac{1}{n+k}+\cdots+\tfrac{1}{n+n}\big) = \lim_{n\to+\infty}\textstyle\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx.$$

Πρώτο σχόλιο: Στην θεωρία υπολογίζεται η τιμή του ολοκληρώματος: $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \log 2$. Έτσι ο αριθμός $\log 2$ είναι η τιμή του ορίου του δοσμένου αθροίσματος.

Δεύτερο σχόλιο: Με την ευκαιρία ας επισημάνουμε ένα συνηθισμένο λάθος: όταν έχουμε ένα άθροισμα του οποίου κάθε προσθετέος έχει όριο 0 κάνουμε το λάθος και συμπεραίνουμε ότι και το άθροισμα έχει όριο 0. Αυτό το συμπέρασμα είναι σωστό όταν το *πλήθος* των προσθετέων στο άθροισμα είναι *σταθερό* (άθροισμα με δύο ή τρεις ή δέκα προσθετέους), αλλά δεν είναι απαραίτητα σωστό όταν το πλήθος των προσθετέων αυξάνεται απεριόριστα. Για παράδειγμα στο δοσμένο άθροισμα κάθε όρος τείνει στο 0 όταν $n \to +\infty$ αλλά και το πλήθος των προσθετέων, το οποίο είναι n, τείνει στο $+\infty$. Και, όπως είδαμε, το άθροισμα τείνει στον αριθμό $\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$. Ο αριθμός αυτός, ακόμη και αν δεν γνωρίζουμε την ακριβή τιμή του (δηλαδή $\log 2$), μπορούμε αμέσως να πούμε ότι είναι > 0 αφού η συνάρτηση $\frac{1}{1+x}$ είναι συνεχής και > 0 στο $[0,1]$. □

137. *Γράψτε το όριο* $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+k^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$ *με την μορφή ολοκληρώματος κατάλληλης συνάρτησης σε κατάλληλο διάστημα.*

Λύση. Όπως στην προηγούμενη άσκηση, παίρνουμε διαιρετικά σημεία στο $[0,1]$

$$x_k = \tfrac{k}{n} \qquad \text{για } 0 \le k \le n$$

έτσι ώστε να σχηματίζονται n υποδιαστήματα ίδιου μήκους. Κατόπιν επιλέγουμε σε κάθε υποδιάστημα το δεξιό άκρο του ως ενδιάμεσο σημείο. Δηλαδή

$$\xi_k = x_k = \tfrac{k}{n} \qquad \text{για } 1 \le k \le n.$$

Τέλος, θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \tfrac{1}{1+x^2} \qquad \text{για } x \in [0,1].$$

Τώρα

$$\tfrac{n}{n^2+k^2} = \tfrac{1}{1+(k/n)^2}\,\tfrac{1}{n} = f(\tfrac{k}{n})\,\tfrac{1}{n} = f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \qquad \text{για } 1 \le k \le n$$

και άρα

$$\tfrac{n}{n^2+1^2}+\cdots+\tfrac{n}{n^2+k^2}+\cdots+\tfrac{n}{n^2+n^2} = \sum_{k=1}^n \tfrac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Έτσι το δοσμένο άθροισμα είναι ίσο με το άθροισμα Riemann της f στο $[0,1]$ ως προς την διαμέριση $\Delta = \{x_0,\dots,x_n\}$ του $[0,1]$ και το σύνολο $\Xi = \{\xi_1,\dots,\xi_n\}$ ενδιάμεσων σημείων. Επειδή το πλάτος της Δ είναι $\frac{1}{n}$ και τείνει στο 0 όταν $n \to +\infty$, συνεπάγεται ότι το άθροισμα Riemann (δηλαδή το δοσμένο άθροισμα) τείνει στο ολοκλήρωμα της συνάρτησης στο $[0,1]$. Άρα

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\tfrac{n}{n^2+1^1}+\cdots+\tfrac{n}{n^2+k^2}+\cdots+\tfrac{n}{n^2+n^2}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{1+x^2}\,dx.\end{aligned}$$

Σχόλιο: Στην θεωρία υπολογίζεται η τιμή του ολοκληρώματος: $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. □

ΣΧΕΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ RIEMANN

138. *(i) Βρείτε μία παράγουσα της $2x + \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$. Ποιές είναι όλες οι παράγουσες της $2x + \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$;*

(ii) Βρείτε μία παράγουσα της $2x + \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$ ώστε η τιμή της στο $x = 1$ να είναι -3. Πόσες τέτοιες παράγουσες υπάρχουν;

Λύση. (i) Η συνάρτηση $x^2 + \log x$ είναι παράγουσα της $2x + \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$.
Επειδή το $(0, +\infty)$ είναι διάστημα, συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις $x^2 + \log x + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση, είναι όλες οι παράγουσες της $2x + \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$.

(ii) Για να βρούμε μία παράγουσα με τίμη -3 στο $x = 1$, γράφουμε $1^2 + \log 1 + c = -3$ και βρίσκουμε $c = -4$. Άρα υπάρχει μόνο μία παράγουσα της $2x + \frac{1}{x}$ στο $(0, +\infty)$ με τιμή -3 στο $x = 1$ και αυτή είναι η συνάρτηση $x^2 + \log x - 4$. □

139. *Αποδείξτε ότι η* $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{αν } x < 0 \\ 1 & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$ *δεν έχει παράγουσα στο $(-\infty, +\infty)$.*

Λύση. Έστω F παράγουσα της f στο $(-\infty, +\infty)$. Δηλαδή, $F'(x) = f(x)$ για $x \in (-\infty, +\infty)$.
Επειδή ισχύει $F'(x) = 2x = (x^2)'$ για $x \in (-\infty, 0)$ και η F είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $(-\infty, 0]$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_1 ώστε να ισχύει $F(x) = x^2 + c_1$ για $x \in (-\infty, 0]$.
Ομοίως, επειδή ισχύει $F'(x) = 1 = x'$ για $x \in (0, +\infty)$ και η F είναι συνεχής (ως παραγωγίσιμη) στο $[0, +\infty)$, συνεπάγεται ότι υπάρχει c_2 ώστε να ισχύει $F(x) = x + c_2$ για $x \in [0, +\infty)$.
Βλέπουμε ότι $c_1 = F(0) = c_2$ και, συμβολίζοντας $c = c_1 = c_2$, συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + c & \text{αν } x \leq 0 \\ x + c & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$$

Τώρα, όμως, είναι $F'_-(0) = 0$ (γιατί;) και $F'_+(0) = 1$ (γιατί;), οπότε η F δεν έχει παράγωγο στο 0. Αυτό είναι άτοπο διότι πρέπει να ισχύει $F'(0) = f(0) = 1$. □

140. *Βρείτε συνάρτηση $F : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $F'(x^2) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$ και $F(1) = 1$.*

Λύση. Κάνουμε την αντικατάσταση $y = x^2$ και το ότι ισχύει $F'(x^2) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$ είναι ισοδύναμο με το ότι ισχύει $F'(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ για κάθε $y > 0$. Άρα η F είναι παράγουσα της $\frac{1}{\sqrt{y}}$ στο $(0, +\infty)$ οπότε υπάρχει σταθερά c ώστε να είναι $F(y) = 2\sqrt{y} + c$ στο $(0, +\infty)$. Με $y = 1$ βρίσκουμε $1 = F(1) = 2 + c$ οπότε $c = -1$. Άρα $F(y) = 2\sqrt{y} - 1$ στο $(0, +\infty)$. □

141. *(i) Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1 - \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$. Ποιά είναι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $1 - \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$; Με άλλα λόγια, ποιό είναι το $\int (1 - \sin x)\, dx$;*

(ii) Βρείτε ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1 - \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε η τιμή του στο $x = \pi$ να είναι -1. Πόσα τέτοια αόριστα ολοκληρώματα υπάρχουν;

Λύση. (i) Η συνάρτηση

$$\int_0^x (1 - \sin t)\, dt = x + \cos x - \cos 0 = x + \cos x - 1$$

είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1 - \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$.
Επειδή το $(-\infty, +\infty)$ είναι διάστημα, συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις $x + \cos x + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο $(-\infty, +\infty)$, είναι όλα τα αόριστα ολοκληρώματα της $1 - \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$. Δηλαδή

$$\int (1 - \sin x)\, dx = x + \cos x + c.$$

(ii) Για να βρούμε ένα αόριστο ολοκλήρωμα με τίμη -1 στο $x = \pi$, γράφουμε $\pi + \cos \pi + c = -1$ και βρίσκουμε $c = -\pi$. Άρα υπάρχει μόνο ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $1 - \sin x$ στο $(-\infty, +\infty)$ με τιμή -1 στο $x = \pi$ και αυτό είναι η συνάρτηση $x + \cos x - \pi$. □

142. *Έστω $\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx + x^2 + 3 + \sin x$. Με τί είναι ίση η παράσταση $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$;*

Λύση. Η παράσταση $\int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$ είναι όλες οι συναρτήσεις $x^2 + 3 + \sin x + c = x^2 + \sin x + c$, όπου c είναι αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση στο $(-\infty, +\infty)$. □

143. *Βρείτε συνεχή συνάρτηση f στο $(-\infty, +\infty)$ και αριθμό a ώστε να ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt = 3x^2 - 12$ για κάθε x. Πόσες λύσεις υπάρχουν;*

Λύση. Αν υπάρχει f συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε να ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt = 3x^2 - 12$ για κάθε x τότε, παραγωγίζοντας αυτήν τη σχέση, βρίσκουμε ότι ισχύει $f(x) = 6x$ για κάθε x.
Με την $f(x) = 6x$ έχουμε $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x 6t\,dt = 3x^2 - 3a^2$ οπότε ισχύει $\int_a^x f(t)\,dt = 3x^2 - 12$ για κάθε x αν και μόνο αν $3a^2 = 12$.
Άρα υπάρχουν ακριβώς μία συνάρτηση, η $f(x) = 6x$, και ακριβώς δύο a, το 2 και το -2. □

144. *Υπάρχει συνεχής συνάρτηση f στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = \cos x$ για κάθε x; Ίδια ερώτηση για την $\int_0^x f(t)\,dt = \cos x - 1$.*

Λύση. Δεν είναι δυνατό να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = \cos x$ για κάθε x, αφού δεν ισχύει για $x = 0$.
Αντιθέτως, η $\int_0^x f(t)\,dt = \cos x - 1$ ισχύει για $x = 0$.
Τώρα, αν υπάρχει f συνεχής στο $(-\infty, +\infty)$ ώστε να ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = \cos x - 1$ για κάθε x τότε, παραγωγίζοντας αυτήν τη σχέση, βρίσκουμε ότι ισχύει $f(x) = -\sin x$ για κάθε x.
Με την $f(x) = -\sin x$ έχουμε, πράγματι, ότι ισχύει $\int_0^x f(t)\,dt = -\int_0^x \sin t\,dt = \cos x - 1$ για κάθε x. □

145. *Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $\int_1^{x^2-x} \frac{t^2-2t}{e^t+2t^2}\,dt$ και $\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt$ και τις παραγώγους τους.*

Λύση. (i) Η συνάρτηση $f(t) = \frac{t^2-2t}{e^t+2t^2}$ ορίζεται σε ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$ και, ως συνεχής, είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποδιάστημα του $(-\infty, +\infty)$. Άρα η

$$F(x) = \int_1^{x^2-x} \frac{t^2-2t}{e^t+2t^2}\,dt = \int_1^{x^2-x} f(t)\,dt$$

ορίζεται σε ολόκληρο το $(-\infty, +\infty)$ και ισχύει

$$F'(x) = f(x^2-x)(x^2-x)' = \frac{(x^2-x)^2-2(x^2-x)}{e^{x^2-x}+2(x^2-x)^2}\,(2x-1) \qquad \text{για κάθε } x.$$

(ii) Η συνάρτηση $f(t) = \frac{e^t}{t}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και στο $(0, +\infty)$ και μάλιστα απειρίζεται όταν το t πλησιάζει το 0 είτε από δεξιά του είτε από αριστερά του. Άρα για να είναι η f ολοκληρώσιμη στο κλειστό διάστημα με άκρα x και x^2 πρέπει αυτά να ανήκουν είτε και τα δύο στο $(-\infty, 0)$ είτε και τα δύο στο $(0, +\infty)$ και άρα πρέπει να ανήκουν και τα δύο στο $(0, +\infty)$ (αφού $x^2 > 0$). Άρα το πεδίο ορισμού της

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,dt = \int_x^{x^2} f(t)\,dt$$

είναι το $(0, +\infty)$ και ισχύει

$$F'(x) = f(x^2)(x^2)' - f(x)x' = \frac{e^{x^2}}{x^2}\,2x - \frac{e^x}{x} = \frac{2e^{x^2}-e^x}{x} \qquad \text{για } x > 0.$$

□

146. *Βρείτε το όριο $\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt$.*

Λύση. Επειδή $\lim_{x\to+\infty} e^{x^2} = +\infty$, εφαρμόζουμε τον δεύτερο κανόνα του l' Hopitâl και βρίσκουμε

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt \overset{\text{H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0.$$

□

147. *Βρείτε* $a > 0$ *και* b, c, d *ώστε* $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{e^x - b - cx - dx^2} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\, dt = 1.$

Λύση. Είναι

$$\lim_{x\to 0+} (e^x - b - cx - dx^2) = 1 - b, \qquad \lim_{x\to 0+} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\, dt = 0.$$

Άρα αν $b \neq 1$ τότε

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{e^x - b - cx - dx^2} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\, dt = 0$$

και επομένως $b = 1$.
Τώρα, από τον κανόνα του l' Hopitâl συνεπάγεται

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{e^x - 1 - cx - dx^2} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\, dt \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{1}{e^x - c - 2dx} \frac{x^2}{\sqrt{a+x}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{e^x - c - 2dx}.$$

Για να εφαρμόσουμε τον κανόνα του l' Hopitâl πρέπει να υπάρχει το τελευταίο όριο. Αν $c \neq 1$ τότε το όριο αυτό υπάρχει και είναι ίσο με 0 οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Αν $c = 1$ τότε πάλι από τον κανόνα του l' Hopitâl συνεπάγεται

$$\lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{e^x - 1 - 2dx} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{2x}{e^x - 2d}.$$

Και πάλι, για να εφαρμόσουμε τον κανόνα του l' Hopitâl πρέπει να υπάρχει το τελευταίο όριο. Αν $2d \neq 1$ τότε το όριο αυτό υπάρχει και είναι ίσο με 0 οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Αν $2d = 1$ τότε πάλι με τον κανόνα του l' Hopitâl έχουμε

$$\lim_{x\to 0+} \frac{2x}{e^x - 1} \overset{\mathrm{H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{2}{e^x} = 2.$$

Άρα πρέπει να είναι $b = c = 1$ και $d = \frac{1}{2}$ και τότε

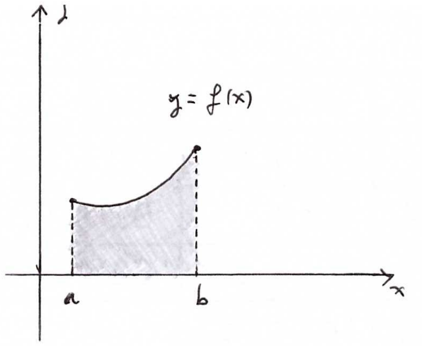
$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x\to 0+} \frac{1}{e^x - 1 - x - (1/2)x^2} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}}\, dt \overset{\mathrm{H}}{=} \frac{1}{\sqrt{a}} \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{e^x - 1 - x} \overset{\mathrm{H}}{=} \frac{1}{\sqrt{a}} \lim_{x\to 0+} \frac{2x}{e^x - 1} \\ &\overset{\mathrm{H}}{=} \frac{1}{\sqrt{a}} \lim_{x\to 0+} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

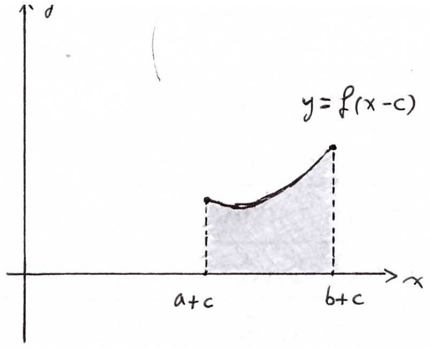
και επομένως $a = 4$. □

148. *Αποδείξτε τις παρακάτω ιδιότητες με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής.*
(i) $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$.
(ii) $\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$ *για κάθε* $\lambda > 0$.
Μελετήστε το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων, θεωρώντας επιπλέον ότι ισχύει $f(x) \geq 0$ *για κάθε* $x \in [a, b]$.

Λύση. (i) Στο $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\, dx$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \phi(x) = x - c$, για την οποία ισχύει $\phi'(x) = 1$ και $\phi(a+c) = a$, $\phi(b+c) = b$, και βρίσκουμε

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\, dx = \int_{a+c}^{b+c} f(\phi(x))\phi'(x)\, dx = \int_{\phi(a+c)}^{\phi(b+c)} f(y)\, dy = \int_a^b f(y)\, dy.$$

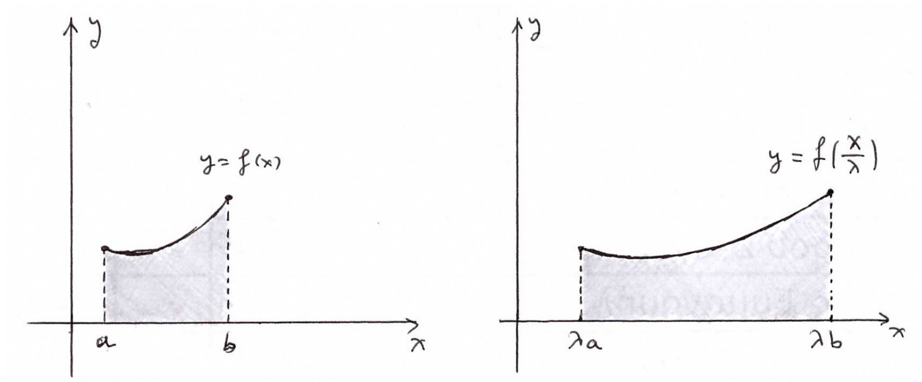




Το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτής της ιδιότητας φαίνεται στο σχήμα. Η συνάρτηση $f(x-c)$ είναι η $f(x)$ μεταφερμένη οριζόντια κατά c. Το $\int_{a+c}^{b+c} f(x-c)\,dx$ είναι το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της $f(x-c)$ στο διάστημα $[a+c,b+c]$ και είναι ίσο με το εμβαδό κάτω από το γράφημα της $f(x)$ στο διάστημα $[a,b]$ το οποίο με τη σειρά του είναι το $\int_a^b f(x)\,dx$.

(ii) Στο $\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\big(\frac{x}{\lambda}\big)\,dx$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y=\phi(x)=\frac{x}{\lambda}$, για την οποία ισχύει $\phi'(x)=\frac{1}{\lambda}$ και $\phi(\lambda a)=a$, $\phi(\lambda b)=b$, και βρίσκουμε

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\big(\tfrac{x}{\lambda}\big)\,dx=\lambda\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(\phi(x))\phi'(x)\,dx=\lambda\int_{\phi(\lambda a)}^{\phi(\lambda b)} f(y)\,dy=\lambda\int_a^b f(y)\,dy.$$



Το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτής της ιδιότητας φαίνεται στο σχήμα. Το γράφημα της συνάρτησης $f(\frac{x}{\lambda})$ προκύπτει όταν πολλαπλασιάσουμε τις x-συντεταγμένες των σημείων του γραφήματος της $f(x)$ με τον ίδιο αριθμό λ. Το $\int_{\lambda a}^{\lambda b} f\big(\frac{x}{\lambda}\big)\,dx$ είναι το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της $f(\frac{x}{\lambda})$ στο διάστημα $[\lambda a,\lambda b]$ και προκύπτει από το εμβαδό κάτω από το γράφημα της $f(x)$ στο διάστημα $[a,b]$, δηλαδή από το $\int_a^b f(x)\,dx$, όταν το πολλαπλασιάσουμε με τον αριθμό λ. □

149. *(i) Αν η $f:[-b,-a]\cup[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι άρτια αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$.*
(ii) Αν η $f:[-b,-a]\cup[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι περιττή αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$.
(iii) Αν η $f:[-b,b]\to\mathbb{R}$ είναι άρτια αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx=2\int_0^b f(x)\,dx$.
(iv) Αν η $f:[-b,b]\to\mathbb{R}$ είναι περιττή αποδείξτε ότι $\int_{-b}^{b} f(x)\,dx=0$.
Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων;

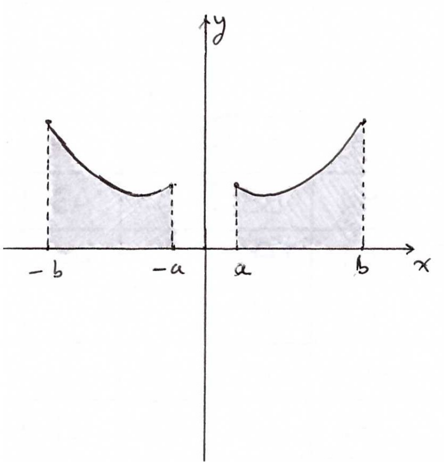
Λύση. (i) Στο $\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$ γράφουμε $f(x)=f(-x)$ (αφού η f είναι άρτια) και κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y=\phi(x)=-x$, για την οποία ισχύει $\phi'(x)=-1$ και $\phi(-a)=a$, $\phi(-b)=b$, και βρίσκουμε

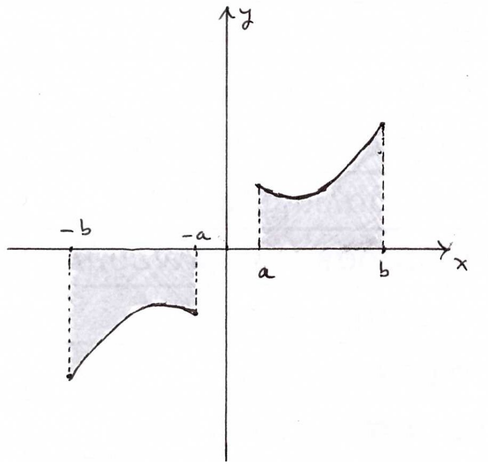
$$\begin{aligned}\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx&=\int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx=-\int_{-b}^{-a} f(\phi(x))\phi'(x)\,dx=-\int_{\phi(-b)}^{\phi(-a)} f(y)\,dy\\&=-\int_b^a f(y)\,dy=\int_a^b f(y)\,dy.\end{aligned}$$

(ii) Στο $\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx$ γράφουμε $f(x)=-f(-x)$ (αφού η f είναι περιττή) και κάνουμε την ίδια αλλαγή μεταβλητής $y=\phi(x)=-x$ που κάναμε στο (i) και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int_{-b}^{-a} f(x)\,dx&=-\int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx=\int_{-b}^{-a} f(\phi(x))\phi'(x)\,dx=\int_{\phi(-b)}^{\phi(-a)} f(y)\,dy\\&=\int_b^a f(y)\,dy=-\int_a^b f(y)\,dy.\end{aligned}$$

Το γεωμετρικό περιεχόμενο των (i) και (ii) φαίνονται καθαρά στο παρακάνω σχήμα: τα εμβαδά δεξιά του y-άξονα είναι ίδια με τα εμβαδά αριστερά του y-άξονα λόγω συμμετρίας είτε ως προς τον y-άξονα είτε ως προς το σημείο $(0,0)$.





(iii) Το (i) με $a = 0$ λέει ότι $\int_{-b}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{b} f(x)\,dx$ και άρα

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{b} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{b} f(x)\,dx.$$

(iv) Το (ii) με $a = 0$ λέει ότι $\int_{-b}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{b} f(x)\,dx$ και άρα

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{b} f(x)\,dx = 0.$$

□

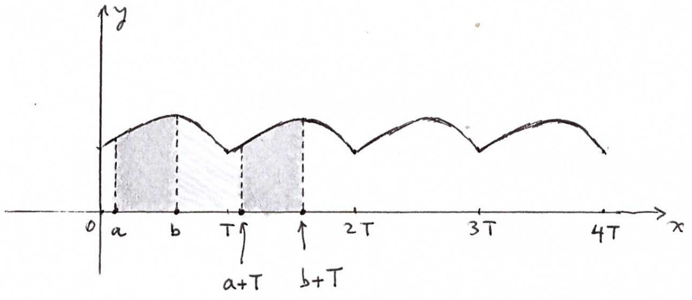
150. *Αν η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$ αποδείξτε ότι:*
(i) $\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx.$
(ii) $\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{b}^{b+T} f(x)\,dx.$
Ποιό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο αυτών των ιδιοτήτων;

Λύση. (i) Στο $\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx$ γράφουμε $f(x) = f(x-T)$ (αφού η f έχει περίοδο T) και κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \phi(x) = x - T$, για την οποία ισχύει $\phi'(x) = 1$ και $\phi(a+T) = a$, $\phi(b+T) = b$, και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx &= \int_{a+T}^{b+T} f(x-T)\,dx = \int_{a+T}^{b+T} f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int_{\phi(a+T)}^{\phi(b+T)} f(y)\,dy \\ &= \int_{a}^{b} f(y)\,dy.\end{aligned}$$

(ii) Χρησιμοποιώντας το (i) έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx &= \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{b+T} f(x)\,dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x)\,dx \\ &= \int_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx + \int_{b}^{b+T} f(x)\,dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{b}^{b+T} f(x)\,dx.\end{aligned}$$



Το γεωμετρικό περιεχόμενο της (i) φαίνεται στο σχήμα. Λόγω περιοδικότητας, η συνάρτηση στο διάστημα $[a+T, b+T]$ είναι "ίδια" με την συνάρτηση στο διάστημα $[a,b]$. Άρα το εμβαδό κάτω από το γράφημά της στο διάστημα $[a+T, b+T]$ είναι ίσο με το εμβαδό κάτω από το γράφημά της στο διάστημα $[a,b]$. Αν προσθέσουμε στα δύο αυτά ίσα εμβαδά το εμβαδό κάτω από το γράφημα στο διάστημα $[b, a+T]$, τότε προκύπτει ότι τα εμβαδά κάτω από το γράφημα στα διαστήματα $[a, a+T]$ και $[b, b+T]$ είναι ίσα. Αυτό είναι το γεωμετρικό περιεχόμενο της (ii). $\square$

151. *Με αλλαγές μεταβλητής βρείτε τα:*

$$\int x^3\cos(x^4)\,dx,\quad \int\cos^2 x\sin x\,dx,\quad \int\tfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx,\quad \int\tfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx,\quad \int\sqrt{2x+1}\,dx,$$

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx,\quad \int x^2\sqrt{2x+1}\,dx,\quad \int\tfrac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx,\quad \int\tfrac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx,\quad \int\tfrac{\sin x+\cos x}{(\sin x-\cos x)^3}\,dx,$$

$$\int\tfrac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx,\quad \int x\sqrt[3]{x-1}\,dx,\quad \int\tfrac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}\,dx,\quad \int\sqrt{4-\sin x}\,\cos x\,dx,\quad \int\tfrac{\sin x}{(2+\cos x)^3}\,dx,$$

$$\int\tfrac{\cos^3 x}{\sin x}\,dx,\quad \int\tfrac{x}{\sqrt{x}+1}\,dx,\quad \int x^2e^{x^3}\,dx,\quad \int e^{3\sin x}\cos x\,dx,\quad \int\tan x\,dx,\quad \int\tfrac{1}{x^2}\sin\tfrac{1}{x}\,dx,$$

$$\int\sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin(2x)\,dx,\quad \int\tfrac{1}{1+e^x}\,dx,\quad \int\sin^3 x\,dx,\quad \int\sin^4 x\,dx,\quad \int\tfrac{1}{x(x^4+1)}\,dx,$$

$$\int\tfrac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}\,dx,\quad \int\tfrac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\,dx,\quad \int\tfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx,\quad \int\tfrac{1}{4+x^2}\,dx,\quad \int\tfrac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx,$$

$$\int\tfrac{1}{x^2-x+2}\,dx,\quad \int\tfrac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx,\quad \int\tfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,\quad \int\tfrac{1}{1+\cos x}\,dx\quad \int\tfrac{1}{2+\cos^2 x}\,dx.$$

Λύση. Θα δούμε πλήρως πώς υπολογίζονται επτά από τα ολοκληρώματα και για τα υπόλοιπα θα αναφέρω απλώς την κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής. Σε αρκετές περιπτώσεις μπορεί κανείς να βρει διαφορετικό δρόμο υπολογισμού με άλλες αλλαγές μεταβλητής και άλλες αλγεβρικές πράξεις.
(i) Για το $\int\tan x\,dx$ γράφουμε $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ και χρησιμοποιούμε αλλαγή μεταβλητής $y=\cos x$ και $dy = -\sin x\,dx$. Έτσι

$$\int\tan x\,dx = \int\tfrac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int\tfrac{1}{y}\,dy\big|_{y=\cos x} = -(\log|y|+c)\big|_{y=\cos x} = -\log|\cos x|+c.$$

(ii) Για το $\int\frac{1}{1+e^x}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=e^x$ και $dy=e^x\,dx$ και τότε

$$\int\tfrac{1}{1+e^x}\,dx = \int\tfrac{1}{(1+y)y}\,dy\big|_{y=e^x}.$$

Κατόπιν, έχουμε $\frac{1}{(1+y)y} = \frac{1}{y}-\frac{1}{1+y}$ και άρα

$$\int\tfrac{1}{(1+y)y}\,dy = \int\tfrac{1}{y}\,dy - \int\tfrac{1}{1+y}\,dy = \log|y|-\log|1+y|+c = \log\big|\tfrac{y}{1+y}\big|+c.$$

Επομένως,

$$\int\tfrac{1}{1+e^x}\,dx = \big(\log\big|\tfrac{y}{1+y}\big|+c\big)\big|_{y=e^x} = \log\tfrac{e^x}{1+e^x}+c.$$

Παρατηρήστε ότι στο παραπάνω ολοκλήρωμα $\int\frac{1}{(1+y)y}\,dy$ η μεταβλητή y ανήκει στο $(0,+\infty)$ αφού είναι $y=e^x$. Επομένως, στον υπολογισμό του θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\int\tfrac{1}{(1+y)y}\,dy = \int\tfrac{1}{y}\,dy - \int\tfrac{1}{1+y}\,dy = \log y-\log(1+y)+c = \log\tfrac{y}{1+y}+c$$

χωρίς να χρησιμοποιήσουμε απόλυτες τιμές.
(iii) Για το $\int\sin^3 x\,dx$ γράφουμε $\sin^3 x = \sin^2 x\sin x = (1-\cos^2 x)\sin x$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y=\cos x$ και $dy=-\sin x\,dx$. Τότε

$$\int\sin^3 x\,dx = -\int(1-y^2)\,dy\big|_{y=\cos x} = \big(\tfrac{1}{3}\,y^3-y+c\big)\big|_{y=\cos x} = \tfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+c.$$

(iv) Για το $\int \sin^4 x\,dx$ χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ και την αλλαγή μεταβλητής $y = 2x$ και $dy = 2\,dx$ και βρίσκουμε

$$\int \sin^4 x\,dx = \tfrac{1}{4}\int (1-\cos(2x))^2\,dx = \tfrac{1}{8}\int (1-\cos y)^2\,dy\Big|_{y=2x}.$$

Τώρα

$$\int (1-\cos y)^2\,dy = \int dy - 2\int \cos y\,dy + \int \cos^2 y\,dy = y - 2\sin y + \int \cos^2 y\,dy.$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα $\cos^2 y = \frac{1+\cos(2y)}{2}$ και την αλλαγή μεταβλητής $u = 2y$ και $du = 2\,dy$ και τότε

$$\begin{aligned}\int \cos^2 y\,dy &= \tfrac{1}{2}\int (1+\cos(2y))\,dy = \tfrac{1}{4}\int (1+\cos u)\,du\Big|_{u=2y} = \tfrac{1}{4}(u+\sin u + c)\Big|_{u=2y}\\ &= \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}\sin(2y) + c.\end{aligned}$$

Άρα

$$\int (1-\cos y)^2\,dy = y - 2\sin y + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{4}\sin(2y) + c = \tfrac{3}{2}y - 2\sin y + \tfrac{1}{4}\sin(2y) + c$$

και, τέλος,

$$\int \sin^4 x\,dx = \tfrac{1}{8}\big(\tfrac{3}{2}y - 2\sin y + \tfrac{1}{4}\sin(2y) + c\big)\Big|_{y=2x} = \tfrac{3}{8}x - \tfrac{1}{4}\sin(2x) + \tfrac{1}{32}\sin(4x) + c.$$

(v) Για το $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = 2y$ και $dx = 2\,dy$ και έχουμε

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \tfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,dy\Big|_{y=x/2} = (\arcsin y + c)\Big|_{y=x/2} = \arcsin\tfrac{y}{2} + c.$$

(vi) Για το $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = 2y$ και $dx = 2\,dy$ και έχουμε

$$\int \tfrac{1}{4+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{1+y^2}\,dy\Big|_{y=x/2} = \tfrac{1}{2}(\arctan y + c)\Big|_{y=x/2} = \tfrac{1}{2}\arctan\tfrac{y}{2} + c.$$

(vii) Για το $\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$ χρησιμοποιούμε μία από τις προηγούμενες ταυτότητες στη μορφή $1 + \cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$ και την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{x}{2}$ και $dy = \frac{1}{2}\,dx$ και βρίσκουμε

$$\int \tfrac{1}{1+\cos x}\,dx = \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{\cos^2(x/2)}\,dx = \int \tfrac{1}{\cos^2 y}\,dy\Big|_{y=x/2} = (\tan y + c)\Big|_{y=x/2} = \tan\tfrac{x}{2} + c.$$

Για το $\int x^3\cos(x^4)\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = x^4$ και $dy = 4x^3\,dx$.
Για το $\int \cos^2 x\sin x\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = \cos x$ και $dy = -\sin x\,dx$.
Για το $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = \sqrt{x}$ και $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$.
Για το $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = x^2 + 1$ και $dy = 2x\,dx$.
Για το $\int \sqrt{2x+1}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = 2x + 1$ και $dy = 2\,dx$.
Για το $\int x\sqrt{x+1}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = x + 1$ και $dy = dx$.
Για το $\int x^2\sqrt{2x+1}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = 2x + 1$ και $dy = 2\,dx$.
Για το $\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = 1 - x$ και $dy = -dx$.
Για το $\int \frac{x+1}{(x^2+2x+5)^2}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = x^2 + 2x + 5$ και $dy = 2(x+1)\,dx$.
Για το $\int \frac{\sin x+\cos x}{(\sin x-\cos x)^3}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = \sin x - \cos x$ και $dy = (\cos x + \sin x)\,dx$.
Για το $\int \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = \sqrt{x}$ και $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$.
Για το $\int x\sqrt[3]{x-1}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = x - 1$ και $dy = dx$.
Για το $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}\,dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = 1 - x^6$ και $dy = -6x^5\,dx$.

Για το $\int \sqrt{4-\sin x}\, \cos x\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = 4 - \sin x$ και $dy = -\cos x\, dx$.
Για το $\int \frac{\sin x}{(2+\cos x)^3}\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = 2 + \cos x$ και $dy = -\sin x\, dx$.
Για το $\int \frac{\cos^3 x}{\sin x}\, dx$ γράφουμε $\frac{\cos^3 x}{\sin x} = \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{\sin x}$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = \sin x$ και $dy = \cos x\, dx$.
Για το $\int \frac{x}{\sqrt{x}+1}\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $x = y^2$ και $dx = 2y\, dy$.
Για το $\int x^2 e^{x^3}\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = x^3$ και $dy = 3x^2\, dx$.
Για το $\int e^{3\sin x} \cos x\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = 3\sin x$ και $dy = 3\cos x\, dx$.
Για το $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{1}{x}$ και $dy = -\frac{1}{x^2}\, dx$.
Για το $\int \sqrt{1+3\cos^2 x}\, \sin(2x)\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = 1 + 3\cos^2 x$ και $dy = -6\cos x \sin x\, dx = -3\sin(2x)\, dx$.
Για το $\int \frac{1}{x(x^4+1)}\, dx$ γράφουμε $\frac{1}{x(x^4+1)} = \frac{x^3}{x^4(x^4+1)}$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = x^4$ και $dy = 4x^3\, dx$.
Για το $\int \frac{\log x}{x\sqrt{1+\log x}}\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = 1 + \log x$ και $dy = \frac{1}{x}\, dx$.
Για το $\int \frac{\arctan \sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}}\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = \sqrt{x}$ και $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$ και κατόπιν $u = \arctan y$ και $du = \frac{1}{1+y^2}\, dy$.
Για το $\int \frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}\, dx$ γράφουμε $1 - x - x^2 = \frac{5}{4} - (x + \frac{1}{2})^2$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}\, y$ και $dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\, dy$.
Για το $\int \frac{1}{x^2-x+2}\, dx$ γράφουμε $x^2 - x + 2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$ και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{7}}{2}\, y$ και $dx = \frac{\sqrt{7}}{2}\, dy$.
Για το $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = e^x$ και $dy = e^x\, dx$.
Για το $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = \arcsin x$ και $dy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.
Για το $\int \frac{1}{2+\cos^2 x}\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = \tan x$ και $dy = \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = (\tan^2 x + 1)\, dx$ και κατόπιν $y = \sqrt{3/2}\, u$ και $dy = \sqrt{3/2}\, du$. $\square$

152. *Με ολοκληρώσεις κατά μέρη και αλλαγές μεταβλητής βρείτε τα:*

$$\int e^{-2x} \sin(3x)\, dx, \quad \int x^3 e^{2x}\, dx, \quad \int x^3 e^{-x^2}\, dx, \quad \int e^{\sqrt{x}}\, dx, \quad \int x^2 \sin x\, dx,$$

$$\int x \log x\, dx, \quad \int x^2 \log^4 x\, dx, \quad \int \arcsin x\, dx, \quad \int \arctan x\, dx, \quad \int x^2 \arcsin x\, dx,$$

$$\int x \arctan^2 x\, dx, \quad \int \arctan \sqrt{x}\, dx, \quad \int \cos^2 x\, dx, \quad \int \sin^4 x\, dx, \quad \int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx,$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx, \quad \int \frac{\arctan(e^x)}{e^x}\, dx, \quad \int \frac{x e^{\arctan x}}{(x^2+1)^{3/2}}\, dx, \quad \int \log(x + \sqrt{1+x^2})\, dx.$$

Λύση. Θα δούμε πλήρως πώς υπολογίζονται πέντε από τα ολοκληρώματα και για τα υπόλοιπα αναφέρω σχετικά πλήρεις υποδείξεις για το τί πρέπει να γίνει. Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, σε αρκετές περιπτώσεις μπορεί κανείς να βρει διαφορετικό δρόμο υπολογισμού.
(i) Στο $\int x^3 e^{-x^2}\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = -x^2$ και έχουμε

$$\int x^3 e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int y e^y\, dy\Big|_{y=-x^2}.$$

Κατόπιν,

$$\int y e^y\, dy = \int y (e^y)'\, dy = y e^y - \int y' e^y\, dy = y e^y - \int e^y\, dy = y e^y - e^y + c$$

και άρα

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}(y e^y - e^y + c)\Big|_{y=-x^2} = -\frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} - \frac{1}{2} e^{-x^2} + c.$$

(ii) Για το $\int \arcsin x\, dx$ έχουμε

$$\int \arcsin x\, dx = \int x' \arcsin x\, dx = x \arcsin x - \int x(\arcsin x)'\, dx$$
$$= x \arcsin x - \int \tfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

Τώρα, με αλλαγή μεταβλητής $y = 1 - x^2$ βρίσκουμε

$$\int \tfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\tfrac{1}{2} \int \tfrac{1}{\sqrt{y}}\, dy\big|_{y=1-x^2} = (-\sqrt{y} + c)\big|_{y=1-x^2} = -\sqrt{1-x^2} + c$$

και, επομένως,

$$\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

(iii) Για το $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$ γράφουμε

$$\int \tfrac{x}{\cos^2 x}\, dx = \int x(\tan x)'\, dx = x \tan x - \int x' \tan x\, dx = x \tan x - \int \tan x\, dx$$
$$= x \tan x + \log|\cos x| + c,$$

αφού βάσει της προηγούμενης άσκησης έχουμε ότι $\int \tan x\, dx = -\log|\cos x| + c$.
(iv) Για το $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx$ έχουμε

$$\int \tfrac{x^2}{(x^2+1)^2}\, dx = -\tfrac{1}{2} \int x\big(\tfrac{1}{x^2+1}\big)'\, dx = -\tfrac{x}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2} \int x'\, \tfrac{1}{x^2+1}\, dx$$
$$= -\tfrac{x}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2} \int \tfrac{1}{x^2+1}\, dx = -\tfrac{x}{2(x^2+1)} + \tfrac{1}{2} \arctan x + c.$$

(v) Για το $\int \frac{\arctan(e^x)}{e^x}\, dx$ κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $y = e^x$ και γράφουμε

$$\int \tfrac{\arctan(e^x)}{e^x}\, dx = \int \tfrac{\arctan y}{y^2}\, dy\big|_{y=e^x}.$$

Τώρα

$$\int \tfrac{\arctan y}{y^2}\, dy = -\int \big(\tfrac{1}{y}\big)' \arctan y\, dy = -\tfrac{\arctan y}{y} + \int \tfrac{1}{y}\, (\arctan y)'\, dy$$
$$= -\tfrac{\arctan y}{y} + \int \tfrac{1}{y(y^2+1)}\, dy$$

και, με αλλαγή μεταβλητής $u = y^2$,

$$\int \tfrac{1}{y(y^2+1)}\, dy = \int \tfrac{y}{y^2(y^2+1)}\, dy = \tfrac{1}{2} \int \tfrac{1}{u(u+1)}\, du\big|_{u=y^2}.$$

Επίσης,

$$\int \tfrac{1}{u(u+1)}\, du = \int \big(\tfrac{1}{u} - \tfrac{1}{u+1}\big)\, du = \log|u| - \log|u+1| + c = \log\big|\tfrac{u}{u+1}\big| + c.$$

Άρα

$$\int \tfrac{1}{y(y^2+1)}\, dy = \tfrac{1}{2}\big(\log\big|\tfrac{u}{u+1}\big| + c\big)_{u=y^2} = \tfrac{1}{2} \log \tfrac{y^2}{y^2+1} + c$$

και

$$\int \tfrac{\arctan y}{y^2}\, dy = -\tfrac{\arctan y}{y} + \tfrac{1}{2} \log \tfrac{y^2}{y^2+1} + c$$

και, τέλος,

$$\int \tfrac{\arctan(e^x)}{e^x}\, dx = \big(-\tfrac{\arctan y}{y} + \tfrac{1}{2} \log \tfrac{y^2}{y^2+1} + c\big)\big|_{y=e^x} = -\tfrac{\arctan(e^x)}{e^x} + \tfrac{1}{2} \log \tfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1} + c.$$

Παρατηρήστε ότι στο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{u(u+1)}\, du$, το οποίο χρησιμοποιήσαμε, η μεταβλητή u ανήκει στο $(0, +\infty)$ αφού είναι $u = y^2 = e^{2x}$. Άρα στον υπολογισμό του θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\int \tfrac{1}{u(u+1)}\, du = \int \big(\tfrac{1}{u} - \tfrac{1}{u+1}\big)\, du = \log u - \log(u+1) + c = \log \tfrac{u}{u+1} + c$$

χωρίς να χρησιμοποιήσουμε απόλυτες τιμές.
Στο $\int e^{-2x}\sin(3x)\,dx$ κάντε αλλαγή μεταβλητής $y=-2x$ και στο $\int e^y\sin(\frac{3}{2}\,y)\,dy$ το οποίο θα προκύψει κάντε δύο φορές ολοκλήρωση κατά μέρη με $e^y=(e^y)'$.
Στο $\int x^3e^{2x}\,dx$ κάντε αλλαγή μεταβλητής $y=2x$ και στο $\int y^3e^y\,dy$ το οποίο θα προκύψει κάντε τρεις φορές ολοκλήρωση κατά μέρη με $e^y=(e^y)'$.
Στο $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$ κάντε αλλαγή μεταβλητής $y=\sqrt{x}$ και στο $\int ye^y\,dy$ το οποίο θα προκύψει κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $e^y=(e^y)'$.
Στο $\int x^2\sin x\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $\sin x=-(\cos x)'$ και ξανά ολοκλήρωση κατά μέρη με $\cos x=(\sin x)'$.
Στο $\int x\log x\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $x=(\frac{x^2}{2})'$.
Στο $\int x^2\log^4 x\,dx$ κάντε τέσσερις διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά μέρη με $x^2=(\frac{x^3}{3})'$.
Στο $\int \arctan x\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $1=x'$ και μετά αλλαγή μεταβλητής $y=x^2+1$.
Στο $\int x^2\arcsin x\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $x^2=(\frac{x^3}{3})'$ και μετά αλλαγή μεταβλητής $y=1-x^2$.
Στο $\int x\arctan^2 x\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $x=(\frac{x^2}{2})'$. Στο $\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,dx$ το οποίο θα προκύψει γράψτε $\frac{x^2}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}$ και χωρίστε το ολοκλήρωμα σε δύο ολοκληρώματα. Το ένα είναι το $\int\arctan x\,dx$ το οποίο είδαμε προηγουμένως και στο άλλο κάντε αλλαγή μεταβλητής $y=\arctan x$.
Στο $\int\arctan\sqrt{x}\,dx$ κάντε αλλαγή μεταβλητής $y=\sqrt{x}$, στο $\int y\arctan y\,dy$ το οποίο θα προκύψει κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $y=(\frac{y^2}{2})'$ και στο $\int\frac{y^2}{1+y^2}\,dy$ το οποίο θα προκύψει γράψτε $\frac{y^2}{1+y^2}=1-\frac{1}{1+y^2}$.
Στο $\int\cos^2 x\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $\cos^2 x=\cos x(\sin x)'$ και στο $\int\sin^2 x\,dx$ το οποίο θα προκύψει γράψτε $\sin^2 x=1-\cos^2 x$.
Στο $\int\sin^4 x\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $\sin x=-(\cos x)'$ και στο $\int\sin^2 x\cos^2 x\,dx$ το οποίο θα προκύψει γράψτε $\cos^2 x=1-\sin^2 x$.
Στο $\int\frac{xe^{\arctan x}}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx$ κάντε αλλαγή μεταβλητής $y=\arctan x$ και στο $\int e^y\sin y\,dy$ το οποίο θα προκύψει κάντε δύο ολοκληρώσεις κατά μέρη με $e^y=(e^y)'$.
Στο $\int\log(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$ κάντε ολοκλήρωση κατά μέρη με $1=x'$ και στο $\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ το οποίο θα προκύψει κάντε αλλαγή μεταβλητής $y=1+x^2$. □

153. *Υπολογίστε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων:*

$$\int\frac{5x+3}{x^2+2x-3}\,dx,\quad \int\frac{x+2}{x^2-4x+4}\,dx,\quad \int\frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx,\quad \int\frac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}\,dx,$$

$$\int\frac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx,\quad \int\frac{x^2+1}{(2x-1)^3}\,dx,\quad \int\frac{1}{x^4-1}\,dx,\quad \int\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx,$$

$$\int\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\,dx,\quad \int\frac{8x^3+7}{x^4+2x^3-2x-1}\,dx,\quad \int\frac{1}{x^4-2x^2+1}\,dx,$$

$$\int\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx,\quad \int\frac{1}{x^4+1}\,dx,\quad \int\frac{1}{x^5+1}\,dx,\quad \int\frac{1}{x^6+1}\,dx.$$

Λύση. (i) Το x^2+2x-3 έχει τις ρίζες -3 και 1, οπότε $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$. Τώρα βρίσκουμε αριθμούς A,B ώστε να ισχύει

$$\frac{5x+3}{x^2+2x-3}=\frac{5x+3}{(x+3)(x-1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}$$

για κάθε $x\neq-3,1$. Η τελευταία ισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$5x+3=A(x-1)+B(x+3)=(A+B)x+(-A+3b)$$

για κάθε $x \neq -3, 1$. Προφανώς, αυτή η ισότητα ισχύει αν

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \\ -A + 3B &= 3 \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $A = 3$ και $B = 2$. Άρα

$$\tfrac{5x+3}{x^2+2x-3} = \tfrac{5x+3}{(x+3)(x-1)} = \tfrac{3}{x+3} + \tfrac{2}{x-1}$$

για κάθε $x \neq -3, 1$. Επομένως

$$\int \tfrac{5x+3}{x^2+2x-3}\, dx = 3 \int \tfrac{1}{x+3}\, dx + 2 \int \tfrac{1}{x-1}\, dx = 3 \log|x+3| + 2 \log|x-1| + c.$$

(ii) Όπως στο (i) παραγοντοποιούμε: $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Τώρα βρίσκουμε αριθμούς A, B ώστε να ισχύει

$$\tfrac{x+2}{x^2-4x+4} = \tfrac{x+2}{(x-2)^2} = \tfrac{A}{x-2} + \tfrac{B}{(x-2)^2}$$

για κάθε $x \neq 2$. Η τελευταία ισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$x + 2 = A(x-2) + B = Ax + (-2A + B)$$

για κάθε $x \neq 2$. Η ισότητα ισχύει αν

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ -2A + B &= 2 \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $A = 1$ και $B = 4$. Άρα

$$\tfrac{x+2}{x^2-4x+4} = \tfrac{x+2}{(x-2)^2} = \tfrac{1}{x-2} + \tfrac{4}{(x-2)^2}$$

για κάθε $x \neq 2$. Επομένως

$$\int \tfrac{x+2}{x^2-4x+4}\, dx = \int \tfrac{1}{x-2}\, dx + 4 \int \tfrac{1}{(x-2)^2}\, dx = \log|x-2| - \tfrac{4}{x-2} + c.$$

(iii) Παραγοντοποιούμε: $x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$. Βρίσκουμε αριθμούς A, B, C ώστε να ισχύει

$$\tfrac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} = \tfrac{2x^2+5x-1}{x(x-1)(x+2)} = \tfrac{A}{x} + \tfrac{B}{x-1} + \tfrac{C}{x+2}$$

για κάθε $x \neq -2, 0, 1$. Η τελευταία ισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$\begin{aligned} 2x^2 + 5x - 1 &= A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1) \\ &= (A + B + C)x^2 + (A + 2B - C)x + (-2A) \end{aligned}$$

για κάθε $x \neq -2, 0, 1$. Η ισότητα ισχύει αν

$$\begin{aligned} A + B + C &= 2 \\ A + 2B - C &= 5 \\ -2A &= -1 \end{aligned}$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $A = \frac{1}{2}$, $B = 2$ και $C = -\frac{1}{2}$. Άρα

$$\tfrac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} = \tfrac{2x^2+5x-1}{x(x-1)(x+2)} = \tfrac{1}{2x} + \tfrac{2}{x-1} - \tfrac{1}{2(x+2)}$$

για κάθε $x \neq -2, 0, 1$. Επομένως

$$\begin{aligned} \int \tfrac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x} &= \tfrac{1}{2} \int \tfrac{1}{x}\, dx + 2 \int \tfrac{1}{x-1}\, dx - \tfrac{1}{2} \int \tfrac{1}{x+2}\, dx \\ &= \tfrac{1}{2} \log|x| + 2 \log|x-1| - \tfrac{1}{2} \log|x+2| + c. \end{aligned}$$

Η διαδικασία είναι παρόμοια για όλα τα ολοκληρώματα τα οποία απομένουν οπότε θα είμαι πιο σύντομος, τονίζοντας μόνο τις διαφορές ανάλογα με την περίπτωση.
(iv) Παραγοντοποιούμε: $x^3+x^2-x-1=(x-1)(x+1)^2$. Αφού βρούμε A, B, C ώστε

$$\tfrac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}=\tfrac{A}{x-1}+\tfrac{B}{x+1}+\tfrac{C}{(x+1)^2},$$

καταλήγουμε στο

$$\begin{aligned}\int \tfrac{x^2+2x+3}{x^3+x^2-x-1}\,dx &= A\int \tfrac{1}{x-1}\,dx+B\int \tfrac{1}{x+1}\,dx+C\int \tfrac{1}{(x+1)^2}\,dx\\ &= A\log|x-1|+B\log|x+1|-\tfrac{C}{x+1}+c.\end{aligned}$$

(v) Παραγοντοποιούμε: $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)((x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})$. Το x^2+x+1 δεν παραγοντοποιείται. Βρίσκουμε A, B, C ώστε

$$\tfrac{3x^2+2x-2}{x^3-1}=\tfrac{A}{x-1}+\tfrac{B(x+\frac{1}{2})+C}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

και τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int \tfrac{3x^2+2x-2}{x^3-1}\,dx &= A\int \tfrac{1}{x-1}\,dx+B\int \tfrac{x+\frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx+C\int \tfrac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx\\ &= A\log|x-1|+\tfrac{B}{2}\log\big(\big(x+\tfrac{1}{2}\big)^2+\tfrac{3}{4}\big)+\tfrac{2C}{\sqrt{3}}\arctan\big(\tfrac{2}{\sqrt{3}}\big(x+\tfrac{1}{2}\big)\big)+c.\end{aligned}$$

(vi) Βρίσκουμε A, B, C ώστε

$$\tfrac{x^2+1}{(2x-1)^3}=\tfrac{A}{2x-1}+\tfrac{B}{(2x-1)^2}+\tfrac{C}{(2x-1)^3}$$

και τότε

$$\begin{aligned}\int \tfrac{x^2+1}{(2x-1)^3}\,dx &= \tfrac{A}{2}\int \tfrac{1}{x-\frac{1}{2}}\,dx+\tfrac{B}{4}\int \tfrac{1}{(x-\frac{1}{2})^2}\,dx+\tfrac{C}{8}\int \tfrac{1}{(x-\frac{1}{2})^3}\,dx\\ &= \tfrac{A}{2}\log\big|x-\tfrac{1}{2}\big|-\tfrac{B}{4(x-\frac{1}{2})}-\tfrac{C}{16(x-\frac{1}{2})^2}+c.\end{aligned}$$

(vii) Παραγοντοποιούμε: $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$. Βρίσκουμε A, B, C, D ώστε

$$\tfrac{1}{x^4-1}=\tfrac{A}{x-1}+\tfrac{B}{x+1}+\tfrac{Cx+D}{x^2+1}$$

και τότε

$$\begin{aligned}\int \tfrac{1}{x^4-1}\,dx &= A\int \tfrac{1}{x-1}\,dx+B\int \tfrac{1}{x+1}\,dx+C\int \tfrac{x}{x^2+1}\,dx+D\int \tfrac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= A\log|x-1|+B\log|x+1|+\tfrac{C}{2}\log(x^2+1)+D\arctan x+c.\end{aligned}$$

(viii) Το $\frac{x^4}{x^4+5x^2+4}$ είναι το μοναδικό κλάσμα στην άσκηση αυτή στο οποίο ο αριθμητής δεν έχει μικρότερο βαθμό από τον παρονομαστή. Γράφουμε

$$\tfrac{x^4}{x^4+5x^2+4}=1-\tfrac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4},$$

οπότε

$$\int \tfrac{x^4}{x^4+5x^2+4}\,dx=x-\int \tfrac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\,dx.$$

Παραγοντοποιούμε: $x^4+5x^2+4=(x^2+1)(x^2+4)$. Βρίσκουμε A, B, C, D ώστε

$$\tfrac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}=\tfrac{Ax+B}{x^2+1}+\tfrac{Cx+D}{x^2+4}$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}\int \tfrac{5x^2+4}{x^4+5x^2+4}\,dx &= A\int \tfrac{x}{x^2+1}\,dx+B\int \tfrac{1}{x^2+1}\,dx+C\int \tfrac{x}{x^2+4}\,dx+D\int \tfrac{1}{x^2+4}\,dx\\ &= \tfrac{A}{2}\log(x^2+1)+B\arctan x+\tfrac{C}{2}\log(x^2+4)+\tfrac{D}{2}\arctan\tfrac{x}{2}+c.\end{aligned}$$

(ix) Παραγοντοποιούμε: $(x^2-4x+4)(x^2-4x+5) = (x-2)^2((x-2)^2+1)$. Βρίσκουμε A, B, C, D ώστε

$$\frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C(x-2)+D}{(x-2)^2+1}$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}\,dx &= A\int \frac{1}{x-2}\,dx + B\int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx + C\int \frac{x-2}{(x-2)^2+1}\,dx \\
&\quad + D\int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx \\
&= A\log|x-2| - \frac{B}{x-2} + \frac{C}{2}\log((x-2)^2+1) \\
&\quad + D\arctan(x-2) + c.
\end{aligned}$$

(x) Παραγοντοποιούμε: $x^4+2x^3-2x-1 = (x-1)(x+1)^3$. Βρίσκουμε A, B, C, D ώστε

$$\frac{8x^3+7}{x^4+2x^3-2x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{8x^3+7}{x^4+2x^3-2x-1}\,dx &= A\int \frac{1}{x-1}\,dx + B\int \frac{1}{x+1}\,dx + C\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + D\int \frac{1}{(x+1)^3}\,dx \\
&= A\log|x-1| + B\log|x+1| - \frac{C}{x+1} - \frac{D}{2(x+1)^2} + c.
\end{aligned}$$

(xi) Παραγοντοποιούμε: $x^4-2x^2+1 = (x-1)^2(x+1)^2$. Βρίσκουμε A, B, C, D ώστε

$$\frac{1}{x^4-2x^2+1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^4-2x^2+1}\,dx &= A\int \frac{1}{x-1}\,dx + B\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + C\int \frac{1}{x+1}\,dx + D\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\
&= A\log|x-1| - \frac{B}{x-1} + C\log|x+1| - \frac{D}{x+1} + c.
\end{aligned}$$

(xii) Είναι: $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$. Βρίσκουμε A, B, C, D ώστε

$$\frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2+1} + \frac{C(x+1)+D}{((x+1)^2+1)^2}$$

και έχουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx &= A\int \frac{x+1}{(x+1)^2+1}\,dx + B\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx + C\int \frac{x+1}{((x+1)^2+1)^2}\,dx \\
&\quad + D\int \frac{1}{((x+1)^2+1)^2}\,dx \\
&= \frac{A}{2}\log((x+1)^2+1) + B\arctan(x+1) - \frac{C}{2((x+1)^2+1)} \\
&\quad + D\int \frac{1}{((x+1)^2+1)^2}\,dx.
\end{aligned}$$

Μένει να βρούμε το τελευταίο ολοκλήρωμα. Αρκεί να βρούμε το $\int \frac{1}{(y^2+1)^2}\,dy$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(y^2+1)^2}\,dy &= \int \frac{y^2+1-y^2}{(y^2+1)^2}\,dy = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^2}\,dy \\
&= \arctan y - \int y\,\frac{y}{(y^2+1)^2}\,dy = \arctan y + \frac{1}{2}\int y\Big(\frac{1}{y^2+1}\Big)'\,dy \\
&= \arctan y + \frac{y}{2(y^2+1)} - \frac{1}{2}\int y'\,\frac{1}{y^2+1}\,dy \\
&= \arctan y + \frac{y}{2(y^2+1)} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy \\
&= \frac{y}{2(y^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan y + c.
\end{aligned}$$

Επομένως

$$\int \frac{1}{((x+1)^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{(y^2+1)^2}\,dy\Big|_{y=x+1} = \frac{x+1}{2((x+1)^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(x+1) + c$$

και, επιτέλους (!!!!!!!!!!!!),

$$\begin{aligned}\int \tfrac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\,dx &= \tfrac{A}{2}\log((x+1)^2+1) + B\arctan(x+1) - \tfrac{C}{2((x+1)^2+1)}\\ &\quad + \tfrac{D(x+1)}{2((x+1)^2+1)} + \tfrac{D}{2}\arctan(x+1) + c.\end{aligned}$$

(xiii) Το x^4+1 είναι "πονηρό":

$$\begin{aligned}x^4+1 &= x^4+2x^2+1-2x^2 = (x^2+1)^2-2x^2 = (x^2+\sqrt{2}\,x+1)(x^2-\sqrt{2}\,x+1)\\ &= \big((x+\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2+\tfrac{1}{2}\big)\big((x-\tfrac{\sqrt{2}}{2})^2+\tfrac{1}{2}\big).\end{aligned}$$

Κατά τα άλλα, προχωράμε όπως στο (viii).
Για τα τελευταία δύο ολοκληρώματα, αναφέρω μόνο την παραγοντοποίηση των x^5+1 και x^6+1:

$$x^5+1 = (x+1)\big(x^2 - \tfrac{\sqrt{5}+1}{2}x+1\big)\big(x^2+\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}x+1\big),$$

$$x^6+1 = (x^2+1)(x^2+\sqrt{3}\,x+1)(x^2-\sqrt{3}\,x+1).$$

Αποδείξτε, ξεκινώντας από την *αριστερή* μεριά των δύο ταυτοτήτων, τις παραγοντοποιήσεις και μετά υπολογίστε τα δύο ολοκληρώματα. □

154. *Βρείτε τα ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων των* $\sin x$ *και* $\cos x$*:*

$$\int \tfrac{1}{(1+\cos x)^2}\,dx,\quad \int \tfrac{1}{1+2\sin x}\,dx,\quad \int \tfrac{1}{5+3\cos x}\,dx,\quad \int \tfrac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,dx,\quad \int \tfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx.$$

Λύση. Σε όλα τα ολοκληρώματα κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $u=\tan\frac{x}{2}$ και χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

$$\sin x = \tfrac{2u}{1+u^2},\qquad \cos x = \tfrac{1-u^2}{1+u^2},\qquad dx = \tfrac{2}{1+u^2}\,du.$$

Για παράδειγμα, με το $\int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx$ βρίσκουμε

$$\int \tfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx = \int \tfrac{2u}{(1+u)(1+u^2)}\,du\Big|_{u=\tan(x/2)}.$$

Χωρίζουμε σε απλά κλάσματα:

$$\tfrac{2u}{(1+u)(1+u^2)} = \tfrac{1}{1+u^2} + \tfrac{u}{1+u^2} - \tfrac{1}{1+u}.$$

Επομένως,

$$\int \tfrac{2u}{(1+u)(1+u^2)}\,du = \arctan u + \tfrac{1}{2}\log(1+u^2) - \log|1+u| + c$$

και άρα

$$\begin{aligned}\int \tfrac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\,dx &= \big(\arctan u + \tfrac{1}{2}\log(1+u^2) - \log|1+u| + c\big)\Big|_{u=\tan(x/2)}\\ &= \arctan(\tan\tfrac{x}{2}) - \log\big|\cos\tfrac{x}{2}\big| - \log\big|1+\tan\tfrac{x}{2}\big| + c\\ &= \arctan(\tan\tfrac{x}{2}) - \log\big|\sin\tfrac{x}{2}+\cos\tfrac{x}{2}\big| + c.\end{aligned}$$

□

155. *Βρείτε τα ολοκληρώματα:*

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx,\quad \int \tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,\quad \int \tfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx,\quad \int \sqrt{x^2+1}\,dx,$$

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx,\quad \int \tfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx,\quad \int \tfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx.$$

Λύση. (i) Σε ολοκληρώματα στα οποία εμφανίζεται η παράσταση $\sqrt{x^2-1}$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x=\frac{u^2+1}{2u}$.
Αν το x βρίσκεται στο $[1,+\infty)$ τότε θεωρούμε ότι το u βρίσκεται στο $[1,+\infty)$ και τότε το u δίνεται από τον τύπο $u=x+\sqrt{x^2-1}$ και έχουμε και ότι $\sqrt{x^2-1}=\frac{u^2-1}{2u}$ και $dx=\frac{u^2-1}{2u^2}\,du$.
Αν το x βρίσκεται στο $(-\infty,-1]$ τότε θεωρούμε ότι το u βρίσκεται στο $(-\infty,-1]$ και τότε το u δίνεται από τον τύπο $u=x-\sqrt{x^2-1}$ και έχουμε και ότι $\sqrt{x^2-1}=\frac{1-u^2}{2u}$ και $dx=\frac{u^2-1}{2u^2}\,du$.
Άρα για το συγκεκριμένο $\int\sqrt{x^2-1}\,dx$ μετά από απλοποιήσεις έχουμε δύο περιπτώσεις.
Αν το x βρίσκεται στο $[1,+\infty)$, τότε

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2-1}\,dx&=\int\big(\tfrac{u}{4}-\tfrac{1}{2u}+\tfrac{1}{4u^3}\big)\,du\big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}\\&=\big(\tfrac18u^2-\tfrac12\log|u|-\tfrac{1}{8u^2}+c\big)\big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}\\&=\tfrac18(x+\sqrt{x^2-1})^2-\tfrac12\log|x+\sqrt{x^2-1}|-\tfrac{1}{8(x+\sqrt{x^2-1})^2}+c.\end{aligned}$$

Αν το x βρίσκεται στο $(-\infty,-1]$, τότε

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2-1}\,dx&=-\int\big(\tfrac{u}{4}-\tfrac{1}{2u}+\tfrac{1}{4u^3}\big)\,du\big|_{u=x-\sqrt{x^2-1}}\\&=\big(-\tfrac18u^2+\tfrac12\log|u|+\tfrac{1}{8u^2}+c\big)\big|_{u=x-\sqrt{x^2-1}}\\&=-\tfrac18(x-\sqrt{x^2-1})^2+\tfrac12\log|x-\sqrt{x^2-1}|+\tfrac{1}{8(x-\sqrt{x^2-1})^2}+c.\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})=1$ οπότε τα δύο αποτελέσματα είναι ταυτόσημα (απλώς διαφέρουν τα πεδία ορισμού τους: το $[1,+\infty)$ για το ένα και το $(-\infty,-1]$ για το άλλο). Με άλλα λόγια:

$$\int\sqrt{x^2-1}\,dx=\tfrac18(x+\sqrt{x^2-1})^2-\tfrac12\log|x+\sqrt{x^2-1}|-\tfrac{1}{8(x+\sqrt{x^2-1})^2}+c$$

για $x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.
(ii) Για το $\int\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$ η αλλαγή μεταβλητής στο (i), δηλαδή η $x=\frac{u^2+1}{2u}$, δίνει

$$\int\tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\int\tfrac1u\,du\big|_{u=x+\sqrt{x^2-1}}=\log|x+\sqrt{x^2-1}|+c\qquad\text{για } x\in[1,+\infty),$$

$$\int\tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=-\int\tfrac1u\,du\big|_{u=x-\sqrt{x^2-1}}=-\log|x-\sqrt{x^2-1}|+c\qquad\text{για } x\in(-\infty,-1].$$

Όπως στο (i), οι δύο λύσεις είναι ταυτόσημες οπότε

$$\int\tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\log|x+\sqrt{x^2-1}|+c\qquad\text{για } x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty).$$

(iii) Σε ολοκληρώματα στα οποία εμφανίζεται η παράσταση $\sqrt{1-x^2}$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x=\frac{2u}{u^2+1}$. Το x βρίσκεται στο διάστημα $[-1,1]$ και θεωρούμε ότι και το u βρίσκεται στο $[-1,1]$ οπότε το u δίνεται από τον τύπο $u=\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$. Έχουμε και τις σχέσεις $\sqrt{1-x^2}=\frac{1-u^2}{1+u^2}$ και $dx=\frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2}\,du$. Άρα για το $\int\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx$ μετά από απλοποιήσεις έχουμε

$$\begin{aligned}\int\tfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}\,dx&=\int\tfrac{1-u^2}{1+u^2}\,du\big|_{u=x/(1+\sqrt{1-x^2})}=\int\big(-1+\tfrac{2}{1+u^2}\big)\,du\big|_{u=x/(1+\sqrt{1-x^2})}\\&=(-u+2\arctan u+c)\big|_{u=x/(1+\sqrt{1-x^2})}\\&=-\tfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+2\arctan\tfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}+c\qquad\text{για } x\in[-1,1].\end{aligned}$$

(iv) Σε ολοκληρώματα στα οποία εμφανίζεται η παράσταση $\sqrt{x^2+1}$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x=\frac{u^2-1}{2u}$ με $u>0$. Τότε $u=x+\sqrt{x^2+1}$ και $\sqrt{x^2+1}=\frac{u^2+1}{2u}$ και $dx=\frac{u^2+1}{2u^2}\,du$. Άρα για το $\int\sqrt{x^2+1}\,dx$ μετά από απλοποιήσεις έχουμε

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x^2+1}\,dx&=\int\big(\tfrac{u}{4}+\tfrac{1}{2u}+\tfrac{1}{4u^3}\big)\,du\big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}\\&=\big(\tfrac18u^2+\tfrac12\log u-\tfrac{1}{8u^2}+c\big)\big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}}\\&=\tfrac18(x+\sqrt{x^2+1})^2+\tfrac12\log(x+\sqrt{x^2+1})-\tfrac{1}{8(x+\sqrt{x^2+1})^2}+c.\end{aligned}$$

(v) Για το $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ η αλλαγή μεταβλητής στο (iv) δίνει

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du\Big|_{u=x+\sqrt{x^2+1}} = \log(x+\sqrt{x^2+1})+c.$$

(vi) Για το $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx$ γράφουμε $x^2-x-2=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4}$ και κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\,t$. Μετά από απλοποιήσεις βρίσκουμε

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt\Big|_{t=\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})}.$$

Στο (ii) βρήκαμε το $\int \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$ και καταλήγουμε στο

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}\,dx = \big(\log(t+\sqrt{t^2-1})+c\big)\Big|_{t=\frac{2}{3}(x-\frac{1}{2})} = \log\big(x-\tfrac{1}{2}+\sqrt{x^2-x-2}\big)+c.$$

(vii) Για το $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx$ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t=\sqrt{x-1}$ και βρίσκουμε

$$\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int \frac{t}{t+\sqrt{t^2+2}}\,dt\Big|_{t=\sqrt{x-1}}.$$

Κατόπιν, κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $t=\sqrt{2}\,s$ και έχουμε

$$2\int \frac{t}{t+\sqrt{t^2+2}}\,dt = 2\sqrt{2}\int \frac{s}{s+\sqrt{s^2+1}}\,ds\Big|_{s=t/\sqrt{2}}.$$

Τέλος, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής του (iv), δηλαδή $s=\frac{u^2-1}{2u}$ με $u>0$, και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int \frac{s}{s+\sqrt{s^2+1}}\,ds &= \int \big(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4u^4}\big)\,du\Big|_{u=s+\sqrt{s^2+1}}\\ &= \big(\tfrac{1}{4}u+\tfrac{1}{12u^3}+c\big)\Big|_{u=s+\sqrt{s^2+1}}\\ &= \tfrac{1}{4}(s+\sqrt{s^2+1})+\tfrac{1}{12(s+\sqrt{s^2+1})^3}+c.\end{aligned}$$

Άρα $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}\,dx = \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{2}+\frac{2}{3(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})^3}+c.$ □

156. *Αποδείξτε ότι ισχύει* $\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}\,dx$ *για κάθε* $x>0$ *χωρίς να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα.*

Λύση. Κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $t=\frac{1}{u}$ και με $dt=-\frac{1}{u^2}\,du$, έχουμε

$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = -\int_{1/x}^1 \frac{1}{(1+(1/u^2))u^2}\,du = \int_1^{1/x}\frac{1}{1+u^2}\,du = \int_1^{1/x}\frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

□

157. *Αποδείξτε ότι* $\int_0^{\pi/2}\cos^n x\sin^n x\,dx = 2^{-n}\int_0^{\pi/2}\cos^n x\,dx$ *για κάθε* $n\in\mathbb{N}$.

Λύση. Λόγω της ταυτότητας $2\cos x\sin x=\sin(2x)$ έχουμε

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n x\sin^n x\,dx = 2^{-n}\int_0^{\pi/2}\sin^n(2x)\,dx.$$

Τώρα κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $x=\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}$ και με $dx=-\frac{1}{2}\,dy$ παίρνουμε

$$\int_0^{\pi/2}\sin^n(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{-\pi/2}\sin^n\big(\tfrac{\pi}{2}-y\big)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^n y\,dy = \int_0^{\pi/2}\cos^n y\,dy$$

διότι η συνάρτηση $\cos y$ είναι άρτια. □

158. *Αποδείξτε ότι* $\int_0^1(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dx = \int_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx$ *για κάθε* $n\in\mathbb{N}$.

Λύση. Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής $x = \sin y$ και με $dx = \cos y\, dy$ παίρνουμε

$$\int_0^1 (1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\, dx = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 y)^{n-\frac{1}{2}} \cos y\, dy = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} y\, dy.$$

□

159. *(i) Αν η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής αποδείξτε ότι $\int_0^\pi x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)\, dx$.*
(ii) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$.

Λύση. (i) Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = \pi - u$ και με $dx = -du$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x f(\sin x)\, dx &= -\int_\pi^0 (\pi - u) f(\sin(\pi - u))\, du = \int_0^\pi (\pi - u) f(\sin u)\, du \\ &= \pi \int_0^\pi f(\sin u)\, du - \int_0^\pi u f(\sin u)\, du \\ &= \pi \int_0^\pi f(\sin x)\, dx - \int_0^\pi x f(\sin x)\, dx. \end{aligned}$$

Άρα $\int_0^\pi x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)\, dx$.
(ii) Εφαρμόζουμε το (i) με την συνάρτηση $f(y) = \frac{y}{2-y^2}$ και έχουμε

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{2-\sin^2 x}\, dx = \int_0^\pi x f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x)\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx.$$

Τώρα με αλλαγή μεταβλητής $t = \cos x$ και $dt = -\sin x\, dx$ βρίσκουμε

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \pi \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \pi \arctan 1 = \frac{\pi^2}{4}.$$

□

160. *Υπολογίστε τις τιμές των γεν. ολοκληρωμάτων*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^2+1)}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} x e^{-x}\, dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\, dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, dx, \quad \int_0^1 \log x\, dx, \quad \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx, \quad \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \log^2 x}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2}\, dx.$$

Λύση. (i) Η $\frac{x}{x^2+1}$ είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, c]$ για κάθε $c > 0$ και

$$\int_0^c \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2} \int_1^{c^2+1} \frac{1}{y}\, dy = \frac{1}{2} \log(c^2+1)$$

οπότε

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c \frac{x}{x^2+1}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \frac{1}{2} \log(c^2+1) = +\infty.$$

(ii) Η $\frac{1}{x^2(x^2+1)}$ είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, c]$ για κάθε $c > 1$ και

$$\begin{aligned} \int_1^c \frac{1}{x^2(x^2+1)}\, dx &= \int_1^c \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int_1^c \frac{1}{x^2}\, dx - \int_1^c \frac{1}{x^2+1}\, dx \\ &= 1 - \frac{1}{c} - \arctan c + \arctan 1 = 1 - \frac{1}{c} - \arctan c + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

οπότε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(x^2+1)}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c \frac{1}{x^2(x^2+1)}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{c} - \arctan c + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

(iii) Η xe^{-x} είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0, c]$ για κάθε $c > 0$ και

$$\int_0^c x e^{-x}\, dx = -\int_0^c x (e^{-x})'\, dx = -ce^{-c} + \int_0^c e^{-x}\, dx = -ce^{-c} - e^{-c} + 1$$

οπότε

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x}\, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_0^c x e^{-x}\, dx = \lim_{c \to +\infty} (-ce^{-c} - e^{-c} + 1) = 1.$$

(iv) Η $e^{-|x|}$ είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,c]$ για κάθε $c>0$ και στο διάστημα $[c,0]$ για κάθε $c<0$. Τώρα,

$$\int_0^{+\infty} e^{-|x|}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c e^{-|x|}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c e^{-x}\,dx = \lim_{c\to+\infty}(1-e^{-c}) = 1$$

και

$$\int_{-\infty}^0 e^{-|x|}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 e^{-|x|}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_c^0 e^{x}\,dx = \lim_{c\to-\infty}(1-e^{c}) = 1.$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^0 e^{-|x|}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-|x|}\,dx = 1+1 = 2.$$

(v) Η $|x|$ είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,c]$ για κάθε $c>0$ και στο διάστημα $[c,0]$ για κάθε $c<0$. Τώρα,

$$\int_0^{+\infty} |x|\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c |x|\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_0^c x\,dx = \lim_{c\to+\infty}\tfrac{c^2}{2} = +\infty$$

και

$$\int_{-\infty}^0 |x|\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 |x|\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 (-x)\,dx = \lim_{c\to-\infty}\tfrac{c^2}{2} = +\infty.$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,dx = \int_{-\infty}^0 |x|\,dx + \int_0^{+\infty} |x|\,dx = (+\infty)+(+\infty) = +\infty.$$

(vi) Η συνάρτηση $\log x$ απειρίζεται στο 0 οπότε δεν είναι φραγμένη στο διάστημα $(0,1]$ και άρα το $\int_0^1 \log x\,dx$ είναι γεν. ολοκλήρωμα. Η $\log x$ είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[c,1]$ για κάθε c με $0<c<1$ και

$$\begin{aligned}\int_c^1 \log x\,dx &= \int_c^1 x'\log x\,dx = -c\log c - \int_c^1 x(\log x)'\,dx\\ &= -c\log c - \int_c^1 dx = -c\log c + c - 1\end{aligned}$$

οπότε

$$\int_0^1 \log x\,dx = \lim_{c\to0+}\int_c^1 \log x\,dx = \lim_{c\to0+}(-c\log c + c - 1) = -1.$$

(vii) Η $\frac{1}{x\log x}$ είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[e,c]$ για κάθε $c>e$ και

$$\int_e^c \tfrac{1}{x\log x}\,dx = \int_1^{\log c}\tfrac{1}{y}\,dy = \log(\log c)$$

οπότε

$$\int_e^{+\infty}\tfrac{1}{x\log x}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_e^c \tfrac{1}{x\log x}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\log(\log c) = +\infty.$$

(viii) Η $\frac{1}{x\log^2 x}$ είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[e,c]$ για κάθε $c>e$ και

$$\int_e^c \tfrac{1}{x\log^2 x}\,dx = \int_1^{\log c}\tfrac{1}{y^2}\,dy = 1 - \tfrac{1}{\log c}$$

οπότε

$$\int_e^{+\infty}\tfrac{1}{x\log^2 x}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_e^c \tfrac{1}{x\log^2 x}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\big(1-\tfrac{1}{\log c}\big) = 1.$$

(ix) Η συνάρτηση $\frac{\log x}{(x+1)^2}$ απειρίζεται στο 0 οπότε δεν είναι φραγμένη στο διάστημα $(0,1]$ και άρα το $\int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx$ είναι γεν. ολοκλήρωμα. Φυσικά και το $\int_1^{+\infty}\frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx$ είναι γεν. ολοκλήρωμα. Η $\frac{\log x}{(x+1)^2}$ είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[1,c]$ για κάθε $c>1$ και

$$\begin{aligned}\int_1^c \tfrac{\log x}{(x+1)^2}\,dx &= -\int_1^c \log x\big(\tfrac{1}{x+1}\big)'\,dx = -\tfrac{\log c}{c+1} + \int_1^c (\log x)'\tfrac{1}{x+1}\,dx = -\tfrac{\log c}{c+1} + \int_1^c \tfrac{1}{x(x+1)}\,dx\\ &= -\tfrac{\log c}{c+1} + \int_1^c\big(\tfrac{1}{x}-\tfrac{1}{x+1}\big)\,dx = -\tfrac{\log c}{c+1} + \int_1^c \tfrac{1}{x}\,dx - \int_1^c \tfrac{1}{x+1}\,dx\\ &= -\tfrac{\log c}{c+1} + \log c - \log\tfrac{c+1}{2} = -\tfrac{\log c}{c+1} + \log\tfrac{2c}{c+1}\end{aligned}$$

οπότε

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \big(-\frac{\log c}{c+1} + \log\frac{2c}{c+1} \big) = \log 2.$$

Επίσης, η $\frac{\log x}{(x+1)^2}$ είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[c,1]$ για κάθε c με $0<c<1$ και, όπως πριν,

$$\int_c^1 \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx = \frac{\log c}{c+1} - \log\frac{2c}{c+1} = \frac{\log c}{c+1} - \log c + \log\frac{c+1}{2} = -\frac{c\log c}{c+1} + \log\frac{c+1}{2}$$

οπότε

$$\int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{c\to0+} \int_c^1 \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{c\to0+} \big(-\frac{c\log c}{c+1} + \log\frac{c+1}{2} \big) = -\log 2.$$

Άρα

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2}\,dx = -\log 2 + \log 2 = 0.$$

□

161. *Αποδείξτε ότι δεν έχουν τιμή τα γεν. ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$, $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$.*

Λύση. (i) Είναι

$$\int_0^{+\infty} x\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_0^c x\,dx = \lim_{c\to+\infty} \frac{c^2}{2} = +\infty$$

και

$$\int_{-\infty}^0 x\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^0 x\,dx = -\lim_{c\to-\infty} \frac{c^2}{2} = -\infty.$$

Άρα το $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^0 x\,dx + \int_0^{+\infty} x\,dx$ δεν υπάρχει διότι καταλήγει στην απροσδιόριστη μορφή $(-\infty)+(+\infty)$.

(ii) Η συνάρτηση $\frac{1}{x}$ απειρίζεται στο 0 και από τις δύο μεριές του οπότε δεν είναι φραγμένη σε κανένα από τα διαστήματα $[-1,0)$ και $(0,1]$ και άρα τα $\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx$ και $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ είναι και τα δύο γεν. ολοκληρώματα. Τώρα,

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to0+} \int_c^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to0+} (-\log c) = +\infty$$

και

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to0-} \int_{-1}^c \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to0-} \log|c| = -\infty.$$

Άρα το $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ δεν υπάρχει διότι καταλήγει στην απροσδιόριστη μορφή $(-\infty)+(+\infty)$. □

162. *Ποιά από τα παρακάτω γεν. ολοκληρώματα συγκλίνουν;*

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+3}{1+x^2+x^2\sqrt{x}}\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{x^2+3}{2x^4+x^2+3}\,dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\,dx.$$

Λύση. Θα δούμε πρώτα κάτι γενικό το οποίο θα μας βοηθήσει σε όλα τα γεν. ολοκληρώματα της άσκησης.

Έστω συνεχείς $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, έστω ότι ισχύει $f(x)>0$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\geq a$ και έστω $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=k>0$.

Λόγω του ορίου, υπάρχει $N>a$ ώστε να ισχύει $\frac{k}{2}\leq\frac{f(x)}{g(x)}\leq 2k$ για κάθε $x>N$. Από την άλλη μεριά, η $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[a,N]$ οπότε έχει ελάχιστη τιμή l και μέγιστη τιμή m σε αυτό. Μάλιστα επειδή ισχύει $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ για κάθε $x\geq a$, θα είναι $l,m>0$ οπότε έχουμε ότι ισχύει $0<l\leq\frac{f(x)}{g(x)}\leq m$ για κάθε $x\in[a,N]$. Συνολικά, αν πάρουμε $L=\min\{l,\frac{k}{2}\}>0$ και $M=\max\{m,2k\}>0$ τότε ισχύει $0<L\leq\frac{f(x)}{g(x)}\leq M$ ή ισοδύναμα,

$$0<Lg(x)\leq f(x)\leq Mg(x) \qquad \text{για κάθε } x\geq a. \tag{14}$$

Επειδή και οι δύο συναρτήσεις f, g είναι > 0 στο $[a, +\infty)$, τα γεν. ολοκληρώματα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ έχουν και τα δύο τιμή η οποία είναι μη-αρνητικός αριθμός ή $+\infty$ και λόγω της (14) ισχύει

$$0 \leq L \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq M \int_a^{+\infty} g(x)\,dx. \tag{15}$$

Από εδώ βλέπουμε ότι είτε και τα δύο γεν. ολοκληρώματα είναι μη-αρνητικοί αριθμοί είτε και τα δύο είναι $+\infty$.

Όταν λοιπόν πρέπει να αποφασίσουμε αν το γεν.ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει ή όχι και η f δεν είναι απλή συνάρτηση τότε βρίσκουμε μία απλούστερη συνάρτηση g έτσι ώστε να ισχύουν όλες οι παραπάνω υποθέσεις για τις f, g και ώστε να μπορούμε πιο εύκολα να αποφασίσουμε αν το γεν. ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ συγκλίνει ή όχι.

(i) Θα συγκρίνουμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+x+3}{1+x^2+x^2\sqrt{x}}$ με μία απλούστερη συνάρτηση της οποίας το γεν. ολοκλήρωμα θα είναι εύκολο να δούμε αν συγκλίνει ή όχι. Διακρίνουμε τους κύριους όρους του αριθμητή και του παρονομαστή της f και παρατηρούμε ότι

$$\frac{x^2+x+3}{1+x^2+x^2\sqrt{x}} = \frac{x^2}{x^{5/2}} \frac{1+x^{-1}+3x^{-2}}{x^{-5/2}+x^{-1/2}+1} = \frac{1}{x^{1/2}} \frac{1+x^{-1}+3x^{-2}}{x^{-5/2}+x^{-1/2}+1}$$

και ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^{-1}+3x^{-2}}{x^{-5/2}+x^{-1/2}+1} = 1.$$

Τώρα θεωρούμε την $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ και επομένως έχουμε ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Έχουμε επίσης ότι οι f, g είναι συνεχείς και > 0 στο $[1, +\infty)$ οπότε, σύμφωνα με όσα γενικά είπαμε στην αρχή, τα γεν. ολοκληρώματα $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_1^{+\infty} g(x)\,dx$ είτε και τα δύο συγκλίνουν είτε και τα δύο έχουν τιμή $+\infty$. Όμως γνωρίζουμε ότι

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\,dx = +\infty.$$

Άρα $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$.

Στην περίπτωση αυτή βλέπουμε ότι οι αριστερές ανισότητες στις (14) και (15) είναι οι σημαντικές οπότε μπορούμε να τις αποδείξουμε απ' ευθείας στην συγκεκριμένη περίπτωσή μας χωρίς να καταφύγουμε στην γενική θεώρηση. Πράγματι, γράφουμε

$$\frac{x^2+x+3}{1+x^2+x^2\sqrt{x}} \geq \frac{x^2}{x^2\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}+x^2\sqrt{x}} = \frac{x^2}{3x^2\sqrt{x}} = \frac{3}{\sqrt{x}} \qquad \text{για κάθε } x \geq 1$$

οπότε

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+3}{1+x^2+x^2\sqrt{x}}\,dx \geq 3\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = +\infty$$

και άρα $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+x+3}{1+x^2+x^2\sqrt{x}}\,dx = +\infty$.

Στα επόμενα θα προτιμήσουμε αυτήν την πιο συγκεκριμένη διαδικασία.

(ii) Θα συγκρίνουμε την συνάρτηση $\frac{x^2+3}{2x^4+x^2+3}$ με μία απλούστερη συνάρτηση της οποίας το γεν. ολοκλήρωμα θα είναι εύκολο να δούμε αν συγκλίνει ή όχι. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{x^2+3}{2x^4+x^2+3} = \frac{x^2}{x^4} \frac{1+3x^{-2}}{2+x^{-2}+x^{-4}} = \frac{1}{x^2} \frac{1+3x^{-2}}{2+x^{-2}+x^{-4}}$$

και ότι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+3x^{-2}}{2+x^{-2}+x^{-4}} = \frac{1}{2}.$$

Άρα θεωρούμε την $\frac{1}{x^2}$ ως συνάρτηση "σύγκρισης" και έχουμε ότι $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$ οπότε θα επικεντρωθούμε στις δεξιές ανισότητες των (14) και (15). Γράφουμε

$$0 \leq \frac{x^2+3}{2x^4+x^2+3} \leq \frac{x^2+3x^2}{2x^4} = \frac{4x^2}{2x^4} = \frac{2}{x^2} \qquad \text{για κάθε } x \geq 1$$

οπότε

$$0 \le \int_1^{+\infty} \frac{x^2+3}{2x^4+x^2+3}\, dx \le 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx < +\infty.$$

Άρα το $\int_1^{+\infty} \frac{x^2+3}{2x^4+x^2+3}\, dx$ συγκλίνει.

(iii) Τώρα είναι εξ αρχής φανερό το τί πρέπει να κάνουμε. Ισχύει

$$0 \le \left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| = \frac{|\cos x|}{1+x^2} \le \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{για κάθε } x \ge 0$$

οπότε

$$0 \le \int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| dx \le \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx < +\infty.$$

Άρα το $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{1+x^2}\right| dx$ συγκλίνει οπότε και το $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx$ συγκλίνει.

(iv) Τώρα θα συγκρίνουμε την $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ με απλούστερη συνάρτηση ως εξής:

$$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1.$$

Άρα θα συγκρίνουμε την $\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ με την $\frac{1}{x^2}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx < +\infty$. Γράφουμε λοιπόν

$$0 \le \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x} \le \frac{1}{x^2} \qquad \text{για κάθε } x \ge 1$$

(λόγω της ανισότητας $\sin t < t$ για $t > 0$) και άρα

$$0 \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\, dx \le \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx < +\infty.$$

Άρα το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}\, dx$ συγκλίνει.

(v) Τώρα έχουμε μία απλή παραλλαγή του (iv):

$$\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 1.$$

Άρα θα συγκρίνουμε την $\sin\frac{1}{x}$ με την $\frac{1}{x}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty$. Γράφουμε λοιπόν

$$\sin\frac{1}{x} \ge \frac{2}{\pi}\frac{1}{x} \qquad \text{για κάθε } x \ge 1$$

(λόγω της ανισότητας $\sin t \ge \frac{2}{\pi} t$ για $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ την οποία είδαμε στην άσκηση 110) και άρα

$$\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\, dx \ge \frac{2}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx = +\infty.$$

Άρα $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x}\, dx = +\infty$. □

163. *Αποδείξτε ότι το* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ *συγκλίνει.*

Λύση. Αν $c > 1$ τότε έχουμε ότι

$$\int_1^c \frac{\sin x}{x}\, dx = -\int_1^c (\cos x)'\frac{1}{x}\, dx = -\frac{\cos c}{c} + \cos 1 + \int_1^c \frac{\cos x}{x^2}\, dx. \tag{16}$$

Επειδή ισχύει $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ για κάθε $x \ge 1$ και επειδή $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = 1$, συνεπάγεται ότι το $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ συγκλίνει. Άρα το όριο

$$\lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{\cos x}{x^2}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$$

υπάρχει και είναι αριθμός. Λόγω της (16) έχουμε ότι και το όριο $\lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{\sin x}{x}\, dx$ υπάρχει και είναι αριθμός:

$$\lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{\sin x}{x}\, dx = \cos 1 + \lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{\cos x}{x^2}\, dx = \cos 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

Άρα το $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ συγκλίνει και

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \cos 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx.$$

□

164. *Θεωρήστε το γεν. ολοκλήρωμα* $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}\,dx$ *με* $n \in \mathbb{N}$.
(i) Αποδείξτε ότι το $\Gamma(n)$ *συγκλίνει.*
(ii) Αποδείξτε ότι ισχύει $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ *για κάθε* n.
(iii) Αποδείξτε ότι $\Gamma(n) = (n-1)!$ *για κάθε* n.

Λύση. (i) Θα συγκρίνουμε την $f(x) = e^{-x}x^{n-1}$ με την απλούστερη συνάρτηση $g(x) = e^{-\frac{x}{2}}$. Είναι

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}x^{n-1}}{e^{-\frac{x}{2}}} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{x}{2}}x^{n-1} = 0.$$

Άρα υπάρχει $N > 0$ ώστε να ισχύει $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ για κάθε $x > N$. Από την άλλη μεριά, η $\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, N]$ οπότε έχει μέγιστη τιμή m σε αυτό και άρα ισχύει $0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq m$ για κάθε $x \in [0, N]$. Συνολικά, αν πάρουμε $M = \max\{m, 1\} > 0$ τότε ισχύει $0 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$ ή ισοδύναμα,

$$0 \leq e^{-x}x^{n-1} \leq Me^{-\frac{x}{2}} \qquad \text{για κάθε } x \geq 0.$$

Επειδή οι f, g είναι ≥ 0 στο $[0, +\infty)$, τα γεν. ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}\,dx$ και $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ έχουν και τα δύο τιμή η οποία είναι μη-αρνητικός αριθμός ή $+\infty$ και ισχύει

$$0 \leq \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}\,dx \leq M\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\,dx < +\infty.$$

Άρα το $\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}\,dx$ συγκλίνει.
(ii) Αν $c > 0$ τότε

$$\int_0^c e^{-x}x^n\,dx = -\int_0^c (e^{-x})'x^n\,dx = -e^{-c}c^n + \int_0^c e^{-x}(x^n)'\,dx = -e^{-c}c^n + n\int_0^c e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

οπότε, παίρνοντας όριο όταν $c \to +\infty$, βρίσκουμε ότι

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^n\,dx = n\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{n-1}\,dx$$

δηλαδή $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$.
(iii) Για $n = 1$ είναι

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$$

οπότε το $\Gamma(n) = (n-1)!$ ισχύει για $n = 1$. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει $\Gamma(n) = (n-1)!$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τότε από το (ii) έχουμε ότι $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$. Άρα το $\Gamma(n) = (n-1)!$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$. □

ΣΕΙΡΕΣ

165. *Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n \sin \frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Λύση. Το πρώτο πράγμα το οποίο σκεφτόμαστε όταν μας δίνουν μία σειρά είναι αν ο n-οστός όρος της τείνει στο 0. Τώρα, σε όλες οι σειρές σ' αυτήν την άσκηση ο n-οστός όρος δεν τείνει στο 0. Π.χ. στην πρώτη και στην τέταρτη σειρά έχουμε:

$$\frac{n}{2n+1} \to \frac{1}{2}, \qquad n \sin \frac{1}{n} = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1.$$

Ελέγξτε εσείς ότι ο n-οστός όρος της δεύτερης σειράς τείνει στο $\frac{1}{e}$, της τρίτης σειράς στο 1, της πέμπτης σειράς στο 1. (Κάποια από αυτά τα όρια θα τα δούμε στις επόμενες ασκήσεις.)
Άρα όλες οι σειρές αποκλίνουν.
Όταν μία σειρά έχει μη-αρνητικούς όρους γνωρίζουμε ότι αυτή είτε συγκλίνει είτε αποκλίνει στο $+\infty$. Επομένως για τις σειρές αυτής της άσκησης μπορούμε να πούμε όχι μόνο ότι αποκλίνουν αλλά και ότι έχουν άθροισμα $+\infty$.
Προσέξτε. Αν μας έδιναν την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}$ θα βλέπαμε πάλι ότι ο n-οστός όρος δεν τείνει στο 0. (Μάλιστα ο n-οστός όρος δεν έχει καν όριο: η υπακολουθία των άρτιων δεικτών τείνει στο $\frac{1}{2}$ και η υπακολουθία των περιττών δεικτών τείνει στο $-\frac{1}{2}$.) Αφού ο n-οστός όρος δεν τείνει στο 0 η σειρά αποκλίνει. Όμως αυτή δεν είναι σειρά με μη-αρνητικούς όρους οπότε δεν μπορούμε να συμπεράνουμε αν αποκλίνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ ή αν δεν έχει καν άθροισμα. Για κάτι τέτοιο χρειάζεται επιπλέον διερεύνηση. $\square$

166. *Χρησιμοποιώντας γεωμετρικές σειρές, εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{n-3}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-4}, \quad \sum_{n=3}^{+\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{6^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+2^{n/2}}{2^n}$$

και υπολογίστε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

Λύση. Η τρίτη σειρά γράφεται

$$\begin{aligned}
\sum_{n=3}^{+\infty} \left(-\tfrac{2}{3}\right)^{n+1} &= \left(-\tfrac{2}{3}\right)^4 + \left(-\tfrac{2}{3}\right)^5 + \left(-\tfrac{2}{3}\right)^6 \cdots \\
&= \left(-\tfrac{2}{3}\right)^4 \left(1 + \left(-\tfrac{2}{3}\right) + \left(-\tfrac{2}{3}\right)^2 + \cdots\right) \\
&= \left(-\tfrac{2}{3}\right)^4 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} \\
&= \left(-\tfrac{2}{3}\right)^4 \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{5}\,\frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{135}.
\end{aligned}$$

Η τέταρτη σειρά είναι άθροισμα δύο σειρών:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^{n-1}}{6^n} + \frac{3^{n+1}}{6^n}\right).$$

Και οι δύο σειρές ανάγονται σε γεωμετρικές. Εξετάζουμε καθεμία σειρά ξεχωριστά.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{6^{n-1}6} = \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{6^n} = \frac{3^2}{6} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n-1}}{6^{n-1}} = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Αφού συγκλίνουν οι δύο σειρές συγκλίνει και η αρχική και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}+3^{n+1}}{6^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{6^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{6^n} = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4}.$$

Ξαναγυρνάμε στην τρίτη σειρά για να κάνουμε ένα άλλο κόλπο. Ο δείκτης n τρέχει από το 3 και πέρα. Αν κάνουμε μία πολύ απλή αλλαγή μεταβλητής μπορούμε να πετύχουμε να τρέχει ο δείκτης από το 1 και πέρα: παρατηρούμε ότι το $n-2$ τρέχει από το 1 και πέρα. Γράφουμε $k=n-2$ ή ισοδύναμα $n=k+2$ και τότε η σειρά γράφεται

$$\sum_{n=3}^{+\infty}(-\tfrac{2}{3})^{n+1}=\sum_{k=1}^{+\infty}(-\tfrac{2}{3})^{k+3}=(-\tfrac{2}{3})^4\sum_{k=1}^{+\infty}(-\tfrac{2}{3})^{k-1}=(-\tfrac{2}{3})^4\,\tfrac{1}{1-(-\frac{2}{3})}=\tfrac{16}{135}.$$

Δείτε εσείς τις υπόλοιπες σειρές: η πρώτη έχει άθροισμα $+\infty$, η δεύτερη δεν έχει άθροισμα και η πέμπτη έχει άθροισμα $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$. □

167. *Βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συγκλίνουν οι σειρές:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{x}{(1+x)^{n-1}},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}},\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}.$$

Λύση. (i) Οι πρώτες δύο σειρές είναι, ουσιαστικά, γεωμετρικές. Για την πρώτη έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{x}{(1+x)^{n-1}}=x\sum_{n=1}^{+\infty}(\tfrac{1}{1+x})^{n-1}=x\,\tfrac{1}{1-\frac{1}{x+1}}=x+1.$$

Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{1+x})^{n-1}$ συγκλίνει αν και μόνο αν $-1<\frac{1}{x+1}<1$ δηλαδή αν και μόνο αν $x<-2$ ή $x>0$. Όμως η αρχική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^{n-1}}$ συγκλίνει και για $x=0$ αφού όλοι οι όροι της είναι 0. Επομένως η αρχική σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $x<-2$ ή $x\geq 0$.
(ii) Για την δεύτερη σειρά έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n-1}}=x^2\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{x^{2n-2}}{(1+x^2)^{n-1}}=x^2\sum_{n=1}^{+\infty}(\tfrac{x^2}{1+x^2})^{n-1}=x^2\tfrac{1}{1-\frac{x^2}{1+x^2}}=x^2(1+x^2).$$

Η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $-1<\frac{x^2}{1+x^2}<1$ το οποίο ισχύει για κάθε x.
(iii) Η τρίτη σειρά δεν φαίνεται να σχετίζεται με γεωμετρική σειρά. Έτσι πάει το μυαλό μας στο κριτήριο με το αν ο n-οστός όρος τείνει στο 0. Μέσα στον n-οστό όρο εμφανίζεται η γεωμετρική ακολουθία x^{2n} και έχουμε τις εξής περιπτώσεις.
Αν $0\leq x^2<1$ τότε $x^{2n}\to 0$ οπότε $\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\to 1$ και η σειρά αποκλίνει. (Μάλιστα, επειδή οι όροι είναι μη-αρνητικοί, το άθροισμα της σειράς είναι $+\infty$.)
Αν $x^2>1$ τότε $x^{2n}\to+\infty$ οπότε $\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\to -1$ και η σειρά αποκλίνει. (Τώρα, επειδή οι όροι είναι μη-θετικοί, το άθροισμα της σειράς είναι $-\infty$.)
Αν $x^2=1$ τότε $\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}=0$ για κάθε n και η σειρά έχει άθροισμα 0.
Άρα η σειρά συγκλίνει μόνο όταν $x=\pm 1$. □

168. *(i) Κάθε σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n-b_{n+1})$ χαρακτηρίζεται* ***τηλεσκοπική σειρά****.*
Βρείτε συνοπτικό τύπο για τα μερικά αθροίσματα s_n της σειράς αυτής και, βάσει αυτού, αποδείξτε ότι αυτή έχει άθροισμα αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty}b_n$ και ότι το άθροισμα είναι αριθμός αν και μόνο αν το $\lim_{n\to+\infty}b_n$ είναι αριθμός. Τι σχέση υπάρχει ανάμεσα στο άθροισμα της σειράς και στο $\lim_{n\to+\infty}b_n$;
(ii) Δείτε αν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n(n+1)},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{(2n-1)(2n+1)},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{1}{n(n+1)(n+2)},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\log\tfrac{n}{n+1},\ \sum_{n=1}^{+\infty}\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$$

συγκλίνουν και υπολογίστε τα αθροίσματά τους (αν υπάρχουν).

Λύση. (i) Ο n-οστός όρος της σειράς είναι $x_n=b_n-b_{n+1}$. Άρα το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς είναι

$$s_n=(b_1-b_2)+(b_2-b_3)+(b_3-b_4)+\cdots+(b_{n-1}-b_n)+(b_n-b_{n+1})=b_1-b_{n+1}.$$

Η τελική απλοποίηση γίνεται λόγω διαγραφών ίδιων όρων με αντίθετα πρόσημα.
Άρα το s_n έχει όριο αν και μόνο αν το b_{n+1} έχει όριο ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν το b_n έχει όριο.

Δηλαδή η σειρά έχει άθροισμα αν και μόνο αν υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ και τότε το άθροισμα της σειράς είναι

$$s = \lim_{n\to+\infty} s_n = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Με άλλα λόγια

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Αυτή είναι η σχέση ανάμεσα στο άθροισμα της σειράς και στο $\lim_{n\to+\infty} b_n$. Επομένως το άθροισμα είναι αριθμός αν και μόνο αν το $\lim_{n\to+\infty} b_n$ είναι αριθμός.

(ii) Για την πρώτη σειρά έχουμε

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

οπότε η σειρά είναι τηλεσκοπική με $b_n = \frac{1}{n}$. Επειδή $\frac{1}{n} \to 0$, η σειρά συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 1.$$

Για την δεύτερη σειρά έχουμε

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}$$

οπότε η σειρά είναι τηλεσκοπική με $b_n = \frac{1}{2(2n-1)}$. Επειδή $\frac{1}{2(2n-1)} \to 0$, η σειρά συγκλίνει και

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(2n-1)} = \frac{1}{2}.$$

Για τις υπόλοιπες σειρές παρατηρήστε ότι

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n(n+1)} - \frac{1}{2(n+1)(n+2)}, \qquad \log\frac{n}{n+1} = \log n - \log(n+1),$$

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\,\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

και να συμπεράνετε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \log\frac{n}{n+1} = -\infty, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}} = 1.$$

□

169. *Συγκρίνοντας με απλούστερες σειρές, εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sqrt{n}+2n+1}{2n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2+3n+1}{n^4-n^2+4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{1+n^2} - n), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+(1/n)}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\,\log(1+\frac{1}{n^2}),$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{1/n} - 1), \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(1-\cos\frac{1}{n}).$$

Λύση. Όλες οι σειρές έχουν μη-αρνητικούς όρους. Όπως έχουμε πει πολλές φορές, το πρώτο πράγμα το οποίο σκεφτόμαστε είναι να ελέγξουμε αν ο n-οστός όρος τείνει στο 0. Στην διαδικασία αυτού του ελέγχου (από τον οποίο θα προκύψει ότι όλοι οι n-οστοί όροι τείνουν στο 0) θα προκύψει και η σύγκριση η οποία πρέπει να γίνει με κατάλληλες απλούστερες σειρές.

(i) Για την πρώτη σειρά ο n-οστός όρος γράφεται (με παραγοντοποίηση των κύριων όρων από αριθμητή και παρονομαστή)

$$\frac{n\sqrt{n}+2n+1}{2n^2+1} = \frac{n\sqrt{n}}{n^2}\,\frac{1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n\sqrt{n}}}{2+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\,\frac{1+\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n\sqrt{n}}}{2+\frac{1}{n^2}}$$

και άρα

$$\frac{\frac{n\sqrt{n}+2n+1}{2n^2+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{2}.$$

Επειδή $0 < \frac{1}{2} < +\infty$, η αρχική σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ συγκλίνει. Γνωρίζουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$$

οπότε και η αρχική σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

Για τις υπόλοιπες σειρές θα δούμε πολύ συνοπτικά πώς χειριζόμαστε τον n-οστό όρο και θα βγάλουμε το αντίστοιχο συμπέρασμα. *Γίνετε εσείς πιο αναλυτικοί.*

(ii) Για την δεύτερη σειρά έχουμε

$$\frac{2n^2+3n+1}{n^4-n^2+4} = \frac{n^2}{n^4} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^4}} = \frac{1}{n^2} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^4}} \qquad \text{και} \qquad \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^4}} \to 2.$$

Επειδή $0 < 2 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, η δεύτερη σειρά συγκλίνει.

(iii) Για την τρίτη σειρά έχουμε

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \to 1.$$

Επειδή $0 < 1 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, η τρίτη σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

(iv) Για την τέταρτη σειρά έχουμε

$$\sqrt{1+n^2} - n = \frac{(1+n^2)-n^2}{\sqrt{1+n^2}+n} = \frac{1}{\sqrt{1+n^2}+n} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+1} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+1}+1} \to \frac{1}{2}.$$

Επειδή $0 < \frac{1}{2} < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, η τέταρτη σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

(v) Για την πέμπτη σειρά έχουμε

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{(n+1)-n}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \to \frac{1}{2}.$$

Επειδή $0 < \frac{1}{2} < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$, η πέμπτη σειρά συγκλίνει.

(vi) Για την έκτη σειρά έχουμε

$$\frac{1}{n^{1+(1/n)}} = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1.$$

Επειδή $0 < 1 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, η έκτη σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

(vii) Στον n-οστό όρο της έβδομης σειράς έχουμε ότι $\log(1+\frac{1}{n^2}) \to \log 1 = 0$ επειδή $\frac{1}{n^2} \to 0$. Τώρα όμως θα χρειαστούμε κάποιου είδους σύγκριση του $\log(1+\frac{1}{n^2})$ με μία δύναμη του n ώστε να αναγάγουμε την σειρά μας σε σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$. Εδώ θα μας βοηθήσει ένα σχετικό όριο της λογαριθμικής συνάρτησης:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Το όριο αυτό αποδεικνύεται είτε με τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl (αφού είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$) είτε παρατηρώντας ότι είναι η παράγωγος της $\log(1+x)$ στο 0.

Επομένως

$$\sqrt{n}\,\log(1+\tfrac{1}{n^2}) = \sqrt{n}\,\frac{1}{n^2} \frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n\sqrt{n}} \frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \qquad \text{και} \qquad \frac{\log(1+\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \to 1.$$

Επειδή $0 < 1 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} < +\infty$, η έβδομη σειρά συγκλίνει.

(viii) Στον n-οστό όρο της όγδοης σειράς έχουμε ότι $e^{1/n}-1\to 0$ επειδή $\frac{1}{n}\to 0$. Όπως στην προηγούμενη σειρά, θα χρειαστούμε κάποιου είδους σύγκριση του $e^{1/n}-1$ με μία δύναμη του n. Τώρα έχουμε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{e^x-1}{x}=1.$$

Το όριο αυτό αποδεικνύεται είτε με τον πρώτο κανόνα του l' Hopitâl (αφού είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$) είτε παρατηρώντας ότι είναι η παράγωγος της e^x στο 0.
Άρα

$$e^{\frac{1}{n}}-1=\tfrac{1}{n}\tfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\qquad\text{και}\qquad\tfrac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\to 1.$$

Επειδή $0<1<+\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=+\infty$, η όγδοη σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.
(ix) Στον n-οστό όρο της ένατης σειράς έχουμε ότι $\sin\frac{1}{n}\to 0$ επειδή $\frac{1}{n}\to 0$. Όπως στις προηγούμενες δύο σειρές, θα συγκρίνουμε το $\sin\frac{1}{n}$ με μία δύναμη του n. Τώρα έχουμε το γνωστό όριο:

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{\sin x}{x}=1.$$

Άρα

$$\tfrac{1}{n}\sin\tfrac{1}{n}=\tfrac{1}{n^2}\tfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\qquad\text{και}\qquad\tfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\to 1.$$

Επειδή $0<1<+\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$, η ένατη σειρά συγκλίνει.
(x) Στον n-οστό όρο της δέκατης σειράς έχουμε ότι $1-\cos\frac{1}{n}\to 0$ επειδή $\frac{1}{n}\to 0$. Και πάλι θα συγκρίνουμε το $1-\cos\frac{1}{n}$ με μία δύναμη του n. Τώρα έχουμε το γνωστό όριο:

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{1-\cos x}{x^2}=\tfrac{1}{2}.$$

Άρα

$$1-\cos\tfrac{1}{n}=\tfrac{1}{n^2}\tfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\qquad\text{και}\qquad\tfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\to\tfrac{1}{2}.$$

Επειδή $0<\frac{1}{2}<+\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty$, η δέκατη σειρά συγκλίνει. □

170. *Βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}n^a\big(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\big)$ συγκλίνει.*

Λύση. Θα συγκρίνουμε την σειρά με σειρά της μορφής $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$. Γι αυτό γράφουμε

$$\begin{aligned}n^a\big(\tfrac{1}{\sqrt{n}}-\tfrac{1}{\sqrt{n+1}}\big)&=n^a\tfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}=\tfrac{n^a}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}=\tfrac{n^a}{n\sqrt{n}}\tfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\big(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\big)}\\&=\tfrac{1}{n^{3/2-a}}\tfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\big(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\big)}\qquad\text{και}\qquad\tfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}\big(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\big)}\to\tfrac{1}{2}.\end{aligned}$$

Επειδή $0<\frac{1}{2}<+\infty$, η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2-a}}<+\infty$ αν και μόνο αν $\frac{3}{2}-a>1$ αν και μόνο αν $a<\frac{1}{2}$. □

171. *Εξετάστε με το ολοκληρωτικό κριτήριο τις σειρές*

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1},\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n^2+1},\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^n}{1+e^{2n}},\quad\sum_{n=1}^{+\infty}ne^{-n},\quad\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\log n},\quad\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\log^2 n}.$$

Για όσες σειρές συγκλίνουν βρείτε εκτιμήσεις για το άθροισμά τους.

Λύση. (i) Για την πρώτη σειρά έχουμε ότι $\frac{1}{n^2+1}\downarrow 0$. Δηλαδή το $\frac{1}{n^2+1}$ φθίνει και τείνει στο 0. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ η οποία είναι φθίνουσα και ≥ 0 στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $f(n)=\frac{1}{n^2+1}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Τώρα

$$\textstyle\int_1^c\frac{1}{x^2+1}\,dx=\arctan c-\arctan 1=\arctan c-\frac{\pi}{4}$$

και
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \big(\arctan c - \tfrac{\pi}{4}\big) = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\pi}{4}.$$
Άρα η σειρά συγκλίνει και
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \le \frac{1}{1^2+1} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx$$
δηλαδή
$$\tfrac{\pi}{4} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \le \tfrac{1}{2} + \tfrac{\pi}{4}.$$
(ii) Για την δεύτερη σειρά έχουμε ότι $\frac{n}{n^2+1} \downarrow 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ η οποία είναι φθίνουσα και ≥ 0 στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $f(n) = \frac{n}{n^2+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τώρα
$$\int_1^c \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_2^{c^2+1} \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\log\frac{c^2+1}{2}$$
και
$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \frac{1}{2}\log\frac{c^2+1}{2} = +\infty.$$
Άρα η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.
(iii) Για την τρίτη σειρά έχουμε ότι $\frac{e^n}{1+e^{2n}} \downarrow 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ η οποία είναι φθίνουσα και ≥ 0 στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $f(n) = \frac{e^n}{1+e^{2n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τώρα
$$\int_1^c \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int_e^{e^c} \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan(e^c) - \arctan e$$
και
$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \lim_{c\to+\infty} (\arctan(e^c) - \arctan e) = \tfrac{\pi}{2} - \arctan e.$$
Άρα η σειρά συγκλίνει και
$$\tfrac{\pi}{2} - \arctan e \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}} \le \frac{e}{1+e^2} + \tfrac{\pi}{2} - \arctan e.$$
(iv) Για την τέταρτη σειρά έχουμε ότι $ne^{-n} \downarrow 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = xe^{-x}$ η οποία είναι φθίνουσα και ≥ 0 στο $[1,+\infty)$ και ισχύει $f(n) = ne^{-n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τώρα
$$\begin{aligned}\int_1^c xe^{-x}\,dx &= -\int_1^c x(e^{-x})'\,dx = -ce^{-c} + e^{-1} + \int_1^c e^{-x}\,dx = -ce^{-c} + e^{-1} - e^{-c} + e^{-1}\\ &= -(c+1)e^{-c} + 2e^{-1}\end{aligned}$$
και
$$\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c xe^{-x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} (-(c+1)e^{-c} + 2e^{-1}) = 2e^{-1}.$$
Άρα η σειρά συγκλίνει και
$$2e^{-1} \le \sum_{n=1}^{+\infty} ne^{-n} \le e^{-1} + 2e^{-1} = 3e^{-1}.$$
(v) Για την πέμπτη σειρά έχουμε ότι $\frac{1}{n\log n} \downarrow 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x\log x}$ η οποία είναι φθίνουσα και ≥ 0 στο $[2,+\infty)$ και ισχύει $f(n) = \frac{1}{n\log n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Τώρα
$$\int_2^c \frac{1}{x\log x}\,dx = \int_{\log 2}^{\log c} \frac{1}{u}\,du = \log\frac{\log c}{\log 2}$$
και
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_2^c \frac{1}{x\log x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \log\frac{\log c}{\log 2} = +\infty.$$
Άρα η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

(vi) Για την έκτη σειρά έχουμε ότι $\frac{1}{n\log^2 n} \downarrow 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x\log^2 x}$ η οποία είναι φθίνουσα και ≥ 0 στο $[2, +\infty)$ και ισχύει $f(n) = \frac{1}{n\log^2 n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Τώρα

$$\int_2^c \frac{1}{x\log^2 x}\,dx = \int_{\log 2}^{\log c} \frac{1}{u^2}\,du = \frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log c}$$

και

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\log^2 x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \int_2^c \frac{1}{x\log^2 x}\,dx = \lim_{c\to+\infty} \Big(\frac{1}{\log 2} - \frac{1}{\log c}\Big) = \frac{1}{\log 2} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει και

$$\frac{1}{\log 2} \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log^2 n} \leq \frac{1}{2\log^2 2} + \frac{1}{\log 2}.$$

□

172. *Εφαρμόστε το κριτήριο λόγου σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n+2}{(\sqrt{2})^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(-3)^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-e)^n n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}.$$

Λύση. (i) Για την πρώτη σειρά, με $x_n = (-1)^n \frac{n+2}{(\sqrt{2})^n}$ έχουμε $x_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{n+3}{(\sqrt{2})^{n+1}}$ οπότε

$$\Big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\Big| = \frac{(n+3)(\sqrt{2})^n}{(n+2)(\sqrt{2})^{n+1}} = \frac{n+3}{n+2}\frac{1}{\sqrt{2}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.

(ii) Για την δεύτερη σειρά, με $x_n = \frac{n!}{(-3)^n}$ έχουμε $x_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(-3)^{n+1}}$ οπότε

$$\Big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\Big| = \frac{(n+1)!3^n}{n!3^{n+1}} = \frac{n+1}{3} \to +\infty > 1.$$

Άρα η σειρά αποκλίνει.

(iii) Για την τρίτη σειρά, με $x_n = \frac{2^n}{n^n}$ έχουμε $x_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}$ οπότε

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}n^n}{2^n(n+1)^{n+1}} = \frac{2}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^n} \to 0 < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει.

Γενικά το κριτήριο λόγου εργάζεται με την απόλυτη τιμή του λόγου $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ και το συμπέρασμα είναι είτε ότι "η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει" είτε ότι "η σειρά αποκλίνει", όπως στις δύο πρώτες σειρές. Η τρίτη σειρά έχει μη-αρνητικούς όρους οπότε δεν έγραψα την απόλυτη τιμή του λόγου. Δεν θα ήταν λάθος να την γράψω, αλλά θα ήταν πλεονασμός. Επίσης, ανέφερα απλώς ότι η σειρά συγκλίνει, αφού, και πάλι επειδή η σειρά έχει μη-αρνητικούς όρους, η απόλυτη σύγκλισή της και η σύγκλισή της ταυτίζονται.

(iv) Για την τέταρτη σειρά, με $x_n = \frac{3^n n!}{n^n}$ έχουμε $x_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ οπότε

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)!n^n}{3^n n!(n+1)^{n+1}} = \frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{3}{e} > 1.$$

Άρα η σειρά αποκλίνει (και μάλιστα στο $+\infty$ αφού έχει μη-αρνητικούς όρους).

(v) Για την πέμπτη σειρά, με $x_n = (-1)^{n-1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ έχουμε $x_{n+1} = (-1)^n \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}$ οπότε

$$\Big|\frac{x_{n+1}}{x_n}\Big| = \frac{((n+1)!)^2(2n)!}{(n!)^2(2(n+1))!} = \frac{(n!)^2(n+1)^2(2n)!}{(n!)^2(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{1}{4} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.

(vi) Για την έκτη σειρά, με $x_n=\frac{(-e)^n n!}{n^n}$ έχουμε $x_{n+1}=\frac{(-e)^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ οπότε

$$\big|\tfrac{x_{n+1}}{x_n}\big|=\tfrac{e^{n+1}(n+1)!n^n}{e^n n!(n+1)^{n+1}}=\tfrac{e(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\tfrac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}\to 1.$$

Άρα από το κριτήριο λόγου δεν προκύπτει συμπέρασμα για την σειρά.
Η κατάσταση είναι όπως με τις απροσδιόριστες μορφές. Το κριτήριο λόγου δεν δίνει συμπέρασμα αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι δεν θα μπορούσαμε με κάποιον άλλο τρόπο (πιθανόν κάποιο άλλο κριτήριο) να δούμε αν η σειρά συγκλίνει απολύτως ή συγκλίνει ή αποκλίνει. Απλώς χρειάζεται επιπλέον διερεύνηση.
(vii) Για την έβδομη σειρά, με $x_n=\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}$ έχουμε $x_{n+1}=\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}$ οπότε

$$\tfrac{x_{n+1}}{x_n}=\tfrac{4^{n+1}((n+1)!)^2(2n)!}{4^n(n!)^2(2(n+1))!}=\tfrac{4(n!)^2(n+1)^2(2n)!}{(n!)^2(2n+2)!}=\tfrac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}\to 1.$$

Άρα από το κριτήριο λόγου δεν προκύπτει συμπέρασμα για την σειρά.
(viii) Για την όγδοη σειρά, με $x_n=\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}$ έχουμε $x_{n+1}=\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)(3n+2)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)(4n+1)}$ οπότε

$$\tfrac{x_{n+1}}{x_n}=\tfrac{3n+2}{4n+1}\to\tfrac{3}{4}<1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει. □

173. *Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας σε όποιες από τις παρακάτω σειρές είναι αυτό δυνατό.*

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{n+1}{2n-1})^n,\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{3n-1}{2n+1})^{2n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{e^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2^n}{(n+1)^n},$$

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n2^n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{n}{n+1})^{n^2},\quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-e)^n(\frac{n}{n+1})^{n^2}.$$

Λύση. (i) Στην πρώτη σειρά είναι $x_n=(-\frac{n+1}{2n-1})^n$ οπότε

$$\sqrt[n]{|x_n|}=\tfrac{n+1}{2n-1}\to\tfrac{1}{2}<1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.
(ii) Στην δεύτερη σειρά είναι $x_n=(\frac{3n-1}{2n+1})^{2n}$ οπότε

$$\sqrt[n]{x_n}=(\tfrac{3n-1}{2n+1})^2\to\tfrac{9}{4}>1.$$

Άρα η σειρά αποκλίνει. Μάλιστα, επειδή είναι σειρά μη-αρνητικών όρων, έχει άθροισμα $+\infty$. Δείτε το σχόλιο στην τρίτη σειρά της προηγούμενης άσκησης. Δεν έγραψα την απόλυτη τιμή του x_n διότι είναι μη-αρνητικό.
(iii) Στην τρίτη σειρά είναι $x_n=\frac{n^3}{e^n}$ οπότε

$$\sqrt[n]{x_n}=\tfrac{(\sqrt[n]{n})^3}{e}\to\tfrac{1}{e}<1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει.
Πάλι το ίδιο σχόλιο. Επειδή η σειρά έχει μη-αρνητικούς όρους δεν έγραψα την απόλυτη τιμή του x_n και στο συμπέρασμα είπα απλώς ότι η σειρά συγκλίνει αφού, για τον ίδιο λόγο, η απόλυτη σύγκλισή της και η σύγκλισή της ταυτίζονται.
(iv) Στην τέταρτη σειρά είναι $x_n=(-1)^{n-1}\frac{2^n}{(n+1)^n}$ οπότε

$$\sqrt[n]{|x_n|}=\tfrac{2}{n+1}\to 0<1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.

(v) Στην πέμπτη σειρά είναι $x_n = \frac{n2^n}{(\sqrt[n]{n}+1)^n}$ οπότε

$$\sqrt[n]{x_n} = \tfrac{2\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n}+1} \to 1.$$

Άρα από το κριτήριο ρίζας δεν προκύπτει συμπέρασμα για την σειρά.
Το ίδιο σχόλιο όπως στην έκτη σειρά της προηγούμενης άσκησης. Το κριτήριο ρίζας δεν δίνει συμπέρασμα αλλά αυτό δεν σημαίνει ότι δεν θα μπορούσαμε με κάποιον άλλο τρόπο να δούμε αν η σειρά συγκλίνει απολύτως ή συγκλίνει ή αποκλίνει.
(vi) Στην έκτη σειρά είναι $x_n = (-\frac{n}{n+1})^{n^2}$ οπότε

$$\sqrt[n]{|x_n|} = (\tfrac{n}{n+1})^n = \tfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \tfrac{1}{e} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.
(vii) Στην έβδομη σειρά είναι $x_n = (-e)^n(\frac{n}{n+1})^{n^2}$ οπότε

$$\sqrt[n]{|x_n|} = e(\tfrac{n}{n+1})^n = \tfrac{e}{(1+\frac{1}{n})^n} \to 1.$$

Άρα από το κριτήριο ρίζας δεν προκύπτει συμπέρασμα για την σειρά. □

174. *Εξετάστε ως προς την σύγκλιση και την απόλυτη σύγκλιση τις σειρές:*

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{4/3}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/4}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}n^2}{3^n},$$

$$\textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\log n}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\log^2 n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\log\big(1+\frac{1}{n}\big),$$

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\big(1-\cos\frac{1}{n}\big).$$

Λύση. (i) Στην πρώτη σειρά έχουμε

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{n-1}}{n^{4/3}}\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{4/3}} < +\infty.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.
Προσέξτε ότι από το κριτήριο λόγου καθώς και από το κριτήριο ρίζας δεν προκύπτει συμπέρασμα για την σειρά. Έχουμε $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{4/3}}$ οπότε $x_{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{4/3}}$ και άρα

$$\big|\tfrac{x_{n+1}}{x_n}\big| = \tfrac{n^{4/3}}{(n+1)^{4/3}} = \big(\tfrac{n}{n+1}\big)^{4/3} \to 1, \qquad \sqrt[n]{|x_n|} = \tfrac{1}{(\sqrt[n]{n})^{4/3}} \to 1.$$

(ii) Στην δεύτερη σειρά έχουμε

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{n-1}}{n^{3/4}}\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/4}} = +\infty.$$

Άρα η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως.
Όπως στην πρώτη σειρά, πάλι από το κριτήριο λόγου καθώς και από το κριτήριο ρίζας δεν προκύπτει συμπέρασμα για την σειρά: ελέγξτε.
Στην σειρά εφαρμόζεται το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων. Έχουμε $\frac{1}{n^{3/4}} \downarrow 0$ οπότε η σειρά συγκλίνει.
(iii) Στην τρίτη σειρά έχουμε

$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+1}\big| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}.$$

Από κριτήρια λόγου και ρίζας δεν προκύπτει συμπέρασμα: ελέγξτε. Θα συγκρίνουμε με απλούστερη σειρά.

$$\tfrac{1}{\sqrt{n}+1} = \tfrac{1}{\sqrt{n}}\,\tfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \qquad \text{και} \qquad \tfrac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 1.$$

Επειδή $0 < 1 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/2}} = +\infty$, συνεπάγεται

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+1}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1} = +\infty.$$

Άρα η σειρά δεν συγκλίνει απολύτως.
Η σύγκριση θα μπορούσε να γίνει και με απλούστερο τρόπο. Επειδή $\frac{1}{\sqrt{n}+1} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}$ (ελέγξτε το), έχουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}+1}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1} \geq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty.$$

Επειδή $\frac{1}{\sqrt{n}+1} \downarrow 0$, από το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων έχουμε ότι η σειρά συγκλίνει.
Ας ξαναγυρίσουμε στο θέμα της απόλυτης σύγκλισης. Επειδή $\frac{1}{\sqrt{n}+1} \downarrow 0$, το αν συγκλίνει ή όχι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ θα μπορούσαμε να το εξετάσουμε και με το ολοκληρωτικό κριτήριο αλλά αυτό είναι κάπως περίπλοκο. Ας το δοκιμάσουμε. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ η οποία είναι φθίνουσα και ≥ 0 στο $[1, +\infty)$. Έχουμε ότι

$$\int_1^c \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx = 2\int_1^{\sqrt{c}} \frac{u}{u+1}\, du = 2\int_1^{\sqrt{c}} \left(1 - \frac{1}{u+1}\right) du = 2\sqrt{c} - 2 - 2\log(\sqrt{c}+1) + 2\log 2$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx &= \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx = \lim_{c\to+\infty}(2\sqrt{c} - 2 - 2\log(\sqrt{c}+1) + 2\log 2)\\ &= 2\lim_{y\to+\infty}(y - 1 - \log(y+1) + \log 2)\\ &= 2\lim_{y\to+\infty} y\left(1 - \tfrac{1}{y} - \tfrac{\log(y+1)}{y} + \tfrac{\log 2}{y}\right) = +\infty.\end{aligned}$$

Μπορεί πάλι να γίνει μία απλή σύγκριση. Επειδή $\frac{1}{\sqrt{x}+1} \geq \frac{1}{2\sqrt{x}}$ για $x \geq 1$, έχουμε ότι

$$\int_1^c \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx \geq \frac{1}{2}\int_1^c \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{c} - 1$$

οπότε, επειδή $\lim_{c\to+\infty}(\sqrt{c}-1) = +\infty$, παίρνουμε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx = +\infty.$$

Τώρα, από το $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx = +\infty$ συμπεραίνουμε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1} = +\infty$.
(iv) Στην τέταρτη σειρά εφαρμόζονται τα κριτήρια λόγου και ρίζας. Είναι $x_n = \frac{(-1)^{n-1}n^2}{3^n}$ οπότε $x_{n+1} = \frac{(-1)^n(n+1)^2}{3^{n+1}}$ και άρα

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{(n+1)^2 3^n}{n^2 3^{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{3n^2} \to \frac{1}{3} < 1, \qquad \sqrt[n]{|x_n|} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{3} \to \frac{1}{3} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.
Για να εξετάσουμε την απόλυτη σύγκλιση θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}n^2}{3^n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

αλλά η σειρά η οποία προκύπτει δεν μπορεί να εξεταστεί εύκολα συγκρίνοντας με απλούστερη σειρά ούτε με το ολοκληρωτικό κριτήριο (γίνεται αλλά είναι κάπως περίπλοκο) οπότε πάλι θα καταφεύγαμε στα κριτήρια λόγου και ρίζας.
(v) Για την πέμπτη σειρά γράφουμε

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n\log n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}.$$

Στην άσκηση 171 είδαμε με το ολοκληρωτικό κριτήριο ότι $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log n} = +\infty$, οπότε η σειρά μας δεν συγκλίνει απολύτως.

Όμως, επειδή $\frac{1}{n\log n} \downarrow 0$, εφαρμόζεται το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων και καταλήγουμε στο ότι η σειρά συγκλίνει.
Πάλι σχετικά με την απόλυτη σύγκλιση, μπορείτε να ελέγξετε (κάντε το) ότι δεν εφαρμόζεται κανένα από τα κριτήρια λόγου και ρίζας.
(vi) Για την έκτη σειρά έχουμε

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n\log^2 n}\right| = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log^2 n}.$$

Στην άσκηση 171 είδαμε με το ολοκληρωτικό κριτήριο ότι $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\log^2 n} < +\infty$ οπότε η σειρά μας συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει.
Και πάλι μπορείτε να ελέγξετε ότι δεν εφαρμόζεται κανένα από τα κριτήρια λόγου και ρίζας.
(vii) Για την έβδομη σειρά γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1}\log\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\tfrac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\tfrac{n+1}{n}.$$

Στην άσκηση 168 είδαμε (ως τηλεσκοπική) την αντίθετη σειρά: $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\frac{n}{n+1} = -\infty$. Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} \log\frac{n+1}{n} = +\infty$ οπότε η σειρά μας δεν συγκλίνει απολύτως.
Επίσης, στην άσκηση 169 χρησιμοποιήσαμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Με το όριο αυτό μπορούμε να κάνουμε σύγκριση της σειράς με απλούστερη σειρά (όπως στην άσκηση 169):

$$\log\left(1+\tfrac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\,\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \qquad \text{και} \qquad \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \to 1.$$

Επειδή $0 < 1 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1}\log\left(1+\tfrac{1}{n}\right)\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\tfrac{1}{n}\right) = +\infty$$

οπότε η σειρά μας δεν συγκλίνει απολύτως.
Τέλος, επειδή η λογαριθμική συνάρτηση είναι αύξουσα και $\frac{1}{n} \downarrow 0$, έχουμε ότι $\log(1+\frac{1}{n}) \downarrow 0$ οπότε από το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων παίρνουμε ότι η σειρά μας συγκλίνει.
(viii) Στην όγδοη σειρά προσέχουμε ότι ο n-οστός όρος $\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}}$ δεν τείνει στο 0. Μάλιστα δεν έχει καν όριο: η υπακολουθία άρτιων δεικτών τείνει στο -1 και η υπακολουθία περιττών δεικτών τείνει στο 1. Άρα η σειρά αποκλίνει.
Πρέπει να πω ότι σε όλες τις προηγούμενες σειρές (και στις επόμενες) κοίταξα πρώτα-πρώτα αν ο n-οστός όρος τείνει στο 0. Αυτή η σειρά είναι η μόνη στην οποία ο n-οστός όρος δεν τείνει στο 0.
(ix) Για την ένατη σειρά γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1}\sin\tfrac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\tfrac{1}{n}.$$

Στην άσκηση 169 χρησιμοποιήσαμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Όπως στην άσκηση 169, θα κάνουμε σύγκριση της σειράς με απλούστερη σειρά:

$$\sin\tfrac{1}{n} = \frac{1}{n}\,\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \qquad \text{και} \qquad \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \to 1.$$

Επειδή $0 < 1 < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1}\sin\tfrac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\tfrac{1}{n} = +\infty$$

οπότε η σειρά μας δεν συγκλίνει απολύτως.
Τέλος, επειδή η $\sin x$ είναι αύξουσα στο $[0, \frac{\pi}{2}]$ και $\frac{1}{n} \downarrow 0$, έχουμε ότι $\sin\frac{1}{n} \downarrow 0$ οπότε από το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων παίρνουμε ότι η σειρά μας συγκλίνει.
(x) Για την δέκατη σειρά γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1}\left(1-\cos\tfrac{1}{n}\right)\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\tfrac{1}{n}\right).$$

Όπως πριν, χρησιμοποιούμε το όριο

$$\lim_{x\to 0} \tfrac{1-\cos x}{x^2} = \tfrac{1}{2}$$

και θα κάνουμε σύγκριση της σειράς με απλούστερη σειρά:

$$1-\cos\tfrac{1}{n} = \tfrac{1}{n^2}\,\tfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \qquad \text{και} \qquad \tfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \to \tfrac{1}{2}.$$

Επειδή $0 < \frac{1}{2} < +\infty$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$, έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1}\left(1-\cos\tfrac{1}{n}\right)\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\tfrac{1}{n}\right) < +\infty$$

οπότε η σειρά μας συγκλίνει απολύτως και άρα συγκλίνει. □

175. *Βρείτε τα διαστήματα σύγκλισης των δυναμοσειρών*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{1}{2^n}\,x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n!x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{2^n}{n^2}\,x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^{n+1}x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{(-1)^n n}{n^2+1}\,x^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{2^n}{n!}\,x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{n^n}{(n+1)^n}\,x^n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\,x^n.$$

Μην παραβλέψετε τα άκρα των διαστημάτων σύγκλισης.

Λύση. (i) Με $a_n = \frac{1}{2^n}$ έχουμε

$$\tfrac{a_{n+1}}{a_n} = \tfrac{2^n}{2^{n+1}} = \tfrac{1}{2} \to \tfrac{1}{2}, \qquad \sqrt[n]{a_n} = \tfrac{1}{2} \to \tfrac{1}{2}.$$

Με δύο τρόπους βλέπουμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 2$. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-2, 2)$ μαζί, ίσως, με κάποια από τα άκρα του. Δοκιμάζουμε αν η δυναμοσειρά συγκλίνει σε κάποιο από τα άκρα ± 2.
Για $x = 2$ και $x = -2$ παίρνουμε τις σειρές

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{2^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 1, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{(-2)^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$$

οι οποίες αποκλίνουν αφού οι n-οστοί όροι τους δεν τείνουν στο 0.
Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-2, 2)$.
(ii) Με $a_n = n^3$ έχουμε

$$\tfrac{a_{n+1}}{a_n} = \tfrac{(n+1)^3}{n^3} \to 1, \qquad \sqrt[n]{a_n} = (\sqrt[n]{n})^3 \to 1.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1, 1)$ μαζί, ίσως, με κάποια από τα άκρα του.
Για $x = 1$ και $x = -1$ παίρνουμε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^3 = +\infty, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^3$$

οι οποίες αποκλίνουν αφού οι n-οστοί όροι τους δεν τείνουν στο 0.
Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1, 1)$.

(iii) Με $a_n = n!$ έχουμε
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \to +\infty.$$
Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 0$ οπότε το διάστημα σύγκλισης είναι το μονοσύνολο $\{0\}$: η σειρά συγκλίνει μόνο όταν $x = 0$.
Στις δύο προηγούμενες σειρές υπολογίσαμε την ακτίνα σύγκλισης χρησιμοποιώντας και το όριο $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Τώρα το αποφύγαμε διότι το όριο $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$ είναι κάπως πιο περίπλοκο. Αξίζει όμως να μελετήσουμε αυτό το όριο! Θα δούμε ότι
$$\boxed{\sqrt[n]{n!} \to +\infty.}$$
Αν $n = 2k$ τότε
$$(2k)! = 1\cdots k(k+1)(k+2)\cdots(2k) \geq (k+1)(k+2)\cdots(2k) \geq (k+1)^k \geq k^k$$
οπότε $\sqrt[2k]{(2k)!} \geq \sqrt{k}$ και άρα $\sqrt[2k]{(2k)!} \to +\infty$.
Αν $n = 2k-1$ τότε
$$(2k-1)! = 1\cdots(k-1)k(k+1)\cdots(2k-1) \geq k(k+1)\cdots(2k-1) \geq k^k \geq k^{k-\frac{1}{2}}$$
οπότε $\sqrt[2k-1]{(2k-1)!} \geq \sqrt{k}$ και άρα $\sqrt[2k-1]{(2k-1)!} \to +\infty$.
Από τα $\sqrt[2k]{(2k)!} \to +\infty$ και $\sqrt[2k-1]{(2k-1)!} \to +\infty$ συνεπάγεται $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$.
Βλέπουμε λοιπόν και πάλι ότι η ακτίνα σύγκλισης είναι 0.
(iv) Με $a_n = \frac{2^n}{n^2}$ έχουμε
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}n^2}{2^n(n+1)^2} = \frac{2n^2}{(n+1)^2} \to 2, \qquad \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 2.$$
Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = \frac{1}{2}$.
Για $x = \frac{1}{2}$ και $x = -\frac{1}{2}$ παίρνουμε τις σειρές
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$
Γνωρίζουμε ότι η πρώτη σειρά συγκλίνει. Η δεύτερη σειρά συγκλίνει απολύτως (και άρα συγκλίνει) διότι η σειρά με τις απόλυτες τιμές των όρων της είναι η πρώτη σειρά.
Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
(v) Με $a_n = n^{n+1}$ έχουμε
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}} = (1+\tfrac{1}{n})^n \frac{(n+1)^2}{n} \to +\infty, \qquad \sqrt[n]{a_n} = n\sqrt[n]{n} \to +\infty.$$
Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 0$ οπότε το διάστημα σύγκλισης είναι το μονοσύνολο $\{0\}$: η σειρά συγκλίνει μόνο όταν $x = 0$.
(vi) Με $a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ έχουμε
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)(n^2+1)}{n((n+1)^2+1)} \to 1.$$
Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.
Δοκιμάστε εσείς να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης υπολογίζοντας το $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Είναι ελάχιστα πιο περίπλοκο από το $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.
Για $x = 1$ και $x = -1$ παίρνουμε τις σειρές
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}(-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$
Η δεύτερη σειρά (έχει μη-αρνητικούς όρους) αποκλίνει στο $+\infty$. Αυτό το βλέπουμε π.χ. συγκρίνοντας με την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει στο $+\infty$, μέσω των:
$$\frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} \to 1.$$

Η πρώτη σειρά δεν συγκλίνει απολύτως διότι η σειρά με τις απόλυτες τιμές των όρων της είναι η δεύτερη σειρά. Όμως το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων λέει ότι η πρώτη σειρά συγκλίνει αφού $\frac{n}{n^2+1} \downarrow 0$. Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1, 1]$.

(vii) Με $a_n = \frac{2^n}{n!}$ έχουμε

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} n!}{2^n (n+1)!} = \frac{2}{n+1} \to 0.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = +\infty$ οπότε το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-\infty, +\infty)$: η σειρά συγκλίνει για κάθε x.

Αν δοκιμάσουμε το $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το όριο $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ το οποίο αποδείξαμε στο (iii):

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$$

οπότε πάλι βρίσκουμε $R = +\infty$.

(viii) Με $a_n = \frac{n^n}{(n+1)^n}$ έχουμε

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{n+1} \to 1.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.

Δοκιμάστε εσείς να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης υπολογίζοντας το $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Για $x = 1$ και $x = -1$ παίρνουμε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^n}.$$

Επειδή

$$\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e},$$

η πρώτη σειρά αποκλίνει αφού ο n-οστός όρος της δεν τείνει στο 0. Για τον ίδιο λόγο και η δεύτερη σειρά αποκλίνει. Η υπακολουθίες των άρτιων και των περιττών δεικτών του n-οστού όρου της τείνουν στο $\frac{1}{e}$ και στο $-\frac{1}{e}$ αντιστοίχως.

Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $(-1, 1)$.

(ix) Με $a_n = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ έχουμε

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{(n+1)\sqrt[n]{n+1}} \to 1.$$

Άρα η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1$.

Δοκιμάστε εσείς να βρείτε την ακτίνα σύγκλισης υπολογίζοντας το $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Για $x = 1$ και $x = -1$ παίρνουμε τις σειρές

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Η πρώτη σειρά (έχει μη-αρνητικούς όρους) αποκλίνει στο $+\infty$. Αυτό το βλέπουμε π.χ. συγκρίνοντας με την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, η οποία αποκλίνει στο $+\infty$, μέσω των:

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{1}{n} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})^n} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})^n} \to \frac{1}{e}.$$

Η δεύτερη σειρά δεν συγκλίνει απολύτως διότι η σειρά με τις απόλυτες τιμές των όρων της είναι η πρώτη σειρά. Όμως από το κριτήριο εναλλασσόμενων προσήμων έχουμε ότι η δεύτερη σειρά συγκλίνει αφού

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)(1+\frac{1}{n})^n} \downarrow 0.$$

(Η $n + 1$ είναι αύξουσα και έχει όριο $+\infty$ και η $(1 + \frac{1}{n})^n$ είναι αύξουσα και έχει όριο e.)

Άρα το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1)$. □

176. *Χρησιμοποιήστε γνωστές σειρές Taylor για να βρείτε συνοπτικούς τύπους για τις δυναμοσειρές*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1 - 2^n) x^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log^n a}{n!} x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n}, \qquad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n} x^{2n}, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1} x^{2n-1}.$$

Λύση. Οι σειρές Taylor τις οποίες θα θεωρήσουμε γνωστές είναι της συνάρτησης $\frac{1}{1-x}$ (δηλαδή η γεωμετρική σειρά), της εκθετικής συνάρτησης e^x, των τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\cos x$ και $\sin x$ και της λογαριθμικής συνάρτησης $\log\frac{1}{1-x}$. Οι σειρές αυτές με τα διαστήματα σύγκλισής τους είναι:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{1-x} = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \qquad -1 < x < 1\\
&e^x = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, x^n, \qquad -\infty < x < +\infty\\
&\cos x = \textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}, \qquad -\infty < x < +\infty\\
&\sin x = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\, x^{2n-1}, \qquad -\infty < x < +\infty\\
&\log\tfrac{1}{1-x} = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, x^n, \qquad -1 \le x < 1
\end{aligned}$$

(i) Χωρίζουμε την πρώτη δυναμοσειρά σε δύο γεωμετρικές δυναμοσειρές:

$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty}(1-2^n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-2x}.$$

Για να επιτραπεί ο αρχικός χωρισμός στις δύο γεωμετρικές δυναμοσειρές πρέπει αυτές να συγκλίνουν, δηλαδή πρέπει να είναι $-1 < x < 1$ και $-1 < 2x < 1$ ή, ισοδύναμα, $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$. Επομένως το διάστημα σύγκλισης της αρχικής δυναμοσειράς είναι *τουλάχιστον* το $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
Για να βρούμε το διάστημα σύγκλισης της αρχικής δυναμοσειράς μπορούμε να εφαρμόσουμε σ' αυτήν π.χ. το κριτήριο λόγου: με $a_n = 1 - 2^n$ έχουμε

$$\left|\tfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \tfrac{2^{n+1}-1}{2^n-1} = 2\,\tfrac{1-2^{-n-1}}{1-2^{-n}} \to 2$$

οπότε η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = \frac{1}{2}$. Για $x = -\frac{1}{2}$ και $x = \frac{1}{2}$ έχουμε τις σειρές

$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1-2^n}{2^n}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-2^n}{2^n}$$

οι οποίες αποκλίνουν διότι οι n-οστοί όροι τους δεν έχουν όριο 0. Άρα το διάστημα σύγκλισης της αρχικής δυναμοσειράς είναι το $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
(ii) Στην δεύτερη δυναμοσειρά εμφανίζονται όλα τα παραγοντικά οπότε μάλλον σχετίζεται με την σειρά Taylor της e^x:

$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(-x^2)^n = e^{-x^2}.$$

Αυτό ισχύει για κάθε x οπότε το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $(-\infty, +\infty)$.
(iii) Ομοίως:

$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\log^n a}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}(x\log a)^n = e^{x\log a} = a^x.$$

Και πάλι το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $(-\infty, +\infty)$.
(iv) Στην τέταρτη δυναμοσειρά εμφανίζονται τα παραγοντικά μόνο των άρτιων αριθμών και με εναλλασσόμενα πρόσημα οπότε μάλλον σχετίζεται με την σειρά Taylor της $\cos x$:

$$\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n} = -\cos(2x).$$

Αυτό ισχύει για κάθε x οπότε το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $(-\infty, +\infty)$.
(v) Στην πέμπτη δυναμοσειρά εμφανίζονται όλα τα παραγοντικά οπότε μάλλον σχετίζεται με την σειρά Taylor της e^x. Απλώς πρέπει να χωρίσουμε σε δύο δυναμοσειρές ώστε να γίνει κάποια απλοποίηση:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n-1}{n!} x^n &= \textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n\\
&= \textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n\\
&= x\textstyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n\\
&= x\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n\\
&= x(e^x-1) - (e^x - 1 - x) = xe^x - e^x + 1.
\end{aligned}$$

Και οι δύο δυναμοσειρές, στις οποίες χωρίσαμε την αρχική δυναμοσειρά, συγκλίνουν για κάθε x οπότε η αρχική δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε x και επομένως το διάστημα σύγκλισής της είναι το $(-\infty, +\infty)$.
(vi)-(vii) Οι επόμενες δύο δυναμοσειρές είναι τα δύο "μισά κομμάτια" της σειράς Taylor της e^x: το ένα έχει τους άρτιους δείκτες και το άλλο τους περιττούς. Επίσης, δεν έχουν εναλλασσόμενα πρόσημα (αν είχαν θα σχετίζονταν με τις σειρές Taylor των $\cos x$ και $\sin x$).
Γενικά, όταν έχουμε την σειρά Taylor μίας συνάρτησης σε διάστημα με κέντρο το σημείο 0, δηλαδή

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad -R < x < R,$$

τότε υπάρχει ένας απλός τρόπος να "χωρίσουμε" τα κομμάτια με τους άρτιους και τους περιττούς δείκτες. Θέτουμε $-x$ στην θέση του x και έχουμε

$$f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n, \qquad -R < x < R.$$

Τώρα προσθέτουμε και μετά αφαιρούμε τις δύο ισότητες και χρησιμοποιούμε το ότι

$$1 + (-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{για άρτιο } n \\ 0 & \text{για περιττό } n \end{cases} \qquad 1 - (-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{για άρτιο } n \\ 2 & \text{για περιττό } n \end{cases}$$

Καταλήγουμε στους τύπους:

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} a_n x^n = \sum_{n \text{ άρτιο}} a_n x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k}$$

και

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1-(-1)^n}{2} a_n x^n = \sum_{n \text{ περιττό}} a_n x^n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k-1} x^{2k-1}.$$

Και οι δύο τύποι ισχύουν για $-R < x < R$.
Επομένως, στην ειδική περίπτωση την οποία έχουμε παίρνουμε:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

και

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)!} x^{2k-1} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

Και οι δύο τύποι ισχύουν για $-\infty < x < +\infty$ οπότε το διάστημα σύγκλισης και των δύο δυναμοσειρών είναι το $(-\infty, +\infty)$.
(viii)-(ix) Τα ίδια αλλά με την σειρά Taylor της $\log \frac{1}{1-x}$:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} x^{2k} = \frac{1}{2}\Big(\log \frac{1}{1-x} + \log \frac{1}{1+x}\Big) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-x^2}.$$

και

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} x^{2k-1} = \frac{1}{2}\Big(\log \frac{1}{1-x} - \log \frac{1}{1+x}\Big) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

Και οι δύο τύποι ισχύουν για $-1 < x < 1$. Επίσης, φαίνεται αμέσως ότι καμία από τις δύο δυναμοσειρές δεν συγκλίνει για $x = -1$ ή για $x = 1$. Άρα το διάστημα σύγκλισης και των δύο δυναμοσειρών είναι το $(-1, 1)$. $\square$