Μιχάλης Παπαδημητράκης

Πραγματική Ανάλυση

Μέτρο και ολοκλήρωμα Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγικά.

Α. Γνωρίζουμε να μετράμε το **μήκος**, το **εμβαδό** και τον **όγκο** απλών γεωμετρικών σχημάτων στην ευθεία, στο επίπεδο και στον χώρο, αντιστοίχως. Τέτοια σχήματα είναι τα ευθύγραμμα τμήματα, τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα και τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα και οι πεπερασμένες ενώσεις τους.

Ορισμός. Το μήκος ενός ευθύγραμμου τμήματος $[a,b]$ στον $\mathbb{R}$ είναι ο αριθμός

$$L\big([a,b]\big) = b-a.$$

Το ίδιο μήκος έχουν και τα ευθύγραμμα τμήματα $[a,b)$, $(a,b]$ και (a,b). Το $[a,b]$ χαρακτηρίζεται *κλειστό* ευθύγραμμο τμήμα και το (a,b) χαρακτηρίζεται *ανοικτό* ευθύγραμμο τμήμα.
Το εμβαδό ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου $[a,b]\times[a',b']$ στον $\mathbb{R}^2$ είναι ο αριθμός

$$A\big([a,b]\times[a',b']\big) = (b-a)(b'-a').$$

Το ίδιο εμβαδό έχουν και τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που προκύπτουν από το $[a,b]\times[a',b']$ με αντικατάσταση του $[a,b]$ με ένα από τα $[a,b)$, $(a,b]$ και (a,b) ή με αντικατάσταση του $[a',b']$ με ένα από τα $[a',b')$, $(a',b']$ και (a',b'). Το $[a,b]\times[a',b']$ χαρακτηρίζεται *κλειστό* ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και το $(a,b)\times(a',b')$ χαρακτηρίζεται *ανοικτό* ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
Ο όγκος ενός ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου $[a,b]\times[a',b']\times[a'',b'']$ στον $\mathbb{R}^3$ είναι ο αριθμός

$$V\big([a,b]\times[a',b']\times[a'',b'']\big) = (b-a)(b'-a')(b''-a'').$$

Τον ίδιο όγκο έχουν και τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα που προκύπτουν από το $[a,b]\times[a',b']\times[a'',b'']$ με αντικατάσταση του $[a,b]$ με ένα από τα $[a,b)$, $(a,b]$ και (a,b) ή με αντικατάσταση του $[a',b']$ με ένα από τα $[a',b')$, $(a',b']$ και (a',b') ή με αντικατάσταση του $[a'',b'']$ με ένα από τα $[a'',b'')$, $(a'',b'']$ και (a'',b''). Το $[a,b]\times[a',b']\times[a'',b'']$ χαρακτηρίζεται *κλειστό* ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και το $(a,b)\times(a',b')\times(a'',b'')$ χαρακτηρίζεται *ανοικτό* ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Ορισμός. Στη γενική περίπτωση του $\mathbb{R}^d$ θα χαρακτηρίζουμε **(d-διάστατο) διάστημα** το καρτεσιανό γινόμενο

$$[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]$$

καθώς και όσα άλλα προκύπτουν από αυτό με αντικατάσταση ενός ή περισσοτέρων από τα $[a_k,b_k]$ με ένα από τα $[a_k,b_k)$, $(a_k,b_k]$ και (a_k,b_k). Το $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]$ χαρακτηρίζεται *κλειστό* διάστημα και το $(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_d,b_d)$ χαρακτηρίζεται *ανοικτό* διάστημα. Κάθε δυο τέτοια διαστήματα θα τα χαρακτηρίζουμε, για συντομία, *παρεμφερή*. Ο **(d-διάστατος) όγκος** του $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]$ ορίζεται να είναι ο αριθμός

$$V_d\big([a_1,b_1]\times\cdots\times[a_d,b_d]\big) = (b_1-a_1)\cdots(b_d-a_d).$$

Τον ίδιο (d-διάστατο) όγκο έχουν και όλα τα υπόλοιπα παρεμφερή με αυτό διαστήματα.

Επομένως, ο μονοδιάστατος όγκος είναι το μήκος, ο διδιάστατος όγκος είναι το εμβαδό και ο τριδιάστατος όγκος είναι ο όγκος.

Β. Στο μάθημα αυτό θα περιγράψουμε μια γενίκευση της έννοιας του (d-διάστατου) όγκου. Θα δούμε, δηλαδή, έναν μεθοδικό τρόπο να *μετράμε* όσο το δυνατό περισσότερα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται κάποιες προϋποθέσεις που φαίνονται λογικές βάσει της εμπειρίας και των - θεωρητικών και πρακτικών - αναγκών μας. Πιο συγκεκριμένα, θα θέλαμε να έχουμε μια **συνάρτηση** m_d η οποία να εφαρμόζεται σε κάποια **οικογένεια** $\mathcal{L}_d$ **υποσυνόλων** του $\mathbb{R}^d$ έτσι ώστε η οικογένεια $\mathcal{L}_d$ να είναι όσο το δυνατό μεγαλύτερη και να περιέχει τουλάχιστον όλα τα διαστήματα στον $\mathbb{R}^d$, η συνάρτηση m_d να αντιστοιχίζει σε κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ το οποίο ανήκει στην $\mathcal{L}_d$ έναν μη αρνητικό αριθμό ή το $+\infty$, δηλαδή να είναι

$$0 \leq m_d(E) \leq +\infty$$

για κάθε E στην $\mathcal{L}_d$, και να ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(1) Για κάθε $E_1, E_2, \ldots$ που ανήκουν στην οικογένεια $\mathcal{L}_d$ και τα οποία είναι ανα δύο ξένα να συνεπάγεται ότι και η ένωση $E_1 \cup E_2 \cup \cdots$ ανήκει στην $\mathcal{L}_d$ και, επιπλέον,

$$m_d(E_1 \cup E_2 \cup \cdots) = m_d(E_1) + m_d(E_2) + \cdots .$$

Πρέπει να πούμε ότι το πλήθος των παραπάνω συνόλων είναι είτε πεπερασμένο είτε άπειρο αριθμήσιμο.

(2) Για κάθε E στην $\mathcal{L}_d$ και για κάθε F που προκύπτει από το E με οποιαδήποτε μετακίνηση να συνεπάγεται ότι και το F ανήκει στην $\mathcal{L}_d$ και να είναι

$$m_d(F) = m_d(E).$$

(3) Για κάθε διάστημα I στον $\mathbb{R}^d$ να είναι

$$m_d(I) = V_d(I).$$

Τα σύνολα που ανήκουν στην $\mathcal{L}_d$ θα είναι αυτά που μπορούν να μετρηθούν, δηλαδή τα **μετρήσιμα υποσύνολα** του $\mathbb{R}^d$, και η συνάρτηση m_d θα είναι το **μέτρο** με το οποίο μετράμε τα στοιχεία της $\mathcal{L}_d$. Για κάθε E στην $\mathcal{L}_d$ το $m_d(E)$ θα ονομάζεται **το μέτρο του** E.

Σχόλιο. Οι επόμενες υποενότητες, Γ και Δ, περιγράφουν μόνο και αιτιολογούν κάποιους *εγγενείς περιορισμούς* στη θεωρία μέτρησης που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια.

Γ. Τώρα προκύπτει το εξής ερώτημα:

Μπορεί να είναι κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ μετρήσιμο; Με άλλα λόγια, μπορεί να ανήκει κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ στην οικογένεια $\mathcal{L}_d$;

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό είναι *αρνητική* και θα τη μελετήσουμε στην ειδική περίπτωση του $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Πρόταση 1.1. *Υπάρχει υποσύνολο N του $[0,1]$ με τις εξής δυο ιδιότητες:*
(i) Για κάθε διαφορετικούς $x, y \in N$ ο αριθμός $x - y$ είναι άρρητος.
(ii) Για κάθε $z \in [0,1]$ υπάρχει κάποιος $x \in N$ ώστε ο $z - x$ να είναι ρητός.

Θα αποδείξουμε την Πρόταση 1.1 λίγο πιο μετά, αλλά προς το παρόν θα την αποδεχτούμε για να απαντήσουμε στο ερώτημα που μας απασχολεί. Υποθέτουμε - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμα, δηλαδή ότι σε όλα τα υποσύνολα E του $\mathbb{R}$ αντιστοιχεί ένα μέτρο $m_1(E)$.

Θεωρούμε μια οποιαδήποτε αρίθμηση $r_1, r_2, \dots$ του συνόλου των ρητών στο διάστημα $[-1,1]$, δηλαδή του συνόλου $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Κατόπιν, για κάθε τέτοιο ρητό r_n θεωρούμε τη *μεταφορά* του N κατά r_n:

$$N + r_n = \{x + r_n : x \in N\}.$$

Παρατηρούμε ότι

(a) $N + r_n \subseteq [-1,2]$ για κάθε n, οπότε $(N+r_1) \cup (N+r_2) \cup \cdots \subseteq [-1,2]$.

(b) Τα σύνολα $N + r_n$ $(n \in \mathbb{N})$ είναι ξένα ανά δύο.

(c) $[0,1] \subseteq (N+r_1) \cup (N+r_2) \cup \cdots$.

Η ιδιότητα (a) ισχύει διότι για κάθε $x \in N$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $x + r_n \leq 1 + 1 = 2$ και $x + r_n \geq 0 + (-1) = -1$. Για να αποδείξουμε την (b) ας υποθέσουμε ότι για κάποιους διαφορετικούς $n, m \in \mathbb{N}$ τα σύνολα $N + r_n$ και $N + r_m$ έχουν κάποιο κοινό στοιχείο. Αυτό το στοιχείο θα είναι της μορφής $x + r_n$ για κάποιον $x \in N$ και της μορφής $y + r_m$ για κάποιον $y \in N$. Τότε θα είναι $x + r_n = y + r_m$, οπότε ο $x - y = r_m - r_n$ είναι ρητός $\neq 0$ και αυτό αντιφάσκει με την ιδιότητα (i) του N. Για να αποδείξουμε την (c) θεωρούμε $z \in [0,1]$. Από την ιδιότητα (ii) του N συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in N$ ώστε ο $z - x$ να είναι ρητός. Όμως, είναι $z - x \leq 1 - 0 = 1$ και $z - x \geq 0 - 1 = -1$. Άρα ο ρητός $z - x$ ανήκει στο $[-1,1]$ και, επομένως, είναι ένας από τους ρητούς που έχουμε αριθμήσει. Δηλαδή, υπάρχει κάποιος $n \in \mathbb{N}$ ώστε να είναι $z - x = r_n$ ή, ισοδύναμα, $z = x + r_n$. Άρα ο z ανήκει στο $N + r_n$, οπότε ανήκει στην ένωση $(N+r_1) \cup (N+r_2) \cup \cdots$.

Επειδή κάθε $N + r_n$ προκύπτει από μετακίνηση του N, συνεπάγεται

$$m_1(N + r_n) = m_1(N)$$

για κάθε n. Επίσης, από την (b) συνεπάγεται

$$m_1\big((N+r_1) \cup (N+r_2) \cup \cdots\big) = m_1(N+r_1) + m_1(N+r_2) + \cdots = m_1(N) + m_1(N) + \cdots .$$

Μένει ακόμη κάτι: αν έχουμε δυο υποσύνολα E, F του $\mathbb{R}$ και είναι $E \subseteq F$, τότε συνεπάγεται ότι $m_1(E) \leq m_1(F)$. Πράγματι, γράφουμε $F = E \cup (F \setminus E)$ και, επειδή τα $E, F \setminus E$ είναι ξένα, συνεπάγεται ότι $m_1(F) = m_1(E) + m_1(F \setminus E) \geq m_1(E)$. Από αυτό και από την (a) συνεπάγεται

$$m_1\big((N+r_1) \cup (N+r_2) \cup \cdots\big) \leq m_1([-1,2]) = 3.$$

Επίσης, από την (c) συνεπάγεται

$$1 = m_1([0,1]) \leq m_1\big((N+r_1) \cup (N+r_2) \cup \cdots\big).$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, βρίσκουμε

$$1 \leq m_1(N) + m_1(N) + \cdots \leq 3.$$

Τώρα σκεφτόμαστε ότι όταν προσθέτουμε τον *ίδιο* μη αρνητικό αριθμό *άπειρες* φορές το αποτέλεσμα είναι πάντοτε είτε 0 είτε $+\infty$, ανάλογα με το αν ο αριθμός είναι 0 ή θετικός, αντιστοίχως. Άρα η τελευταία διπλή ανισότητα σημαίνει ότι καταλήξαμε σε άτοπο!

Απόδειξη της Πρότασης 1.1. Θεωρούμε την εξής σχέση στο σύνολο $[0,1]$:

$$x \sim y \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad \text{ο } x - y \text{ είναι ρητός.}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση αυτή είναι *σχέση ισοδυναμίας* στο $[0,1]$. Πράγματι για κάθε $x \in [0,1]$ ο $x - x = 0$ είναι ρητός, οπότε είναι $x \sim x$. Κατόπιν, αν $x \sim y$, τότε ο $x - y$ είναι ρητός, οπότε ο $y - x = -(x - y)$ είναι ρητός και, επομένως, είναι $y \sim x$. Τέλος, αν $x \sim y$ και $y \sim z$, τότε οι $x - y$ και $y - z$ είναι ρητοί, οπότε ο $x - z = (x - y) + (y - z)$ είναι ρητός και, επομένως, είναι $x \sim z$.
Τώρα, για κάθε $x \in [0,1]$ θεωρούμε την *κλάση ισοδυναμίας* του x, δηλαδή το υποσύνολο $[x]_\sim = \{y \in [0,1] : y \sim x\}$ του $[0,1]$. Επειδή είναι $x \sim x$, συνεπάγεται ότι $x \in [x]_\sim$. Άρα κάθε στοιχείο του $[0,1]$ ανήκει σε κάποια από τις κλάσεις ισοδυναμίας και, επομένως,
• *το $[0,1]$ είναι ίσο με την ένωση όλων των κλάσεων ισοδυναμίας.*
Κατόπιν, παρατηρούμε ότι
• *δυο οποιεσδήποτε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας είναι ξένες.*
Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας $[x]_\sim$ και $[y]_\sim$ δεν είναι ξένες, δηλαδή ότι υπάρχει κάποιος $z \in [x]_\sim \cap [y]_\sim$, και θα αποδείξουμε ότι είναι ίδιες. Είναι $z \sim x$ και $z \sim y$, οπότε είναι $x \sim z$ και $z \sim y$ και, επομένως, $x \sim y$. Τώρα, αν $w \in [x]_\sim$, συνεπάγεται $w \sim x$, οπότε $w \sim y$ και, επομένως, $w \in [y]_\sim$. Άρα είναι $[x]_\sim \subseteq [y]_\sim$. Με συμμετρικό τρόπο αποδεικνύεται ότι $[y]_\sim \subseteq [x]_\sim$ και καταλήγουμε στο ότι $[x]_\sim = [y]_\sim$.
Συνδυάζοντας τα δυο προηγούμενα αποτελέσματα για τις κλάσεις ισοδυναμίας, συμπεραίνουμε ότι το $[0,1]$ χωρίζεται ολόκληρο σε ξένα ανά δύο σύνολα: τις διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας.
Ορίζουμε, τέλος, ένα σύνολο N παίρνοντας ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε μια από τις παραπάνω ξένες ανά δύο κλάσεις ισοδυναμίας. Θα ελέγξουμε ότι το N έχει τις ιδιότητες (i) και (ii).
(i) Αν $x, y \in N$, τότε οι x, y ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας, οπότε η σχέση $x \sim y$ δεν ισχύει και, επομένως, ο $x - y$ είναι άρρητος. Διότι, αν ίσχυε η $x \sim y$, τότε $x \in [y]_\sim$ και, επειδή, προφανώς, $y \in [y]_\sim$, συνεπάγεται ότι οι x, y ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.
(ii) Έστω $z \in [0,1]$. Επειδή το N έχει ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας, υπάρχει κάποιος $x \in N$ ο οποίος περιέχεται στην $[z]_\sim$. Συνεπάγεται $x \sim z$, δηλαδή $z \sim x$, οπότε ο $z - x$ είναι ρητός. $\square$

Σχόλιο. Στην απόδειξη της Πρότασης 1.1 χρησιμοποιήθηκε το **Αξίωμα Επιλογής** από τη Θεωρία Συνόλων: *Αν έχουμε μια οικογένεια συνόλων, τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο παίρνοντας ως στοιχεία του ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε σύνολο που ανήκει στην οικογένεια αυτή.*

Δ. Υπάρχει ένα ακόμη ερώτημα παρόμοιο με το προηγούμενο:

Μπορεί να είναι όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ μετρήσιμα αν αντικαταστήσουμε την ιδιότητα (1) που πρέπει να έχει το μέτρο m_d με την παρακάτω ασθενέστερη ιδιότητα $(1')$;

$(1')$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $E_1, \ldots, E_n$ που ανήκουν στην οικογένεια $\mathcal{L}_d$ και τα οποία είναι ανα δύο ξένα να συνεπάγεται ότι και η ένωση $E_1 \cup \cdots \cup E_n$ ανήκει στην $\mathcal{L}_d$ και, επιπλέον,

$$m_d(E_1 \cup \cdots \cup E_n) = m_d(E_1) + \cdots + m_d(E_n).$$

Το ότι η απάντηση είναι και πάλι *αρνητική* για διαστάσεις $d \geq 3$ προκύπτει από το εξής παράδοξο αποτέλεσμα.

Θεώρημα των Banach - Tarski. *Έστω $d \geq 3$ και δυο οποιεσδήποτε μπάλες B, B' στον $\mathbb{R}^d$. Τότε υπάρχουν ανά δύο ξένα σύνολα $E_1, \ldots, E_m$ και ανά δύο ξένα σύνολα $E_1{}', \ldots, E_m{}'$ έτσι ώστε να είναι $E_1 \cup \cdots \cup E_m = B$ και $E_1{}' \cup \cdots \cup E_m{}' = B'$ και για κάθε k το $E_k{}'$ να προκύπτει με κάποια μετακίνηση από το E_k.*

Ας αποδεχτούμε αυτό το Θεώρημα των Banach - Tarski και ας υποθέσουμε ότι κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο και ότι το m_d έχει τις ιδιότητες $(1'), (2)$ και (3). Θεωρούμε μια μπάλα B

η οποία περιέχει ως υποσύνολό της ένα μεγάλο διάστημα I με $m_d(I) = V_d(I) = 5$, οπότε θα είναι $m_d(B) \geq m_d(I) = 5$. Επίσης, θεωρούμε μια μπάλα B' η οποία είναι υποσύνολο ενός διαστήματος J με $m_d(J) = V_d(J) = 4$, οπότε θα είναι $m_d(B') \leq m_d(J) = 4$. Κατόπιν, από τις μπάλες B, B' προκύπτουν τα σύνολα $E_1, \ldots, E_m$ και ${E_1}', \ldots, {E_m}'$ που αναφέρονται στο Θεώρημα των Banach - Tarski. Συνεπάγεται ότι

$$5 \leq m_d(B) = m_d(E_1) + \cdots + m_d(E_m) = m_d({E_1}') + \cdots + m_d({E_m}') = m_d(B') \leq 4$$

και καταλήγουμε σε άτοπο.

Ασκήσεις.

1. Έστω N ένα οποιοδήποτε σύνολο με τις ιδιότητες (i) και (ii) της Πρότασης 1.1. Είναι δυνατό να υπάρχουν, για τον ίδιο $z \in [0,1]$, δυο διαφορετικοί $x \in N$ ώστε ο $z - x$ να είναι ρητός; Μπορεί ένα σύνολο N με τις ιδιότητες (i) και (ii) της Πρότασης 1.1 να είναι αριθμήσιμο; Υπόδειξη: Υποθέστε ότι είναι δυνατό, θεωρήστε μια αρίθμηση του N και, βάσει του (ii) και του πρώτου μέρους της άσκησης, βρείτε μια αρίθμηση του $[0,1]$.

2. Αποδείξτε ότι υπάρχει $N \subseteq \mathbb{R}$ με τις εξής δυο ιδιότητες:
   (i) Για κάθε διαφορετικούς $x, y \in N$ ο αριθμός $x - y$ είναι άρρητος.
   (ii) Για κάθε $z \in \mathbb{R}$ υπάρχει κάποιος $x \in N$ ώστε ο $z - x$ να είναι ρητός.
   Υπόδειξη: Μιμηθείτε την κατασκευή του N που υπάρχει στις σημειώσεις χωρίς να περιοριστείτε στο $[0,1]$.

Κεφάλαιο 2

Το μέτρο Lebesgue.

2.1 Όγκοι διαστημάτων.

Ο όγκος ενός κλειστού διαστήματος $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ στον $\mathbb{R}^d$ είναι, όπως έχουμε ορίσει, ο αριθμός

$$V_d\big([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]\big) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d).$$

Τον ίδιο όγκο έχουν και τα υπόλοιπα παρεμφερή με το $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ διαστήματα και, ειδικώτερα, το ανοικτό διάστημα $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_d, b_d)$.

Τα $[a_1, b_1], \ldots, [a_d, b_d]$ είναι οι κάθετες προβολές του I στους κύριους άξονες του $\mathbb{R}^d$. Το I έχει δυο **πλευρές** κάθετες στον x_k-άξονα: την

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times \{a_k\} \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \cdots \times [a_d, b_d]$$

και την

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{k-1}, b_{k-1}] \times \{b_k\} \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \times \cdots \times [a_d, b_d].$$

Η πρώτη πλευρά αποτελείται από τα σημεία του I που έχουν k-οστή συντεταγμένη $x_k = a_k$ και η δεύτερη πλευρά αποτελείται από τα σημεία του I που έχουν k-οστή συντεταγμένη $x_k = b_k$. Δηλαδή, η πρώτη πλευρά είναι υποσύνολο του υπερεπιπέδου που είναι κάθετο στον x_k-άξονα και ορίζεται από την εξίσωση $x_k = a_k$ και η δεύτερη πλευρά είναι υποσύνολο του υπερεπιπέδου που είναι κάθετο στον x_k-άξονα και ορίζεται από την εξίσωση $x_k = b_k$.

Όλα τα παρεμφερή με το I διαστήματα έχουν ακριβώς τις ίδιες πλευρές - έστω κι αν δεν τους ανήκουν τα σημεία κάποιων πλευρών τους. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι κάθε διάστημα έχει $2d$ πλευρές και ότι βρίσκεται ανάμεσα σε $2d$ υπερεπίπεδα.

Ορισμός. Τα σημεία του διαστήματος I που δεν ανήκουν σε καμιά από τις πλευρές του είναι τα λεγόμενα **εσωτερικά** σημεία του I και είναι προφανές ότι, με τα παραπάνω σύμβολα, το $x = (x_1, \ldots, x_d)$ είναι εσωτερικό σημείο του I αν και μόνο αν είναι $a_k < x_k < b_k$ για κάθε k. Τα σημεία που ανήκουν στις πλευρές του I χαρακτηρίζονται **συνοριακά** σημεία του I.

Στον $\mathbb{R}^1$, οι πλευρές του $I = [a_1, b_1]$ είναι τα μονοσύνολα $\{a_1\}$ και $\{b_1\}$, δηλαδή τα άκρα του.

Στον $\mathbb{R}^2$, οι πλευρές του $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ είναι τα ευθύγραμμα τμήματα $\{a_1\} \times [a_2, b_2]$ και $\{b_1\} \times [a_2, b_2]$ που είναι υποσύνολα των υπερεπιπέδων, δηλαδή των *ευθειών*, με εξισώσεις $x_1 = a_1$ και $x_1 = b_1$, αντιστοίχως, που είναι κάθετες στον x_1-άξονα και τα ευθύγραμμα τμήματα $[a_1, b_1] \times \{a_2\}$ και $[a_1, b_1] \times \{b_2\}$ που είναι υποσύνολα των υπερεπιπέδων, δηλαδή των ευθειών, με εξισώσεις $x_2 = a_2$ και $x_2 = b_2$, αντιστοίχως, που είναι κάθετες στον x_2-άξονα.

Στον $\mathbb{R}^3$, οι πλευρές του $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ είναι τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα $\{a_1\} \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ και $\{b_1\} \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ που είναι υποσύνολα των υπερεπιπέδων, δηλαδή των *επιπέδων*, με εξισώσεις $x_1 = a_1$ και $x_1 = b_1$, αντιστοίχως, που είναι κάθετα στον x_1-άξονα, τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα $[a_1, b_1] \times \{a_2\} \times [a_3, b_3]$ και $[a_1, b_1] \times \{b_2\} \times [a_3, b_3]$ που είναι υποσύνολα των υπερεπιπέδων, δηλαδή των επιπέδων, με εξισώσεις $x_2 = a_2$ και $x_2 = b_2$, αντιστοίχως, που είναι κάθετα στον x_2-άξονα και τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \{a_3\}$ και $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \{b_3\}$ που είναι υποσύνολα των υπερεπιπέδων, δηλαδή επιπέδων, με εξισώσεις $x_3 = a_3$ και $x_3 = b_3$, αντιστοίχως, που είναι κάθετα στον x_3-άξονα.

Μετά από αυτά τα προκαταρκτικά για τον συμβολισμό και την ορολογία θα προχωρήσουμε σε κάποια βασικά αποτελέσματα για όγκους διαστημάτων.

Το πρώτο αποτέλεσμα που είναι αρκετά απλό για να καταχωρηθεί ως λήμμα ή πρόταση είναι το εξής. Αν I, I' είναι δυο διαστήματα στον $\mathbb{R}^d$ και είναι $I \subseteq I'$, τότε είναι $V_d(I) \leq V_d(I')$. Πράγματι, αν $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ και $I' = [a_1{}', b_1{}'] \times \cdots \times [a_d{}', b_d{}']$, τότε η σχέση $I \subseteq I'$ σημαίνει ότι είναι $a_k{}' \leq a_k \leq b_k \leq b_k{}'$, οπότε $0 \leq b_k - a_k \leq b_k{}' - a_k{}'$ για κάθε k και, επομένως,

$$V_d(I) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d) \leq (b_1{}' - a_1{}') \cdots (b_d{}' - a_d{}') = V_d(I').$$

Αν ένα ή και τα δυο από τα I, I' δεν είναι κλειστά διαστήματα, τότε τα *κλείνουμε* παίρνοντας τα αντίστοιχα παρεμφερή κλειστά διαστήματα $\overline{I}$ και $\overline{I'}$ - φυσικά, αν το I είναι κλειστό, τότε $\overline{I} = I$ και το ίδιο ισχύει για το I'. Παρατηρούμε, τώρα, ότι από τη σχέση $I \subseteq I'$ συνεπάγεται η $\overline{I} \subseteq \overline{I'}$, οπότε, έχοντας αποδείξει ότι $V_d(\overline{I}) \leq V_d(\overline{I'})$ για τα κλειστά διαστήματα, βρίσκουμε ότι

$$V_d(I) = V_d(\overline{I}) \leq V_d(\overline{I'}) = V_d(I').$$

Σχόλιο. Αυτό το τέχνασμα με το *κλείσιμο* των διαστημάτων είναι πολύ χρήσιμο όταν κάνουμε διάφορες αποδείξεις με όγκους (και όχι μόνο) διαστημάτων και δε θέλουμε να διακρίνουμε όλες τις περιπτώσεις για τον τύπο των διαστημάτων. Όπως είδαμε, το τέχνασμα βασίζεται στο ότι ένα οποιοδήποτε διάστημα έχει τον ίδιο όγκο με το παρεμφερές προς αυτό κλειστό διάστημα καθώς και στο ότι, αν ένα διάστημα είναι υποσύνολο ενός άλλου διαστήματος, τότε την ίδια σχέση έχουν και τα παρεμφερή προς αυτά κλειστά διαστήματα.

Σχόλιο. Αν και όσα θα πούμε παρακάτω είναι, ουσιαστικά, πολύ απλά, είναι πολύ δύσκολο να προχωρήσει κάποιος που τα βλέπει για πρώτη φορά αν δεν αποκτήσει πολύ καλή γεωμετρική εποπτεία με σχήματα και εικόνες. Γι αυτό η συμβουλή είναι: *να σχεδιάζετε στο χαρτί όλα όσα διαβάζετε, περιοριζόμενοι στις ειδικές περιπτώσεις των διαστάσεων* $d = 1$ *και* $d = 2$. Τα σχήματα στην περίπτωση $d = 3$ είναι δύσκολα και για $d \geq 4$ είναι, απλώς, αδύνατα. Θα δείτε ότι όσα λέμε είναι εξαιρετικά απλά όταν εξειδικευτούν στη διάσταση $d = 1$, ενώ στην διάσταση $d = 2$ είναι πια εμφανείς οι συνδυαστικές δυσκολίες - που χειροτερεύουν στις μεγαλύτερες διαστάσεις. Στα πλαίσια αυτού του προπτυχιακού μαθήματος, να θεωρήσετε ότι έχετε κατανοήσει αυτά που θα μάθουμε αν τα έχετε κατανοήσει στις διαστάσεις $d = 1$ και $d = 2$. Στο τέλος θα διαπιστώσετε ότι έχετε κατανοήσει τα πάντα και για $d = 3$ αν όχι και για $d \geq 4$.

Ορισμός. Αν I, J είναι δυο διαστήματα στον $\mathbb{R}^d$, θα τα χαρακτηρίζουμε **σχεδόν ξένα** αν δεν έχουν κανένα κοινό εσωτερικό τους σημείο ή, με άλλα λόγια, αν τα μόνα πιθανά κοινά τους σημεία είναι σημεία των πλευρών τους.

Φυσικά, αν τα I, J είναι ξένα, τότε είναι και σχεδόν ξένα.

Λήμμα 2.1. *Έστω* $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ *ένα κλειστό διάστημα. Σε κάθε* $[a_k, b_k]$ *θεωρούμε διαιρετικά σημεία* $x_k^{(0)} = a_k < x_k^{(1)} < \cdots < x_k^{(n_k - 1)} < x_k^{(n_k)} = b_k$ *τα οποία χωρίζουν το* $[a_k, b_k]$ *σε* n_k *υποδιαστήματα - φυσικά, αν* $n_k = 1$, *τότε το* $[a_k, b_k]$ *δε χωρίζεται. Αν για κάθε* k *θεωρήσουμε ένα από αυτά τα υποδιαστήματα στον αντίστοιχο* x_k*-άξονα, τότε ορίζεται ένα κλειστό διάστημα στον*

$\mathbb{R}^d$ *το οποίο είναι υποσύνολο του* I. *Πιο συγκεκριμένα, αν για κάθε* k *πάρουμε έναν* i_k *από τους* $1, \dots, n_k$ *και θεωρήσουμε το αντίστοιχο* $[x_k^{(i_k-1)}, x_k^{(i_k)}]$, *τότε σχηματίζεται το κλειστό διάστημα*

$$I_{i_1,\dots,i_k,\dots,i_d} = [x_1^{(i_1-1)}, x_1^{(i_1)}] \times \cdots \times [x_k^{(i_k-1)}, x_k^{(i_k)}] \times \cdots \times [x_d^{(i_d-1)}, x_d^{(i_d)}].$$

Έτσι σχηματίζονται $n_1 \cdots n_k \cdots n_d$ *κλειστά υποδιαστήματα* $I_{i_1,\dots,i_k,\dots,i_d}$ *του* I. *Τα διαστήματα αυτά είναι σχεδόν ξένα ανά δύο και η ένωσή τους ισούται με το* I. *Επίσης, ισχύει*

$$V_d(I) = \sum_{1 \le i_1 \le n_1, \dots, 1 \le i_k \le n_k, \dots, 1 \le i_d \le n_d} V_d(I_{i_1,\dots,i_k,\dots,i_d}).$$

Δηλαδή, ο όγκος του I *είναι ίσος με το άθροισμα των όγκων όλων αυτών των υποδιαστημάτων.*

Απόδειξη. Είναι

$$\begin{aligned} V_d(I_{i_1,\dots,i_k,\dots,i_d}) &= (x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)}) \times \cdots \times (x_k^{(i_k)} - x_k^{(i_k-1)}) \times \cdots \times (x_d^{(i_d)} - x_d^{(i_d)}) \\ &= l_1^{(i_1)} \cdots l_k^{(i_k)} \cdots l_d^{(i_d)}, \end{aligned}$$

όπου, για συντομία, συμβολίσαμε $l_k^{(i_k)}$ το μήκος του $[x_k^{(i_k-1)}, x_k^{(i_k)}]$. Επομένως,

$$\sum_{1 \le i_1 \le n_1, \dots, 1 \le i_k \le n_k, \dots, 1 \le i_d \le n_d} V_d(I_{i_1,\dots,i_k,\dots,i_d}) = \sum_{1 \le i_1 \le n_1, \dots, 1 \le i_k \le n_k, \dots, 1 \le i_d \le n_d} l_1^{(i_1)} \cdots l_k^{(i_k)} \cdots l_d^{(i_d)}.$$

Το τελευταίο άθροισμα είναι το άθροισμα όλων των γινομένων που σχηματίζονται επιλέγοντας έναν από τους $l_1^{(1)}, \dots, l_1^{(n_1)}$ (τον$l_1^{(i_1)}$), ... , έναν από τους $l_k^{(1)}, \dots, l_k^{(n_k)}$ (τον$l_k^{(i_k)}$), ... , έναν από τους $l_d^{(1)}, \dots, l_d^{(n_d)}$ (τον$l_d^{(i_d)}$). Βάσει της απλής επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού και της πρόσθεσης συνεπάγεται ότι το άθροισμα αυτό είναι ίσο με το γινόμενο των αθροισμάτων $l_1^{(1)} + \cdots + l_1^{(n_1)}, \dots, l_k^{(1)} + \cdots + l_k^{(n_k)}, \dots, l_1^{(d)} + \cdots + l_d^{(n_d)}$. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \le i_1 \le n_1, \dots, 1 \le i_k \le n_k, \dots, 1 \le i_d \le n_d} l_1^{(i_1)} \cdots l_k^{(i_k)} \cdots l_d^{(i_d)} \\ &\qquad = (l_1^{(1)} + \cdots + l_1^{(n_1)}) \cdots (l_k^{(1)} + \cdots + l_k^{(n_k)}) \cdots (l_1^{(d)} + \cdots + l_d^{(n_d)}). \end{aligned}$$

Βλέπουμε, όμως, ότι για κάθε k το άθροισμα $l_k^{(1)} + \cdots + l_k^{(n_k)}$ δεν είναι άλλο από το άθροισμα των μηκών των υποδιαστημάτων στα οποία χωρίζεται το $[a_k, b_k]$ από τα διαιρετικά του σημεία και, επομένως, το άθροισμα αυτό είναι ίσο με το μήκος του $[a_k, b_k]$, δηλαδή ίσο με $b_k - a_k$. Άρα

$$(l_1^{(1)} + \cdots + l_1^{(n_1)}) \cdots (l_k^{(1)} + \cdots + l_k^{(n_k)}) \cdots (l_1^{(d)} + \cdots + l_d^{(n_d)}) =$$

$$= (b_1 - a_1) \cdots (b_k - a_k) \cdots (b_d - a_d).$$

Τέλος, συγκεντρώνοντας όλες τις μέχρι τώρα ισότητες, καταλήγουμε στο

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \le i_1 \le n_1, \dots, 1 \le i_k \le n_k, \dots, 1 \le i_d \le n_d} V_d(I_{i_1,\dots,i_k,\dots,i_d}) \\ &\qquad = (b_1 - a_1) \cdots (b_k - a_k) \cdots (b_d - a_d) = V_d(I). \end{aligned}$$

□

Στο Λήμμα 2.1 περιγράφεται ένας πολύ ειδικός χωρισμός ενός κλειστού διαστήματος σε κλειστά υποδιαστήματα τον οποίο μπορούμε να περιγράψουμε και ως εξής. Για κάθε x_k-άξονα, εκτός από τα δυο κάθετα προς αυτόν υπερεπίπεδα με εξισώσεις $x_k = a_k$ και $x_k = b_k$ τα οποία περιέχουν τις αντίστοιχες πλευρές του διαστήματος I, θεωρούμε και κάποια ενδιάμεσα παράλληλα υπερεπίπεδα με εξισώσεις $x_k = x_k^{(1)}, \ldots, x_k = x_k^{(n_k-1)}$. Από όλα αυτά τα υπερεπίπεδα σχηματίζονται διάφορα κλειστά υποδιαστήματα του I έτσι ώστε (i) οι παράλληλες πλευρές καθενός από αυτά τα υποδιαστήματα να περιέχονται σε διαδοχικά παράλληλα υπερεπίπεδα και (ii) κανένα από τα υπερεπίπεδα να μην τέμνει το εσωτερικό κανενός από τα υποδιαστήματα.

Όταν θα λέμε ότι *χωρίζουμε ένα κλειστό υποδιάστημα* I *σε κλειστά υποδιαστήματα με υπερεπίπεδα κάθετα στους κύριους άξονες*, θα εννοούμε ακριβώς αυτό που μόλις περιγράψαμε, δηλαδή αυτό που περιγράφεται στο Λήμμα 2.1. Έτσι, το Λήμμα 2.1 διατυπώνεται ως εξής.

Αν ένα κλειστό διάστημα χωριστεί σε κλειστά υποδιαστήματα με υπερεπίπεδα κάθετα στους κύριους άξονες, τότε το άθροισμα των όγκων όλων των υποδιαστημάτων που σχηματίζονται είναι ίσο με τον όγκο του διαστήματος.

Το Λήμμα 2.2 που ακολουθεί αποτελεί γενίκευση του Λήμματος 2.1.

Λήμμα 2.2. *Έστω κλειστά διαστήματα* I *και* $I_1, \ldots, I_n$ *στον* $\mathbb{R}^d$ *τέτοια ώστε τα* $I_1, \ldots, I_n$ *να είναι σχεδόν ξένα ανά δύο και* $I = I_1 \cup \cdots \cup I_n$. *Τότε είναι*

$$V_d(I) = V_d(I_1) + \cdots + V_d(I_n).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε όλα τα υπερεπίπεδα που περιέχουν τις πλευρές όλων των διαστημάτων $I_1, \ldots, I_n$. Αυτά τα υπερεπίπεδα είναι κάθετα στους κύριους άξονες του $\mathbb{R}^d$ και χωρίζουν το I αλλά και καθένα από τα $I_1, \ldots, I_n$ σε κλειστά υποδιαστήματα, όπως περιγράψαμε μετά από το Λήμμα 2.1. Ας συμβολίσουμε, για κάθε k, τα κλειστά υποδιαστήματα στα οποία χωρίζεται το I_k με $I_k^{(1)}, \ldots, I_k^{(m_k)}$. Αυτό, φυσικά, σημαίνει ότι το I χωρίζεται από τα υπερεπίπεδα στα κλειστά υποδιαστήματα $I_1^{(1)}, \ldots, I_1^{(m_1)}, \ldots, I_k^{(1)}, \ldots, I_k^{(m_k)}, \ldots, I_n^{(1)}, \ldots, I_n^{(m_n)}$. Κατ' αρχάς εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.1 στο I και, κατόπιν, αφού ομαδοποιήσουμε τα διάφορα υποδιαστήματα βάζοντας στην ίδια ομάδα τα υποδιαστήματα που περιέχονται στο ίδιο υποδιάστημα από τα $I_1, \ldots, I_n$, εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.1 σε καθένα από αυτά τα $I_1, \ldots, I_n$. Έτσι, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} V_d(I) &= \big(V_d(I_1^{(1)}) + \cdots + V_d(I_1^{(m_1)}\big) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \big(V_d(I_k^{(1)}) + \cdots + V_d(I_k^{(m_k)})\big) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \big(V_d(I_n^{(1)}) + \cdots + V_d(I_n^{(m_n)})\big) \\ &= V_d(I_1) + \cdots + V_d(I_k) + \cdots + V_d(I_n). \end{aligned}$$

□

Λήμμα 2.3. *Έστω κλειστά διαστήματα* I *και* $I_1, \ldots, I_n$ *στον* $\mathbb{R}^d$ *τέτοια ώστε τα* $I_1, \ldots, I_n$ *να είναι σχεδόν ξένα ανά δύο και* $I_1 \cup \cdots \cup I_n \subseteq I$. *Τότε είναι*

$$V_d(I_1) + \cdots + V_d(I_n) \leq V_d(I).$$

Απόδειξη. Όπως κάναμε και στην απόδειξη του Λήμματος 2.2, θεωρούμε όλα τα υπερεπίπεδα που περιέχουν τις πλευρές όλων των διαστημάτων $I_1, \ldots, I_n$. Αυτά τα υπερεπίπεδα είναι κάθετα στους κύριους άξονες του $\mathbb{R}^d$ και χωρίζουν το I αλλά και καθένα από τα $I_1, \ldots, I_n$ σε κλειστά υποδιαστήματα. Όταν ομαδοποιήσουμε αυτά τα υποδιαστήματα, παίρνουμε αυτά που περιέχονται στα $I_1, \ldots, I_n$ αλλά υπάρχουν και κάποια τα οποία δεν περιέχονται σε κανένα από τα $I_1, \ldots, I_n$. Αυτό συμβαίνει διότι η ένωση $I_1 \cup \cdots \cup I_n$ μπορεί να μην είναι ίση με ολόκληρο το I. Αν συμβολίσουμε $J_1, \ldots, J_m$ αυτά ακριβώς τα υποδιαστήματα που δεν περιέχονται σε κανένα από τα $I_1, \ldots, I_n$, τότε, προφανώς, όλα μαζί τα $I_1, \ldots, I_n, J_1, \ldots, J_m$ είναι σχεδόν ξένα ανά δύο και η ένωσή τους ισούται με το I. Άρα, σύμφωνα με το Λήμμα 2.2, ισχύει

$$V_d(I) = V_d(I_1) + \cdots + V_d(I_n) + V_d(J_1) + \cdots + V_d(J_m) \geq V_d(I_1) + \cdots + V_d(I_n).$$

$\square$

Δείτε μια πολύ απλή ιδιότητα των διαστημάτων: *η τομή δυο διαστημάτων είναι κι αυτή διάστημα*. Πράγματι, αν $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ και $I' = [a_1', b_1'] \times \cdots \times [a_d', b_d']$, τότε για κάθε k ορίζουμε $a_k'' = \max\{a_k, a_k'\}$ και $b_k'' = \min\{b_k, b_k'\}$ και τότε είναι $I \cap I' = [a_1'', b_1''] \times \cdots \times [a_d'', b_d'']$.

Λήμμα 2.4. *Έστω κλειστά διαστήματα I και $I_1, \ldots, I_n$ στον $\mathbb{R}^d$ έτσι ώστε $I \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n$. Τότε είναι*

$$V_d(I) \leq V_d(I_1) + \cdots + V_d(I_n).$$

Απόδειξη. Τώρα, δεν υποθέτουμε ότι τα $I_1, \ldots, I_n$ είναι σχεδόν ξένα ανά δύο.
Θεωρούμε τα κλειστά διαστήματα $J_1 = I_1 \cap I, \ldots, J_n = I_n \cap I$ και παρατηρούμε ότι είναι $I = J_1 \cup \cdots \cup J_n$. Και πάλι: τα $J_1, \ldots, J_n$ μπορεί να μην είναι σχεδόν ξένα ανά δύο.
Θεωρούμε όλα τα υπερεπίπεδα που περιέχουν τις πλευρές όλων των διαστημάτων $J_1, \ldots, J_n$. Αυτά τα υπερεπίπεδα είναι κάθετα στους κύριους άξονες του $\mathbb{R}^d$ και χωρίζουν το I αλλά και καθένα από τα $J_1, \ldots, J_n$ σε κλειστά υποδιαστήματα. Όταν ομαδοποιήσουμε αυτά τα υποδιαστήματα, παίρνουμε αυτά που περιέχονται στα $J_1, \ldots, J_n$ αλλά, ακριβώς επειδή τα $J_1, \ldots, J_n$ μπορεί να μην είναι σχεδόν ξένα ανά δύο, μερικά από τα υποδιαστήματα μπορεί να περιέχονται σε *περισσότερα από ένα* από τα $J_1, \ldots, J_n$. Αν θεωρήσουμε τον όγκο κάθε υποδιαστήματος ακριβώς μια φορά, τότε το άθροισμά τους είναι ίσο με $V_d(I)$ ενώ, αν θεωρήσουμε τον όγκο κάθε υποδιαστήματος τόσες φορές όσο είναι το πλήθος των $J_1, \ldots, J_n$ στα οποία αυτό περιέχεται, τότε το άθροισμά τους είναι ίσο με $V_d(J_1) + \cdots + V_d(J_n)$. Άρα

$$V_d(I) \leq V_d(J_1) + \cdots + V_d(J_n)$$

και, επειδή είναι $J_k \subseteq I_k$ και, επομένως, $V_d(J_k) \leq V_d(I_k)$ για κάθε k, συνεπάγεται $V_d(I) \leq V_d(I_1) + \cdots + V_d(I_n)$. $\square$

Το Θεώρημα 2.1 αποτελεί γενίκευση του Λήμματος 2.3.

Θεώρημα 2.1. *Έστω διαστήματα I και $I_1, I_2, \ldots$ στον $\mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε τα $I_1, I_2, \ldots$ να είναι σχεδόν ξένα ανά δύο και $I_1 \cup I_2 \cup \cdots \subseteq I$. Τότε είναι*

$$V_d(I_1) + V_d(I_2) + \cdots \leq V_d(I).$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς υποθέτουμε ότι όλα τα διαστήματα είναι κλειστά. Τότε για κάθε n εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.3 και βρίσκουμε ότι $V_d(I_1) + \cdots + V_d(I_n) \leq V_d(I)$. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε n και ο αριθμός $V_d(I)$ δεν εξαρτάται από τον n, η σειρά $V_d(I_1) + V_d(I_2) + \cdots$ συγκλίνει και ισχύει $V_d(I_1) + V_d(I_2) + \cdots \leq V_d(I)$.
Στη γενική περίπτωση θεωρούμε τα κλειστά διαστήματα $\overline{I}$ και $\overline{I_1}, \overline{I_2}, \ldots$. Επειδή είναι $I_n \subseteq I$ και, επομένως, $\overline{I_n} \subseteq \overline{I}$ για κάθε n, συνεπάγεται $\overline{I_1} \cup \overline{I_2} \cup \cdots \subseteq \overline{I}$. Από το πρώτο μέρος συνεπάγεται ότι

$$V_d(\overline{I_1}) + V_d(\overline{I_2}) + \cdots \leq V_d(\overline{I})$$

και, επομένως, $V_d(I_1) + V_d(I_2) + \cdots \leq V_d(I)$. $\square$

Το Θεώρημα 2.2 αποτελεί γενίκευση του Λήμματος 2.4. Θα δούμε, όμως, ότι η απόδειξή του δεν είναι τόσο απλή όσο οι μέχρι τώρα αποδείξεις: εμπλέκει κάποια τοπολογική ιδιότητα του ευκλείδειου χώρου. Πριν από το Θεώρημα 2.2 ας δούμε μια ακόμη απλή ιδιότητα των διαστημάτων.

Λήμμα 2.5. *Έστω διάστημα I στον $\mathbb{R}^d$ και $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν κλειστό διάστημα $I' \subseteq I$ και ανοικτό διάστημα $I'' \supseteq I$ τέτοια ώστε να είναι*

$$V_d(I) - \epsilon < V_d(I') \leq V_d(I) \leq V_d(I'') < V_d(I) + \epsilon.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς οι ανισότητες $V_d(') \leq V_d(I) \leq V_d(I'')$ είναι προφανείς, όποια κι αν είναι τα $I' \subseteq I$ και $I'' \supseteq I$.
Πρώτη περίπτωση: Έστω ότι τα μήκη των προβολών του I στους κύριους άξονες είναι οι *θετικοί* αριθμοί $l_1, \ldots, l_d$, οπότε είναι $V_d(I) = l_1 \cdots l_d > 0$. Επειδή η συνάρτηση $y = (l_1 + x) \cdots (l_d + x)$ είναι συνεχής και, ειδικώτερα, συνεχής στον 0, υπάρχει θετικός αριθμός $\delta < \min\{l_1, \ldots, l_d\}$ ώστε να ισχύει

$$l_1 \cdots l_d - \epsilon < (l_1 - \delta) \cdots (l_d - \delta) < l_1 \cdots l_d < (l_1 + \delta) \cdots (l_d + \delta) < l_1 \cdots l_d + \epsilon.$$

Για κάθε k αντικαθιστούμε την προβολή του I στον x_k-άξονα, η οποία έχει μήκος l_k, με ένα *μικρότερο κλειστό* διάστημα το οποίο έχει μήκος $l_k - \delta$. Αυτά τα κλειστά διαστήματα, ένα σε κάθε κύριο άξονα, δημιουργούν ένα κλειστό διάστημα $I' \subseteq I$ του οποίου οι προβολές στους κύριους άξονες έχουν μήκη $l_1 - \delta, \ldots, l_d - \delta$. Άρα είναι

$$V_d(I') = (l_1 - \delta) \cdots (l_d - \delta) > l_1 \cdots l_d - \epsilon = V_d(I) - \epsilon.$$

Τέλος, για κάθε k αντικαθιστούμε την προβολή του I στον x_k-άξονα με ένα *μεγαλύτερο ανοικτό* διάστημα μήκους $l_k + \delta$. Αυτά τα νέα ανοικτά διαστήματα, ένα σε κάθε κύριο άξονα, δημιουργούν ένα ανοικτό διάστημα $I'' \supseteq I$ του οποίου οι προβολές στους κύριους άξονες έχουν μήκη $l_1 + \delta, \ldots, l_d + \delta$. Άρα είναι

$$V_d(I'') = (l_1 + \delta) \cdots (l_d + \delta) < l_1 \cdots l_d + \epsilon = V_d(I) + \epsilon.$$

Δεύτερη περίπτωση: Αν ένα τουλάχιστον από τα μήκη $l_1, \ldots, l_d$ είναι ίσο με 0, οπότε $V_d(I) = l_1 \cdots l_d = 0$, τότε η κατασκευή του μεγαλύτερου διαστήματος I'', όπως έγινε στην πρώτη περίπτωση, δεν αλλάζει. Όμως, όσα είπαμε για το μικρότερο διάστημα I' στην πρώτη περίπτωση δεν ισχύουν. Τώρα μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε σημείο x του I και να πάρουμε $I' = \{x\}$. Είναι προφανές ότι $I' \subseteq I$ και ότι η ανισότητα $V_d(I') > V_d(I) - \epsilon$ ισχύει, αφού γίνεται $0 > 0 - \epsilon$. □

Θεώρημα 2.2. *Έστω διαστήματα I και $I_1, I_2, \ldots$ στον $\mathbb{R}^d$ έτσι ώστε $I \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \cdots$. Τότε είναι*

$$V_d(I) \leq V_d(I_1) + V_d(I_2) + \cdots .$$

Απόδειξη. Αν είναι $V_d(I_1) + V_d(I_2) + \cdots = +\infty$, τότε το αποτέλεσμα είναι προφανές. Επομένως, ας υποθέσουμε ότι είναι $V_d(I_1) + V_d(I_2) + \cdots < +\infty$.
Θεωρούμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$. Υπάρχει *κλειστό* διάστημα $I' \subseteq I$ ώστε να είναι

$$V_d(I) - \epsilon < V_d(I')$$

και, για κάθε n, υπάρχει *ανοικτό* διάστημα $I_n'' \supseteq I_n$ ώστε να είναι

$$V_d(I_n'') < V_d(I_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Από τις σχέσεις $I' \subseteq I$, $I \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \cdots$ και $I_n \subseteq I_n''$ για κάθε n, συνεπάγεται

$$I' \subseteq I_1'' \cup I_2'' \cup \cdots .$$

Επειδή το I' είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, είναι *συμπαγές* (- αφού τελειώσει η απόδειξη δείτε την σημείωση παρακάτω -) και, επειδή τα I_n'' $(n \in \mathbb{N})$ είναι ανοικτά και καλύπτουν το I', συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος n ώστε να είναι

$$I' \subseteq I_1'' \cup \cdots \cup I_n''.$$

Από το Λήμμα 2.4 εφαρμοσμένο στα κλειστά διαστήματα I' και $\overline{I_1''}, \ldots, \overline{I_n''}$, για τα οποία, προφανώς, ισχύει $I' \subseteq \overline{I_1''} \cup \cdots \cup \overline{I_n''}$, συνεπάγεται

$$V_d(I') \leq V_d(\overline{I_1''}) + \cdots + V_d(\overline{I_n''}) = V_d(I_1'') + \cdots + V_d(I_n'').$$

Τώρα, έχουμε

$$V_d(I) - \epsilon < \left(V_d(I_1) + \frac{\epsilon}{2}\right) + \cdots + \left(V_d(I_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) < V_d(I_1) + V_d(I_2) + \cdots + \epsilon.$$

Θεωρώντας ότι $\epsilon \to 0+$, καταλήγουμε στην $V_d(I) \leq V_d(I_1) + V_d(I_2) + \cdots$. □

Θεώρημα 2.3. *Έστω διαστήματα I και $I_1, I_2, \ldots$ στον $\mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε τα $I_1, I_2, \ldots$ να είναι σχεδόν ξένα ανά δύο και $I_1 \cup I_2 \cup \cdots = I$. Τότε είναι*

$$V_d(I_1) + V_d(I_2) + \cdots = V_d(I).$$

Απόδειξη. Άμεσο πόρισμα των Θεωρημάτων 2.1 και 2.2. □

Σχόλιο. Όπως είχε προαναγγελθεί, στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2 χρησιμοποιήθηκε μια τοπολογική ιδιότητα του $\mathbb{R}^d$, δηλαδή το ότι *κάθε κλειστό και φραγμένο $E \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι συμπαγές*. Σύμφωνα με τον ορισμό της έννοιας της συμπάγειας, αυτό σημαίνει ότι, αν θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε οικογένεια ανοικτών συνόλων τα οποία καλύπτουν το E, τότε υπάρχουν πεπερασμένα από αυτά τα ανοικτά σύνολα τα οποία, επίσης, καλύπτουν το E.
Εμείς αυτήν την τοπολογική ιδιότητα τη χρησιμοποιήσαμε σε μια πολύ ειδική κατάσταση, όπου το κλειστό και φραγμένο σύνολο είναι ένα κλειστό διάστημα και τα ανοικτά σύνολα που το καλύπτουν είναι ανοικτά διαστήματα. Επειδή μπορεί να μην αισθανόμαστε άνετα με την έννοια της συμπάγειας, θα κάνουμε μια παράκαμψη για να δούμε μια απόδειξη για την ειδική περίπτωση. Μάλιστα, επειδή στην απόδειξη δεν θα παίξει κανένα ειδικό ρόλο το ότι τα ανοικτά σύνολα είναι ανοικτά διαστήματα, θα θεωρήσουμε την λίγο γενικότερη περίπτωση *κλειστού διαστήματος που καλύπτεται από ανοικτά σύνολα*.

Πρόταση 2.1. *Έστω κλειστό διάστημα I στον $\mathbb{R}^d$ και μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, τα οποία καλύπτουν το I, δηλαδή των οποίων η ένωση περιέχει ως υποσύνολο το I. Τότε υπάρχουν πεπερασμένα από τα ανοικτά σύνολα της ίδιας οικογένειας τα οποία, επίσης, καλύπτουν το I.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι *δεν υπάρχουν πεπερασμένα από τα ανοικτά σύνολα της οικογένειας τα οποία καλύπτουν το I.*
Θεωρούμε το μέσο κάθε προβολής του I στους κύριους άξονες και το αντίστοιχο υπερεπίπεδο που είναι κάθετο στον αντίστοιχο κύριο άξονα στο σημείο αυτό. Όλα αυτά τα d υπερεπίπεδα χωρίζουν το I σε 2^d κλειστά υποδιαστήματα τα οποία είναι όμοια με το I και είναι σχεδόν ξένα ανά δύο. Πιο συγκεκριμένα: τα μήκη των προβολών καθενός από αυτά τα υποδιαστήματα είναι τα μισά των μηκών των αντίστοιχων προβολών του I. Τώρα, σκεφτόμαστε ότι, αν καθένα από αυτά τα υποδιαστήματα μπορούσε να καλυφτεί από πεπερασμένα από τα ανοικτά σύνολα της οικογένειας, τότε και το I θα μπορούσε να καλυφτεί από πεπερασμένα από τα ανοικτά σύνολα της οικογένειας. Επομένως, υπάρχει κάποιο από τα υποδιαστήματα, ας το συμβολίσουμε I_1, το οποίο δε μπορεί να

καλυφτεί από πεπερασμένα από τα ανοικτά σύνολα της οικογένειας.
Τώρα, επαναλαμβάνουμε το ίδιο πράγμα με το I_1. Το χωρίζουμε σε 2^d κλειστά υποδιαστήματα έτσι ώστε τα μήκη των προβολών καθενός από αυτά τα υποδιαστήματα να είναι τα μισά των μηκών των αντίστοιχων προβολών του I_1 και παρατηρούμε ότι υπάρχει κάποιο από αυτά, ας το συμβολίσουμε I_2, το οποίο δε μπορεί να καλυφτεί από πεπερασμένα από τα ανοικτά σύνολα της οικογένειας.
Συνεχίζουμε έτσι επ' άπειρον και δημιουργούμε μια ακολουθία διαστημάτων $I, I_1, I_2, \ldots$ με τις εξής ιδιότητες. Αν $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ και $I_n = [a_1{}^{(n)}, b_1{}^{(n)}] \times \cdots \times [a_d{}^{(n)}, b_d{}^{(n)}]$ για κάθε n, τότε
(i) για κάθε $k = 1, \ldots, d$ ισχύει

$$a_k \leq a_k{}^{(1)} \leq \cdots \leq a_k{}^{(n)} \leq a_k{}^{(n+1)} \leq \cdots \leq b_k{}^{(n+1)} \leq b_k{}^{(n)} \leq \cdots \leq b_k{}^{(1)} \leq b_k$$

και

$$b_k{}^{(n)} - a_k{}^{(n)} = \frac{b_k - a_k}{2^n}.$$

(ii) Κάθε I_n δε μπορεί να καλυφτεί από πεπερασμένα από τα ανοικτά σύνολα της οικογένειας.
Από την (i) βλέπουμε ότι για κάθε k η ακολουθία $(a_k^{(n)})$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη, οπότε συγκλίνει, και ότι η ακολουθία $(b_k^{(n)})$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη, οπότε κι αυτή συγκλίνει. Από τη δεύτερη σχέση της (i) βλέπουμε αμέσως ότι $\lim a_k^{(n)} = \lim b_k^{(n)}$ και συμβολίζουμε το κοινό όριο x_k:

$$x_k = \lim a_k^{(n)} = \lim b_k^{(n)}.$$

Προφανώς, για κάθε k είναι

$$a_k \leq a_k{}^{(1)} \leq \cdots \leq a_k{}^{(n)} \leq \cdots \leq x_k \leq \cdots \leq b_k{}^{(n)} \leq \cdots \leq b_k{}^{(1)} \leq b_k.$$

Τώρα θεωρούμε το σημείο $x = (x_1, \ldots, x_d)$. Από τις τελευταίες ανισότητες συνεπάγεται ότι το x ανήκει σε όλα τα διαστήματα $I, I_1, I_2, \ldots$. Επειδή το I καλύπτεται από τα ανοικτά σύνολα της οικογένειας, υπάρχει κάποιο από αυτά, ας το συμβολίσουμε U, ώστε να είναι $x \in U$. Επειδή το U είναι ανοικτό, υπάρχει κάποιος $\epsilon > 0$ ώστε η μπάλα $B(x;\epsilon)$ κέντρου x και ακτίνας ϵ να είναι υποσύνολο του U:

$$B(x;\epsilon) \subseteq U.$$

Τώρα, από τη δεύτερη σχέση της (i) βλέπουμε ότι υπάρχει κάποιος αρκετά μεγάλος n ώστε για κάθε $k = 1, \ldots, d$ να είναι $b_k{}^{(n)} - a_k{}^{(n)} < \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}$. Αν $y = (y_1, \ldots, y_d)$ είναι στο I_n, τότε για κάθε k είναι $|y_k - x_k| \leq b_k{}^{(n)} - a_k{}^{(n)} < \frac{\epsilon}{\sqrt{d}}$, οπότε η απόσταση του y από το x είναι

$$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_d - x_d)^2} < \sqrt{d \cdot \frac{\epsilon^2}{d}} = \epsilon.$$

Άρα κάθε y στο I_n ανήκει στην μπάλα $B(x;\epsilon)$ και, επομένως,

$$I_n \subseteq B(x;\epsilon) \subseteq U.$$

Τώρα, όμως, φτάσαμε σε άτοπο: αφ' ενός το I_n δε μπορεί να καλυφτεί από πεπερασμένα από τα ανοικτά σύνολα της οικογένειας αφ' ετέρου το I_n καλύπτεται από ένα από τα ανοικτά σύνολα της οικογένειας, το U. □

Μια και φτάσαμε ως εδώ, μπορούμε με ελάχιστο παραπάνω κόπο να αποδείξουμε και το πλήρες αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.4. *Έστω E κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ και μια οικογένεια ανοικτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, τα οποία καλύπτουν το E, δηλαδή των οποίων η ένωση περιέχει ως υποσύνολο το E. Τότε υπάρχουν πεπερασμένα από τα ανοικτά σύνολα της ίδιας οικογένειας τα οποία, επίσης, καλύπτουν το E.*

Απόδειξη. Επειδή το E είναι φραγμένο, υπάρχει - εξ ορισμού - κάποιο κλειστό διάστημα I ώστε να είναι $E \subseteq I$.
Στην οικογένεια των ανοικτών συνόλων που καλύπτουν το E επισυνάπτουμε και το συμπλήρωμα του E, το E^c, το οποίο είναι - εξ ορισμού - ανοικτό. Είναι προφανές ότι τα ανοικτά σύνολα της νέας οικογένειας καλύπτουν ολόκληρο τον $\mathbb{R}^d$ και, ειδικώτερα, το I. Από την Πρόταση 2.1 συνεπάγεται ότι υπάρχουν πεπερασμένα από τα ανοικτά σύνολα της νέας οικογένειας, ας τα συμβολίσουμε $U_1, \ldots, U_n$ τα οποία καλύπτουν το I. Προφανώς, αυτά τα ίδια πεπερασμένα ανοικτά σύνολα καλύπτουν και το E, δηλαδή $E \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$.
Αν κανένα από τα $U_1, \ldots, U_n$ δεν είναι το E^c, τότε όλα είναι σύνολα της αρχικής οικογένειας.
Αν ένα από αυτά είναι το E^c, για παράδειγμα $U_n = E^c$, τότε μπορούμε να αγνοήσουμε το $U_n = E^c$ και τα υπόλοιπα, τα οποία ανήκουν στην αρχική οικογένεια, συνεχίζουν να καλύπτουν το E, δηλαδή $E \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_{n-1}$.
Σε κάθε περίπτωση, υπάρχουν πεπερασμένα από τα ανοικτά σύνολα της (αρχικής) οικογένειας τα οποία καλύπτουν το E. □

Ασκήσεις.

1. Μπορεί ένα ανοικτό διάστημα να είναι ένωση πεπερασμένων κλειστών διαστημάτων; αριθμήσιμων κλειστών διαστημάτων;
   Μπορεί ένα κλειστό διάστημα να είναι ένωση πεπερασμένων ανοικτών διαστημάτων; αριθμήσιμων ανοικτών διαστημάτων;
   Μπορεί ένα ανοικτό διάστημα να είναι τομή πεπερασμένων κλειστών διαστημάτων; αριθμήσιμων κλειστών διαστημάτων;
   Μπορεί ένα κλειστό διάστημα να είναι τομή πεπερασμένων ανοικτών διαστημάτων; αριθμήσιμων ανοικτών διαστημάτων;

2. Στον $\mathbb{R}^d$ θεωρούμε διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ σχεδόν ξένα ανά δύο και διαστήματα $J_1, J_2, \ldots$ σχεδόν ξένα ανά δύο ώστε $I_1 \cup I_2 \cup \cdots = J_1 \cup J_2 \cup \cdots$. Αποδείξτε ότι $V_d(I_1) + V_d(I_2) + \cdots = V_d(J_1) + V_d(J_2) + \cdots$.
   Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $I_n = (I_n \cap J_1) \cup (I_n \cap J_2) \cup \cdots$ και $J_m = (I_1 \cap J_m) \cup (I_2 \cap J_m) \cup \cdots$ για κάθε n, m. Γνωρίζουμε ότι η τομή δυο διαστημάτων είναι διάστημα.

3. Έστω ότι $r_1, r_2, \ldots$ είναι μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}^d \cap [0,1]^d$. Για κάθε $n \geq 1$, έστω I_n ένα οποιοδήποτε διάστημα στον $\mathbb{R}^d$ το οποίο περιέχει το r_n και έχει $V_d(I_n) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
   Περιγράψτε ένα συγκεκριμένο τέτοιο I_n.
   Ισχύει $\mathbb{Q}^d \cap [0,1]^d \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$;
   Ισχύει $[0,1]^d \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$;

4. Έστω διαστήματα $I_1, \ldots, I_n$ στον $\mathbb{R}^d$ με $\mathbb{Q}^d \cap [0,1]^d \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n$. Αποδείξτε ότι $V_d(I_1) + \cdots + V_d(I_n) \geq 1$.
   Υπόδειξη: Θεωρήστε τα αντίστοιχα κλειστά διαστήματα $J_1, \ldots, J_n$ και αποδείξτε - με άτοπο - ότι $[0,1]^d \subseteq J_1 \cup \cdots \cup J_n$.

2.2 Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue.

Υπενθυμίζουμε τις έννοιες του infimum και supremum για υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Αν το μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι άνω φραγμένο, τότε από τα άνω φράγματά του υπάρχει κάποιο το οποίο είναι *ελάχιστο*. Δηλαδή, υπάρχει αριθμός u_0 ο οποίος είναι άνω φράγμα του A (και, επομένως, κάθε $u \geq u_0$ είναι, επίσης, άνω φράγμα του A) και κάθε αριθμός $u < u_0$ δεν είναι άνω φράγμα του A. Πιο συγκεκριμένα: ισχύει $a \leq u_0$ για κάθε $a \in A$ και, για κάθε $u < u_0$, υπάρχει τουλάχιστον ένας $a > u$ στο A. Ή, με άλλα λόγια: ισχύει $a \leq u_0$ για κάθε $a \in A$ και, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει τουλάχιστον ένας $a > u_0 - \epsilon$ στο A. Το ελάχιστο άνω φράγμα u_0 του A ονομάζεται supremum του A και συμβολίζεται $\sup A$.

Αν το μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}$ δεν είναι άνω φραγμένο, τότε ως supremum του A θεωρούμε το $+\infty$ και γράφουμε $\sup A = +\infty$. Το ότι το A δεν είναι άνω φραγμένο σημαίνει ότι κάθε αριθμός u δεν είναι άνω φράγμα του A, δηλαδή ότι για κάθε u υπάρχει τουλάχιστον ένας $a > u$ στο A.

Αν το μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι κάτω φραγμένο, τότε από τα κάτω φράγματά του υπάρχει κάποιο το οποίο είναι *μέγιστο*. Δηλαδή, υπάρχει αριθμός l_0 ο οποίος είναι κάτω φράγμα του A (και, επομένως, κάθε $l \leq l_0$ είναι, επίσης, κάτω φράγμα του A) και κάθε αριθμός $l > l_0$ δεν είναι κάτω φράγμα του A. Πιο συγκεκριμένα: ισχύει $a \geq l_0$ για κάθε $a \in A$ και, για κάθε $l > l_0$, υπάρχει τουλάχιστον ένας $a < l$ στο A. Ή, με άλλα λόγια: ισχύει $a \geq l_0$ για κάθε $a \in A$ και, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει τουλάχιστον ένας $a < l_0 + \epsilon$ στο A. Το μέγιστο κάτω φράγμα l_0 του A ονομάζεται infimum του A και συμβολίζεται $\inf A$.

Αν το μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}$ δεν είναι κάτω φραγμένο, τότε ως infimum του A θεωρούμε το $-\infty$ και γράφουμε $\inf A = -\infty$. Το ότι το A δεν είναι κάτω φραγμένο σημαίνει ότι κάθε αριθμός l δεν είναι κάτω φράγμα του A, δηλαδή ότι για κάθε l υπάρχει τουλάχιστον ένας $a < l$ στο A.

Είναι σαφές ότι για κάθε μη κενό $A \subseteq \mathbb{R}$ ορίζονται τα $\inf A$ και $\sup A$, ότι το $\inf A$ είναι αριθμός ή $-\infty$, ότι το $\sup A$ είναι αριθμός ή $+\infty$ και ότι ισχύει $\inf A \leq a \leq \sup A$ για κάθε $a \in A$. Το τελευταίο ισχύει διότι το $\inf A$ είναι κάτω φράγμα του A και το $\sup A$ είναι άνω φράγμα του A και μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: το A είναι υποσύνολο του (πιθανόν, μη φραγμένου) διαστήματος $[\inf A, \sup A]$ στο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Επειδή, όμως, το $\inf A$ είναι το *μέγιστο* κάτω φράγμα του A και το $\sup A$ είναι το *ελάχιστο* άνω φράγμα του A, ισχύει, επίσης, ότι το A δεν είναι υποσύνολο κανενός διαστήματος γνησίως μικρότερου από το $[\inf A, \sup A]$.

Είναι, επίσης, εύκολο να δει κανείς ότι αν για τα μη κενά $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει $A \subseteq B$, τότε ισχύει $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$. Πράγματι, η ανισότητα $\inf A \leq \sup A$ είναι σαφής από τα προηγούμενα. Η $\sup A \leq \sup B$ ισχύει, προφανώς, αν είναι $\sup B = +\infty$, δηλαδή αν το B δεν είναι άνω φραγμένο. Στην περίπτωση που το $\sup B$ είναι αριθμός, τότε το $\sup B$ είναι άνω φράγμα του B και, επειδή το A είναι υποσύνολο του B, το $\sup B$ είναι άνω φράγμα και του A. Όμως, επειδή το $\sup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα του A, συνεπάγεται ότι $\sup A \leq \sup B$. Ομοίως, η $\inf B \leq \inf A$ ισχύει, προφανώς, αν είναι $\inf B = -\infty$, δηλαδή αν το B δεν είναι κάτω φραγμένο. Στην περίπτωση που το $\inf B$ είναι αριθμός, τότε το $\inf B$ είναι κάτω φράγμα του B και, επειδή το A είναι υποσύνολο του B, το $\inf B$ είναι κάτω φράγμα και του A. Όμως, επειδή το $\inf A$ είναι το μεγιστο κάτω φράγμα του A, συνεπάγεται ότι $\inf B \leq \inf A$.

Ορισμός. Έστω τυχόν $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση: Έστω ότι για κάθε άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots$ τα οποία καλύπτουν το E, δηλαδή για τα οποία ισχύει $E \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$, είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) = +\infty$. Με άλλα λόγια, έστω ότι δεν υπάρχει καμιά άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων τα οποία να καλύπτουν το E και να έχουν άθροισμα όγκων $< +\infty$. Σ' αυτήν την περίπτωση ορίζουμε το σύμβολο $m_d^*(E)$ να είναι

$$m_d^*(E) = +\infty.$$

Δεύτερη περίπτωση: Έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον μια άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων τα οποία να καλύπτουν το E και να έχουν άθροισμα όγκων $< +\infty$. Τότε θεωρούμε *όλες* τις άπειρες αριθμήσιμες συλλογές ανοικτών διαστημάτων τα οποία να καλύπτουν το E και να έχουν άθροισμα όγκων $< +\infty$, για κάθε μια από αυτές υπολογίζουμε το αντίστοιχο άθροισμα όγκων, το οποίο είναι ένας αριθμός, και δημιουργούμε το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με στοιχεία αυτά ακριβώς τα αθροίσματα όγκων. Επειδή, προφανώς, κάθε τέτοιο άθροισμα όγκων είναι αριθμός ≥ 0, το μη κενό σύνολο που δημιουργείται από αυτά τα αθροίσματα όγκων είναι υποσύνολο του $[0, +\infty)$, δηλαδή έχει ως κάτω φράγμα τον 0. Άρα το infimum του συνόλου αυτού είναι αριθμός ≥ 0. Σ' αυτήν την περίπτωση ορίζουμε το σύμβολο $m_d^*(E)$ να είναι ο μη αρνητικός αριθμός

$$m_d^*(E) = \inf\Big\{ \sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) \ : \text{τα } I_1, I_2, \ldots \text{ είναι ανοικτά διαστήματα με } E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \text{ και } \sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) < +\infty \Big\}.$$

Και στις δυο περιπτώσεις, το σύμβολο $m_d^*(E)$ ονομάζεται **εξωτερικό (d-διάστατο) μέτρο Lebesgue** ή, απλούστερα, **εξωτερικό (d-διάστατο) μέτρο** του E.

Σχόλια. (1) Στη δεύτερη περίπτωση, από τη φύση του $m_d^*(E)$ ως infimum του συγκεκριμένου παραπάνω συνόλου ισχύουν τα εξής.
Κατ' αρχάς είναι $m_d^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n)$ για κάθε άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots$ τα οποία καλύπτουν το E, δηλαδή για τα οποία ισχύει $E \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$.
Κατόπιν, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει τουλάχιστον μια άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots$ τα οποία καλύπτουν το E ώστε να είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) < m_d^*(E) + \epsilon$.
(2) Με απλά λόγια, όλη η ουσία των προηγουμένων είναι η εξής: *προσπαθούμε να καλύψουμε το σύνολο E με άπειρα αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα με τον οικονομικότερο - σε συνολικό όγκο - τρόπο.*
Στην πρώτη περίπτωση, το E είναι τέτοιο που με όποιο τρόπο κι αν το καλύψουμε με άπειρα αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα ο συνολικός όγκος αυτών των διαστημάτων είναι πάντοτε $+\infty$. Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το E έχει εξωτερικό μέτρο ίσο με $+\infty$: $m_d^*(E) = +\infty$.
Στη δεύτερη περίπτωση, το E είναι τέτοιο που μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον ένα τρόπο να το καλύψουμε με άπειρα αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα τα οποία έχουν συνολικό όγκο $< +\infty$. Στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να βρούμε άπειρα αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα τα οποία να καλύπτουν το E και να έχουν συνολικό όγκο *όσο το δυνατό μικρότερο* ή *οικονομικότερο*. Στην περίπτωση αυτή το εξωτερικό μέτρο του E, δηλαδή ο αριθμός $m_d^*(E)$, εκφράζει *το πόσο μικρός ή πόσο οικονομικός μπορεί να γίνει αυτός ο συνολικός όγκος: όσο κοντά θέλουμε (από πάνω) αλλά όχι παρακάτω*. Πιο συγκεκριμένα: (i) με όποιο τρόπο κι αν καλύψουμε το E με άπειρα αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα ο συνολικός όγκος αυτών των διαστημάτων είναι πάντοτε $\geq m_d^*(E)$ και (ii) μπορούμε να βρούμε τρόπο να καλύψουμε το E με άπειρα αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα έτσι ώστε ο συνολικός όγκος αυτών των διαστημάτων να είναι όσο κοντά θέλουμε στο $m_d^*(E)$ ή, με άλλα λόγια, για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε τρόπο να καλύψουμε το E με άπειρα αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα έτσι ώστε ο συνολικός όγκος αυτών των διαστημάτων να είναι $< m_d^*(E) + \epsilon$.
Και - ξανά - με σύμβολα:
(i) για κάθε άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots$ τα οποία καλύπτουν το E ισχύει $m_d^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n)$ και
(ii) για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει τουλάχιστον μια άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots$ τα οποία καλύπτουν το E έτσι ώστε να είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) < m_d^*(E) + \epsilon$.

Πρόταση 2.2. (1) $0 \leq m_d^*(E) \leq +\infty$ *για κάθε* $E \subseteq \mathbb{R}^d$.
(2) ***Η αυξητικότητα του εξωτερικού μέτρου***. *Αν* $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^d$, *συνεπάγεται* $m_d^*(E) \leq m_d^*(F)$.

(3) $m_d^*(I) = V_d(I)$ *για κάθε διάστημα* I *στον* $\mathbb{R}^d$.
(4) $m_d^*(\emptyset) = 0$ *και* $m_d^*(\mathbb{R}^d) = +\infty$.
(5) ***Η σ-υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου.*** *Αν τα* $E, E_1, E_2, \ldots$ *είναι υποσύνολα του* $\mathbb{R}^d$ *και* $E \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$, *τότε συνεπάγεται* $m_d^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(E_n)$.

Απόδειξη. (1) Είναι σαφές από όσα έχουμε πει για το $m_d^*(E)$.
(2) Έστω $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^d$. Αν είναι $m_d^*(F) = +\infty$, τότε η $m_d^*(E) \leq m_d^*(F)$ είναι προφανής. Έστω, λοιπόν, ότι είναι $m_d^*(F) < +\infty$.
Έστω *τυχούσα* άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots$ τα οποία καλύπτουν το F και έχουν συνολικό όγκο $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) < +\infty$. Φυσικά, αυτό το $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n)$ είναι το *τυχόν* στοιχείο του συνόλου του οποίου το infimum έχει οριστεί να είναι το $m_d^*(F)$. Επειδή είναι $E \subseteq F$, τα ίδια $I_1, I_2, \ldots$ καλύπτουν και το E και, επομένως, το $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n)$ είναι *και* στοιχείο του συνόλου του οποίου το infimum έχει οριστεί να είναι το $m_d^*(E)$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το τυχόν στοιχείο του συνόλου με infimum ίσο με $m_d^*(F)$ είναι και στοιχείο του συνόλου με infimum ίσο με $m_d^*(E)$. Δηλαδή, το πρώτο σύνολο είναι υποσύνολο του δεύτερου συνόλου και, επομένως, είναι $m_d^*(E) \leq m_d^*(F)$.
(3) Έστω διάστημα I στον $\mathbb{R}^d$. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι αν θεωρήσουμε ένα οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα I_1 ώστε να είναι $I \subseteq I_1$ και, επίσης, θεωρήσουμε οποιαδήποτε κενά ανοικτά διαστήματα $I_2 = I_3 = \ldots = \emptyset$ (δηλαδή, ανοικτά διαστήματα με μήκη ακμών ίσα με 0), τότε τα $I_1, I_2, \ldots$ καλύπτουν το I και έχουν $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) = V_d(I_1) < +\infty$. Δηλαδή, έχουμε την περίπτωση $m_d^*(I) < +\infty$.
Έστω *τυχούσα* άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots$ τα οποία καλύπτουν το I και έχουν $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) < +\infty$. Από το Θεώρημα 2.2 συνεπάγεται $V_d(I) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n)$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός $V_d(I)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου των $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n)$, δηλαδή του συνόλου του οποίου το infimum έχουμε συμβολίσει $m_d^*(I)$.
Κατόπιν, θεωρούμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.5, υπάρχει κάποιο ανοικτό διάστημα I'' ώστε να είναι $I \subseteq I''$ και $V_d(I'') < V_d(I) + \epsilon$. Θεωρούμε τη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1 = I''$ και $I_2 = I_3 = \ldots = \emptyset$ τα οποία καλύπτουν το I και έχουν $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) = V_d(I_1) = V_d(I'') < V_d(I) + \epsilon$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του συνόλου, του οποίου το infimum έχουμε συμβολίσει $m_d^*(I)$, το οποίο (στοιχείο) είναι $< V_d(I) + \epsilon$.
Συνδυάζοντας τα συμπεράσματα των δυο τελευταίων παραγράφων, βλέπουμε ότι $V_d(I) = m_d^*(I)$.
(4) Θεωρούμε την άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1 = I_2 = \ldots = \emptyset$. Αυτά καλύπτουν το $\emptyset$, οπότε είναι $m_d^*(\emptyset) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) = 0$. Άρα είναι $m_d^*(\emptyset) = 0$.
Θεωρούμε τυχόντα θετικό αριθμό M οσοδήποτε μεγάλο. Θεωρούμε οποιοδήποτε διάστημα I στον $\mathbb{R}^d$ με μήκη ακμών όλα ίσα με $\sqrt[d]{M}$. Τότε, σύμφωνα με τα (2) και (3), είναι $m_d^*(\mathbb{R}^d) \geq m_d^*(I) = V_d(I) = \left(\sqrt[d]{M}\right)^d = M$. Επειδή μπορούμε να πάρουμε τον M όσο μεγάλο θέλουμε, συνεπάγεται ότι $m_d^*(\mathbb{R}^d) = +\infty$.
(5) Έστω ότι τα $E, E_1, E_2, \ldots$ είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ και $E \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(E_n) = +\infty$, τότε η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε είναι, προφανώς, σωστή. Έστω, λοιπόν, ότι είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(E_n) < +\infty$. Επομένως, είναι και $m_d^*(E_n) < +\infty$ για κάθε n.
Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με τον ορισμό του $m_d^*(E_n)$, υπάρχει τουλάχιστον μια άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_{n,1}, I_{n,2}, \ldots$ τα οποία καλύπτουν το E_n και με συνολικό όγκο $\sum_{m=1}^{+\infty} V_d(I_{n,m}) < m_d^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$.
Κατόπιν, θεωρούμε την άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων που σχηματίζεται από όλα τα διαστήματα $I_{n,m}$ καθώς οι δείκτες n, m διατρέχουν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, τους φυσικούς αριθμούς. Είναι φανερό ότι τα διαστήματα αυτά καλύπτουν όλα τα σύνολα $E_1, E_2, \ldots$ και, επειδή αυτά τα τελευταία καλύπτουν το E, τα ίδια διαστήματα καλύπτουν και το E. Από τον ορισμό του $m_d^*(E)$ συνεπάγεται ότι αυτό είναι $\leq$ από τον συνολικό όγκο όλων των διαστημάτων

$I_{n,m}$ και, επομένως,

$$\begin{aligned} m_d^*(E) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\sum_{m=1}^{+\infty} V_d(I_{n,m})\Big) \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\Big({m_d}^*(E_n)+\frac{\epsilon}{2^n}\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(E_n) + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\epsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(E_n)+\epsilon. \end{aligned}$$

Επειδή η ανισότητα $m_d^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(E_n)+\epsilon$ ισχύει για τυχόντα $\epsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό, συνεπάγεται ότι $m_d^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(E_n)$. □

Η σ-υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου ισχύει και για πεπερασμένα σύνολα. Πράγματι, έστω ότι είναι $E \subseteq E_1 \cup \cdots \cup E_m$. Θεωρούμε τα $E_{m+1} = E_{m+2} = \ldots = \emptyset$ και έχουμε άπειρα αριθμήσιμα σύνολα $E_1, E_2, \ldots$ με $E \subseteq E_1 \cup \cdots \cup E_m = \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Συνεπάγεται ότι $m_d^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(E_n) = m_d^*(E_1)+\cdots+m_d^*(E_m)$.

Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται **υποπροσθετικότητα** του εξωτερικού μέτρου και, όπως μόλις είδαμε, συνεπάγεται από την σ-υποπροσθετικότητα.

Πρόταση 2.3. *Είναι $m_d^*(E) = 0$ για κάθε αριθμήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}^d$.*

Απόδειξη. Έστω οποιοδήποτε μονοσύνολο $\{x\}$ στον $\mathbb{R}^d$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και παίρνουμε ένα οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα I το οποίο περιέχει το x και έχει μήκη ακμών όλα ίσα με $\sqrt[d]{\epsilon}$. Τέλος, θεωρούμε την άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1 = I$ και $I_2 = I_3 = \ldots = \emptyset$, τα οποία καλύπτουν το $\{x\}$. Συνεπάγεται ότι είναι $m_d^*(\{x\}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) = V_d(I_1) = V_d(I) = (\sqrt[d]{\epsilon})^d = \epsilon$. Επειδή η ανισότητα $m_d^*(\{x\}) \leq \epsilon$ ισχύει για τυχόντα $\epsilon > 0$, συνεπάγεται ότι $m_d^*(\{x\}) = 0$.
Τώρα, έστω αριθμήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Αν το E είναι πεπερασμένο, δηλαδή αν $E = \{x_1, \ldots, x_m\}$, τότε είναι $E = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_m\}$ και, επομένως, $m_d^*(E) \leq m_d^*(\{x_1\})+\cdots+m_d^*(\{x_m\}) = 0+\cdots+0 = 0$. Αν το E είναι άπειρο αριθμήσιμο, τότε έστω $x_1, x_2, \ldots$ μια οποιαδήποτε αρίθμησή του. Δηλαδή, $E = \{x_1, x_2, \ldots\} = \cup_{n=1}^{+\infty}\{x_n\}$ και, επομένως, $m_d^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.
Σε κάθε περίπτωση είναι $m_d^*(E) \leq 0$ και, επομένως, $m_d^*(E) = 0$. □

Παράδειγμα. Είναι $m_1^*(\mathbb{Q}) = 0$ και, γενικότερα, $m_d^*(\mathbb{Q}^d) = 0$, όπου $\mathbb{Q}^d = \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$ είναι το σύνολο των σημείων του $\mathbb{R}^d$ με όλες τις συντεταγμένες τους ρητές.

Πόρισμα: Κανένα διάστημα στον $\mathbb{R}$ με θετικό μήκος και, γενικότερα, κανένα διάστημα στον $\mathbb{R}^d$ με θετικό d-διάστατο όγκο δεν είναι αριθμήσιμο.

Ασκήσεις.

1. Με τον παρακάτω συλλογισμό αποδεικνύεται ότι είναι $m_d^*(E) = 0$ για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Χρησιμοποιούμε την σ-υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου. Ποιο είναι το λάθος;

$$0 \leq m_d^*(E) = m_d^*\Big(\bigcup_{x\in E}\{x\}\Big) \leq \sum_{x\in E} m_d^*(\{x\}) = \sum_{x\in E} 0 = 0.$$

2. Χρησιμοποιώντας απλές ιδιότητες του m_d^*, αποδείξτε ότι,
   (i) αν το $E \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι φραγμένο, τότε $m_d^*(E) < +\infty$.
   (ii) αν το $E \subseteq \mathbb{R}^d$ έχει εσωτερικό σημείο, τότε $m_d^*(E) > 0$.
   (iii) αν $E, F \subseteq \mathbb{R}^d$ και $m_d^*(E) = 0$, τότε $m_d^*(E \cup F) = m_d^*(F)$.

3. Αποδείξαμε ότι, αν το $E \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι αριθμήσιμο, τότε είναι $m_d^*(E) = 0$, χρησιμοποιώντας την σ-υποπροσθετικότητα του m_d^*. Αποδείξτε το ίδιο με βάση μόνο τον ορισμό του m_d^*.
Υπόδειξη: Θεωρήστε μια οποιαδήποτε αρίθμηση $x_1, x_2, \dots$ του E. Πάρτε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και σε κάθε x_n αντιστοιχήστε κάποιο κατάλληλο ανοικτό διάστημα I_n ώστε τα $I_1, I_2, \dots$ να καλύπτουν το E και να έχουν συνολικό όγκο $< \epsilon$.

4. Έστω ότι τα $I_1, I_2, \dots$ είναι σχεδόν ξένα ανά δύο διαστήματα στον $\mathbb{R}^d$ και $E = \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Αποδείξτε ότι είναι $m_d^*(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n)$. Αυτό αποτελεί γενίκευση σε άπειρα αριθμήσιμα διαστήματα της Πρότασης 2.2(3).
Υπόδειξη: Βρείτε ανοικτά διαστήματα $I_1{}'', I_2{}'', \dots$ ώστε να περιέχουν τα αντίστοιχα $I_1, I_2, \dots$ και να είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n{}'') < \sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) + \epsilon$. Κατόπιν, θεωρήστε οποιαδήποτε άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $J_1, J_2, \dots$ τα οποία καλύπτουν το E και αποδείξτε ότι είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} V_d(J_n)$. Δείτε την άσκηση 2 της ενότητας 2.1.
Μπορείτε να υπολογίσετε τα παρακάτω;
$$m_1^*\big([0,1] \cup [2,3]\big), \qquad m_2{}^*\Big(\big([0,1] \times [0,1]\big) \cup \big([1,2] \times [-1,3]\big)\Big).$$

5. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ με $m_d^*(A) < +\infty$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε να είναι $A \subseteq U$ και $m_d^*(U) < m_d^*(A) + \epsilon$.
Υπόδειξη: Θεωρήστε αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα που καλύπτουν το A σύμφωνα με τον ορισμό του $m_d^*(A)$ και πάρτε την ένωσή τους.
Αποδείξτε ότι για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι
$$m_d^*(A) = \inf\{m_d^*(U) : A \subseteq U, U \text{ ανοικτό } \subseteq \mathbb{R}^d\}.$$
Αποδείξτε ότι για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ υπάρχει σύνολο $G \subseteq \mathbb{R}^d$ το οποίο είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών $\subseteq \mathbb{R}^d$ ώστε $A \subseteq G$ και $m_d^*(G) = m_d^*(A)$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε το πρώτο μέρος με $\epsilon = \frac{1}{n}$ και θεωρήστε τα αντίστοιχα U_n.

6. Έστω L οποιοδήποτε υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^d$ κάθετο σε οποιονδήποτε από τους κύριους άξονες. Αποδείξτε ότι $m_d^*(L) = 0$.
Υπόδειξη: Έστω L οποιοδήποτε υπερεπίπεδο κάθετο στον x_d-άξονα (για παράδειγμα) και έστω $x_d = c$ η εξίσωση του L. Θεωρήστε τα διαστήματα $I_n = [-n,n]^{d-1} \times [c,c]$ τα οποία περιέχονται στο L και αποδείξτε ότι $L = \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Κατόπιν, χρησιμοποιήστε τη σ-υποπροσθετικότητα του m_d^*.
Έστω L οποιοδήποτε υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι $m_d^*(L) = 0$.
Υπόδειξη: Έστω L οποιοδήποτε υπερεπίπεδο και έστω $\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_d x_d = c$ η εξίσωσή του, όπου δεν είναι όλοι οι μ_k ίσοι με 0. Έστω, για παράδειγμα, $\mu_d \neq 0$. Θεωρήστε οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $I' = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{d-1}, b_{d-1}]$ του $\mathbb{R}^{d-1}$ και το υποσύνολο $L \cap (I' \times \mathbb{R})$ του L. Πάρτε οποιονδήποτε φυσικό n και χωρίστε κάθε ακμή του I' σε n ισομήκη κλειστά διαστήματα. Τότε το I' θα χωριστεί σε n^{d-1} κλειστά διαστήματα σχεδόν ξένα ανά δύο καθένα από τα οποία έχει $(d-1)$-διάστατο όγκο ίσο με $\frac{V_{d-1}(I')}{n^{d-1}}$. Έστω J' ένα οποιοδήποτε από αυτά τα n^{d-1} διαστήματα. Αποδείξτε ότι το $L \cap (J' \times \mathbb{R})$ περιέχεται σε ένα κλειστό διάστημα $J' \times J''$ του $\mathbb{R}^d$, όπου J'' είναι κάποιο κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$ με μήκος $\frac{M}{n}$, όπου $M = \frac{\mu_1}{\mu_d}(b_1 - a_1) + \cdots + \frac{\mu_{d-1}}{\mu_d}(b_{d-1} - a_{d-1})$. Άρα το $L \cap (I' \times \mathbb{R})$ περιέχεται στην ένωση n^{d-1} κλειστών διαστημάτων στον $\mathbb{R}^d$ με συνολικό d-διάστατο όγκο ίσο με $n^{d-1} \frac{V_{d-1}(I')}{n^{d-1}} \frac{M}{n}$. Άρα $m_d^*\big(L \cap (I' \times \mathbb{R})\big) \leq \frac{M V_{d-1}(I')}{n}$ και, επειδή ο n είναι τυχόν φυσικός, συνεπάγεται $m_d^*\big(L \cap (I' \times \mathbb{R})\big) = 0$. Εφαρμόστε αυτό το αποτέλεσμα για $I_n' = [-n,n]^{d-1}$ και, αφού παρατηρήσετε ότι $L = \cup_{n=1}^{+\infty} \big(L \cap (I_n' \times \mathbb{R})\big)$, χρησιμοποιήστε τη σ-προσθετικότητα του m_d^*.

7. Έστω I' ένα κλειστό διάστημα στον $\mathbb{R}^{d-1}$ και $f : I' \to \mathbb{R}$ συνεχής στο I'. Αποδείξτε ότι το γράφημα της f, δηλαδή το $\Gamma_f = \{(x', f(x')) : x' \in I'\} \subseteq \mathbb{R}^d$ έχει $m_d^*(\Gamma_f) = 0$.
   Υπόδειξη: Γνωρίζουμε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο I', δηλαδή για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε να είναι $|f(x_1') - f(x_2')| < \epsilon$ για κάθε $x_1', x_2' \in I'$ που η μεταξύ τους απόσταση είναι $< \delta$. Μιμηθείτε τη λύση της προηγούμενης άσκησης.

8. Ποια είναι η τιμή του $m_d^*(\mathbb{Q}^d \cap [0,1]^d)$; του $m_d^*([0,1]^d)$;
   Υποθέστε ότι αλλάζουμε τον ορισμό του $m_d^*(E)$ και θεωρούμε *πεπερασμένες* αντί άπειρες αριθμήσιμες συλλογές ανοικτών διαστημάτων που καλύπτουν το E. Ποια είναι τώρα η τιμή του $m_d^*(\mathbb{Q}^d \cap [0,1]^d)$; του $m_d^*([0,1]^d)$;
   Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση 4 της ενότητας 2.1.

9. Αποδείξτε ότι, αν στον ορισμό του $m_d^*(A)$ επιτρέψουμε τα διαστήματα που καλύπτουν το A να είναι οποιουδήποτε τύπου, τότε η ποσότητα $m_d^*(A)$ δε θα αλλάξει.

2.3 Το μέτρο Lebesgue.

Ορισμός. Έστω τυχόν $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Το E χαρακτηρίζεται **Lebesgue μετρήσιμο (στον $\mathbb{R}^d$)** ή, απλούστερα, **μετρήσιμο (στον $\mathbb{R}^d$)** αν έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ισχύει

$$m_d^*(A \cap E) + m_d^*(A \cap E^c) = m_d^*(A).$$

Παρατηρήστε ότι τα σύνολα $A \cap E$ και $A \cap E^c$ είναι ξένα και η ένωσή τους ισούται με το A. Μπορούμε να πούμε ότι τα δυο αυτά σύνολα είναι τα *κομμάτια* στα οποία διαχωρίζεται το A από το E: το πρώτο αποτελείται από τα στοιχεία του A που ανήκουν στο E και το δεύτερο αποτελείται από τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο E. Επομένως, μπορούμε να διατυπώσουμε τον παραπάνω ορισμό ως εξής: *το E χαρακτηρίζεται μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$ αν τα δυο κομμάτια στα οποία διαχωρίζει κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ έχουν συνολικό εξωτερικό μέτρο ίσο με το έξωτερικό μέτρο του υποσυνόλου.*

Παρατηρούμε, επίσης, ότι από την υποπροσθετικότητα του m_d^* και από το ότι είναι $(A \cap E) \cup (A \cap E^c) = A$ συνεπάγεται ότι $m_d^*(A \cap E) + m_d^*(A \cap E^c) \geq m_d^*(A)$ για κάθε $E, A \subseteq \mathbb{R}^d$. Επομένως, το να ισχύει η $m_d^*(A \cap E) + m_d^*(A \cap E^c) = m_d^*(A)$ είναι ισοδύναμο με το να ισχύει η $m_d^*(A \cap E) + m_d^*(A \cap E^c) \leq m_d^*(A)$. Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι *το E χαρακτηρίζεται μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$ αν για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ισχύει $m_d^*(A \cap E) + m_d^*(A \cap E^c) \leq m_d^*(A)$.*

Παρατηρούμε, τέλος, ότι, αν είναι $m_d^*(A) = +\infty$, τότε η ανισότητα $m_d^*(A \cap E) + m_d^*(A \cap E^c) \leq m_d^*(A)$ ισχύει *αυτομάτως*. Άρα μπορούμε να πούμε ότι *το E χαρακτηρίζεται μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$ αν για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ με $m_d^*(A) < +\infty$ ισχύει $m_d^*(A \cap E) + m_d^*(A \cap E^c) \leq m_d^*(A)$.*

Αυτές οι δυο παρατηρήσεις ελαφρύνουν κάπως την εργασία μας όταν πρέπει να ελέγξουμε *με βάση τον ορισμό* το αν ένα συγκεκριμένο $E \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$. Σύμφωνα με την πρώτη παρατήρηση, είναι αρκετό να ελέγξουμε αν ισχύει μια ανισότητα (δηλαδή, κάτι ασθενέστερο) αντί μιας ισότητας. Τέλος, σύμφωνα με τη δεύτερη παρατήρηση, είναι αρκετό να ελέγξουμε την ανισότητα για λιγότερα A αντί για όλα τα $A \subseteq \mathbb{R}^d$.

Πρόταση 2.4. (1) *Το $\emptyset$ και ο $\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμα στον $\mathbb{R}^d$.*
(2) *Αν $E \subseteq \mathbb{R}^d$ και $m_d^*(E) = 0$, τότε το E είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$.*
(3) *Αν το E είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$, τότε και το E^c είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$.*
(4) *Αν τα E, F είναι μετρήσιμα στον $\mathbb{R}^d$, τότε και το $E \cup F$ είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$.*

Απόδειξη. (1) Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι

$$m_d^*(A \cap \emptyset) + m_d^*(A \cap \emptyset^c) = m_d^*(\emptyset) + m_d^*(A \cap \mathbb{R}^d) = 0 + m_d^*(A) = m_d^*(A).$$

Επίσης, είναι

$$\begin{aligned} m_d^*(A\cap\mathbb{R}^d)+m_d^*\big(A\cap(\mathbb{R}^d)^c\big) &= m_d^*(A)+m_d^*(A\cap\emptyset)\\ &= m_d^*(A)+m_d^*(\emptyset)=m_d^*(A)+0=m_d^*(A). \end{aligned}$$

(2) Επειδή είναι $A\cap E\subseteq E$ και $A\cap E^c\subseteq A$ και λόγω της αυξητικότητας του m_d^*, συνεπάγεται ότι για κάθε $A\subseteq\mathbb{R}^d$ είναι

$$m_d^*(A\cap E)+m_d^*(A\cap E^c)\le m_d^*(E)+m_d^*(A)=0+m_d^*(A)=m_d^*(A).$$

(3) Επειδή το E είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$, και επειδή είναι $(E^c)^c=E$, συνεπάγεται ότι για κάθε $A\subseteq\mathbb{R}^d$ είναι

$$\begin{aligned} m_d^*(A\cap E^c)+m_d^*(A\cap(E^c)^c) &= m_d^*(A\cap E^c)+m_d^*(A\cap E)\\ &= m_d^*(A\cap E)+m_d^*(A\cap E^c)=m_d^*(A). \end{aligned}$$

Άρα το E^c είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$.
(4) Στους παρακάτω υπολογισμούς: η πρώτη ισότητα ισχύει διότι είναι $E\cup F=F\cup(F^c\cap E)$ και $(E\cup F)^c=F^c\cap E^c$, η δεύτερη ισότητα ισχύει διότι είναι $A\cap(K\cup L)=(A\cap K)\cup(A\cap L)$, η ανισότητα ισχύει λόγω της υποπροσθετικότητας του m_d^*, η τρίτη ισότητα ισχύει διότι το E είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$ και η τέταρτη ισότητα ισχύει διότι το F είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned} m_d^*\big(A\cap(E\cup F)\big)+m_d^*\big(A\cap(E\cup F)^c\big) &= m_d^*\big(A\cap(F\cup(F^c\cap E)\big)+m_d^*(A\cap F^c\cap E^c)\\ &= m_d^*\big((A\cap F)\cup(A\cap F^c\cap E)\big)+m_d^*(A\cap F^c\cap E^c)\\ &\le m_d^*(A\cap F)+m_d^*(A\cap F^c\cap E)+m_d^*(A\cap F^c\cap E^c)\\ &= m_d^*(A\cap F)+m_d^*(A\cap F^c)\\ &= m_d^*(A). \end{aligned}$$

Άρα το $E\cup F$ είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$. $\square$

Τώρα θα δούμε μερικούς γενικούς ορισμούς.

Ορισμός. Έστω ένα οποιοδήποτε σύνολο X και έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ χαρακτηρίζεται **άλγεβρα υποσυνόλων του** X αν ισχύουν τα παρακάτω:
(i) $\emptyset\in\mathcal{A}$,
(ii) αν $E\in\mathcal{A}$, τότε $E^c\in\mathcal{A}$ (όπου $E^c=X\setminus E$) και
(iii) αν $E,F\in\mathcal{A}$, τότε $E\cup F\in\mathcal{A}$.

Πρόταση 2.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του X. Τότε:*
(1) $X\in\mathcal{A}$,
(2) *αν $E,F\in\mathcal{A}$, τότε $E\cap F$, $E\setminus F$, $F\setminus E$, $E\triangle F\in\mathcal{A}$.*

Απόδειξη. (1) Από τις ιδιότητες (i) και (ii) της $\mathcal{A}$ συνεπάγεται ότι $X=\emptyset^c\in\mathcal{A}$.
(2) Από τις ιδιότητες (ii) και (iii) της $\mathcal{A}$ συνεπάγεται ότι, αν $E,F\in\mathcal{A}$, τότε $E^c,F^c\in\mathcal{A}$, οπότε $E^c\cup F^c\in\mathcal{A}$ και, επομένως, $E\cap F=(E^c\cup F^c)^c\in\mathcal{A}$.
Τώρα, αν $E,F\in\mathcal{A}$, τότε $E,F^c\in\mathcal{A}$, οπότε $E\setminus F=E\cap F^c\in\mathcal{A}$. Η απόδειξη για το $F\setminus E$ είναι, φυσικά, ίδια.
Τέλος, αν $E,F\in\mathcal{A}$, τότε $E\setminus F$, $F\setminus E\in\mathcal{A}$ και, επομένως, $E\triangle F=(E\setminus F)\cup(F\setminus E)\in\mathcal{A}$. $\square$

Είναι φανερό ότι η ιδιότητα (iii) μιας άλγεβρας υποσυνόλων του X αλλά και η ανάλογη ιδιότητα με την τομή που εμφανίζεται στο (2) της Πρότασης 2.5 γενικεύονται με την αρχή της επαγωγής για πεπερασμένες ενώσεις και τομές. Πιο συγκεκριμένα: αν η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του X και αν $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}$, τότε είναι

$$E_1 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{A}, \qquad E_1 \cap \cdots \cap E_n \in \mathcal{A}.$$

Όμως, για άπειρες αριθμήσιμες ενώσεις και τομές χρειαζόμαστε έναν άλλο ορισμό.

Ορισμός. Έστω ένα οποιοδήποτε σύνολο X και έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ χαρακτηρίζεται **σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X** αν ισχύουν τα παρακάτω:
(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
(ii) αν $E \in \mathcal{A}$, τότε $E^c \in \mathcal{A}$ (όπου $E^c = X \setminus E$) και
(iii) αν $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A}$, τότε $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \in \mathcal{A}$.

Πρόταση 2.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X. Τότε:*
(1) *η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του X και*
(2) *αν $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A}$, τότε $E_1 \cap E_2 \cap \cdots \in \mathcal{A}$.*

Απόδειξη. (1) Αν $E, F \in \mathcal{A}$, τότε θεωρούμε τα $E_1 = E, E_2 = F, E_3 = E_4 = \ldots = \emptyset$, τα οποία ανήκουν όλα στην $\mathcal{A}$ και από την ιδιότητα (iii) της σ-άλγεβρας συνεπάγεται ότι το $E \cup F = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots$ ανήκει στην $\mathcal{A}$.
(2) Από τις ιδιότητες (ii) και (iii) της σ-άλγεβρας συνεπάγεται ότι, αν $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A}$, τότε ${E_1}^c, {E_2}^c, \ldots \in \mathcal{A}$, οπότε ${E_1}^c \cup {E_2}^c \cup \cdots \in \mathcal{A}$. Άρα $E_1 \cap E_2 \cap \cdots = \big({E_1}^c \cup {E_2}^c \cup \cdots\big)^c \in \mathcal{A}$. □

Ορισμός. Μετά από αυτούς τους γενικούς ορισμούς, συμβολίζουμε με $\mathcal{L}_d$ την οικογένεια όλων των μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{L}_d = \{E : \text{το } E \text{ είναι μετρήσιμο } \subseteq \mathbb{R}^d\}.$$

Από την Πρόταση 2.4 συνεπάγεται ότι η $\mathcal{L}_d$ είναι μια άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$. Αυτό με τη σειρά του, σύμφωνα με τη γενική Πρόταση 2.5, συνεπάγεται ότι, εκτός από την πεπερασμένη ένωση, η πεπερασμένη τομή, η διαφορά και η συμμετρική διαφορά μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$.

Πρόταση 2.7. *Έστω ότι τα $E_1, E_2, \ldots$ είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ και $E = \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Τότε για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ισχύει*

$$m_d^*(A \cap E) = \sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(A \cap E_n).$$

Απόδειξη. Επειδή είναι $A \cap E = A \cap \cup_{n=1}^{+\infty} E_n = \cup_{n=1}^{+\infty}(A \cap E_n)$, από την σ-υποπροσθετικότητα του m_d^* συνεπάγεται ότι

$$m_d^*(A \cap E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(A \cap E_n).$$

Τώρα, συμβολίζουμε $F_n = E_1 \cup \cdots \cup E_n$ για κάθε n και θα αποδείξουμε με την αρχή της επαγωγής ότι είναι

$$m_d^*(A \cap E_1) + \cdots + m_d^*(A \cap E_n) = m_d^*(A \cap F_n)$$

για κάθε n. Η ισότητα αυτή είναι, προφανώς, σωστή αν $n = 1$, διότι $F_1 = E_1$. Υποθέτουμε ότι η ισότητα ισχύει για κάποιον n και, επειδή το E_{n+1} είναι μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$, συνεπάγεται ότι

$$m_d^*(A \cap F_{n+1} \cap E_{n+1}) + m_d^*(A \cap F_{n+1} \cap {E_{n+1}}^c) = m_d^*(A \cap F_{n+1}).$$

Όμως, επειδή τα $E_1, E_2, \dots$ είναι ξένα ανά δύο, συνεπάγεται ότι είναι $F_{n+1} \cap E_{n+1} = E_{n+1}$ και $F_{n+1} \cap {E_{n+1}}^c = F_n$. Άρα η τελευταία ισότητα γίνεται

$$m_d^*(A \cap E_{n+1}) + m_d^*(A \cap F_n) = m_d^*(A \cap F_{n+1}).$$

Από την επαγωγική υπόθεση είναι

$$m_d^*(A \cap E_1) + \cdots + m_d^*(A \cap E_n) + m_d^*(A \cap E_{n+1}) = m_d^*(A \cap F_{n+1})$$

και αποδείχτηκε αυτό που θέλαμε για κάθε n.
Τώρα, βλέπουμε ότι είναι $F_n \subseteq E$ για κάθε n και από την αυξητικότητα του m_d^* έχουμε ότι

$$m_d^*(A \cap E_1) + \cdots + m_d^*(A \cap E_n) \leq m_d^*(A \cap E)$$

για κάθε n. Άρα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(A \cap E_n) \leq m_d^*(A \cap E).$$

Τώρα, η ισότητα προκύπτει από την τελευταία ανισότητα και από την αντίθετή της στην αρχή της απόδειξης. □

Θεώρημα 2.5. *Η $\mathcal{L}_d$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ήδη ότι η $\mathcal{L}_d$ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, οπότε απομένει να αποδείξουμε ότι η $\mathcal{L}_d$ ικανοποιεί την ιδιότητα (iii) μιας σ-άλγεβρας. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι τα $E_1, E_2, \dots$ είναι μετρήσιμα στον $\mathbb{R}^d$ και θα αποδείξουμε ότι το $E = \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$ είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$.
Κατ' αρχάς θεωρούμε την ειδική περίπτωση κατά την οποία τα $E_1, E_2, \dots$ είναι ξένα ανά δύο. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.7, συμβολίζουμε $F_n = E_1 \cup \cdots \cup E_n$ για κάθε n και θα χρησιμοποιήσουμε τις ισότητες $m_d^*(A \cap E_1) + \cdots + m_d^*(A \cap E_n) = m_d^*(A \cap F_n)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(A \cap E_n) = m_d^*(A \cap E)$. Η δεύτερη είναι το αποτέλεσμα της Πρότασης 2.7 και η πρώτη υπάρχει μέσα στην απόδειξη της Πρότασης 2.7. Επειδή η $\mathcal{L}_d$ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, συνεπάγεται ότι το F_n είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$. Άρα είναι

$$\begin{aligned} m_d^*(A) &= m_d^*(A \cap F_n) + m_d^*(A \cap {F_n}^c) \\ &= m_d^*(A \cap E_1) + \cdots + m_d^*(A \cap E_n) + m_d^*(A \cap {F_n}^c). \end{aligned}$$

Επειδή είναι $F_n \subseteq E$ συνεπάγεται $A \cap E^c \subseteq A \cap {F_n}^c$ και, επομένως,

$$m_d^*(A) \geq m_d^*(A \cap E_1) + \cdots + m_d^*(A \cap E_n) + m_d^*(A \cap E^c).$$

Τέλος, επειδή αυτό ισχύει για κάθε n, συνεπάγεται

$$m_d^*(A) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(A \cap E_n) + m_d^*(A \cap E^c) = m_d^*(A \cap E) + m_d^*(A \cap E^c).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι το E είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$.
Τώρα, θεωρούμε τη γενική περίπτωση κατά την οποία τα $E_1, E_2, \dots$ δεν είναι αναγκαστικά ξένα ανά δύο. Ορίζουμε

$${E_1}' = E_1 , \qquad {E_n}' = E_n \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1}) \quad \text{για} \quad n \geq 2.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα ${E_1}', {E_2}', \dots$ είναι ξένα ανά δύο και ότι $E = \cup_{n=1} {E_n}'$. Επειδή η $\mathcal{L}_d$ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$, συνεπάγεται ότι τα ${E_1}', {E_2}', \dots$ είναι μετρήσιμα στον $\mathbb{R}^d$. Επειδή δε τα σύνολα αυτά είναι ξένα ανά δύο και, επομένως, εμπίπτουν στην ειδική περίπτωση που εξετάσαμε προηγουμένως, συνεπάγεται ότι το E είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$. □

Πρόταση 2.8. *Κάθε διάστημα στον $\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$.*

Απόδειξη. Έστω διάστημα I στον $\mathbb{R}^d$. Θεωρούμε οποιοδήποτε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ με $m_d^*(A) < +\infty$ και οποιονδήποτε $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ στον $\mathbb{R}^d$ ώστε να είναι $A \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) < m_d^*(A) + \epsilon$.
Θεωρούμε, τώρα, οποιοδήποτε I_n. Το $J_n = I_n \cap I$ είναι διάστημα και είναι υποσύνολο του I_n. Τα υπερεπίπεδα τα οποία περιέχουν τις πλευρές του J_n χωρίζουν το I_n σε διαστήματα σχεδόν ξένα ανά δύο, ένα από τα οποία είναι το J_n. Ας συμβολίσουμε $J_n, J_n^{(1)}, \ldots, J_n^{(k_n)}$ τα διαστήματα αυτά. Προφανώς, είναι $I_n \cap I^c \subseteq J_n^{(1)} \cup \cdots \cup J_n^{(k_n)}$ και $I_n = J_n \cup J_n^{(1)}, \ldots, J_n^{(k_n)}$. Από το Λήμμα 2.2 συνεπάγεται ότι $V_d(I_n) = V_d(J_n) + V_d(J_n^{(1)}) + \cdots + V_d(J_n^{(k_n)})$. Άρα

$$\begin{aligned} m_d^*(I_n \cap I) + m_d^*(I_n \cap I^c) &\leq m_d^*(J_n) + m_d^*(J_n^{(1)}) + \cdots + m_d^*(J_n^{(k_n)}) \\ &= V_d(J_n) + V_d(J_n^{(1)}) + \cdots + V_d(J_n^{(k_n)}) = V_d(I_n). \end{aligned}$$

Επειδή είναι $A \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$ συνεπάγεται

$$\begin{aligned} m_d^*(A \cap I) + m_d^*(A \cap I^c) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(I_n \cap I) + \sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(I_n \cap I^c) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \big(m_d^*(I_n \cap I) + m_d^*(I_n \cap I^c)\big) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) \leq m_d^*(A) + \epsilon. \end{aligned}$$

Τέλος, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται ότι $m_d^*(A \cap I) + m_d^*(A \cap I^c) \leq m_d^*(A)$ και, επομένως, το I είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$. □

Πρόταση 2.9. *Κάθε ανοικτό και κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$.*

Απόδειξη. Έστω U οποιοδήποτε ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^d$. Επειδή το U είναι ανοικτό, για κάθε $x \in U$ υπάρχει κάποιο ανοικτό διάστημα J_x το οποίο περιέχει το x και είναι υποσύνολο του U. Μικραίνοντας λίγο το J_x και λόγω της πυκνότητας των ρητών στο σύνολο των πραγματικών, βλέπουμε ότι υπάρχει κάποιο ανοικτό διάστημα I_x *με τις συντεταγμένες των κορυφών του όλες ρητές*, το οποίο περιέχει το x και είναι υποσύνολο του J_x και, επομένως, του U. Αυτό γίνεται ως εξής. Αν $J_x = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$, τότε, επειδή το $x = (x_1, \ldots, x_n)$ περιέχεται στο J_x, είναι $a_1 < x_1 < b_1, \ldots, a_n < x_n < b_n$. Επιλέγουμε ρητούς $c_1, d_1, \ldots, c_n, d_n$ ώστε να είναι $a_1 < c_1 < x_1 < d_1 < b_1, \ldots, a_n < c_n < x_n < d_n < b_n$. Τότε το διάστημα $I_x = (c_1, d_1) \times \cdots \times (c_n, d_n)$ έχει τις ιδιότητες που θέλουμε.
Θεωρούμε, τώρα, όλα τα παραπάνω διαστήματα I_x που αντιστοιχούν σε όλα τα σημεία $x \in U$. Αυτά έχουν τις εξής ιδιότητες. Κάθε τέτοιο διάστημα είναι υποσύνολο του U, οπότε η ένωσή τους είναι υποσύνολο του U. Κάθε $x \in U$ περιέχεται σε ένα από αυτά τα διαστήματα - στο I_x - και, επομένως το U είναι υποσύνολο της ένωσης των διαστημάτων αυτών. Άρα το U είναι *ίσο* με την ένωση των διαστημάτων αυτών. Τα διαστήματα αυτά είναι *αριθμήσιμα* διότι οι συντεταγμένες των κορυφών τους είναι όλες ρητοί αριθμοί.
Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το U είναι ένωση αριθμήσιμων διαστημάτων και, επειδή κάθε διάστημα ανήκει στην $\mathcal{L}_d$ και η $\mathcal{L}_d$ είναι σ-άλγεβρα, συνεπάγεται ότι το U ανήκει στην $\mathcal{L}_d$.
Τέλος, έστω F οποιοδήποτε κλειστό $\subseteq \mathbb{R}^d$. Τότε το $U = F^c$ είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^d$, οπότε ανήκει στην $\mathcal{L}_d$ και, επομένως, το $F = U^c$ ανήκει στην $\mathcal{L}_d$. □

Ορισμός. Για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^d$ το οποίο είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$ ορίζουμε την ποσότητα $m_d(E)$ με τον τύπο

$$m_d(E) = m_d^*(E)$$

και την ονομάζουμε **(d-διάστατο) μέτρο Lebesgue του** E ή, πιο απλά, **(d-διάστατο) μέτρο του** E.

Πρέπει να τονιστεί ότι το $m_d^*(E)$ ορίζεται για *κάθε* $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ενώ η ποσότητα $m_d(E)$ ορίζεται - και είναι ίση με την $m_d^*(E)$ - *μόνο* για τα $E \subseteq \mathbb{R}^d$ τα οποία ανήκουν στην $\mathcal{L}_d$.

Ας δούμε συνοπτικά μερικές ιδιότητες του m_d, οι οποίες προκύπτουν αμέσως από αντίστοιχες ιδιότητες του m_d^* και της $\mathcal{L}_d$.

(1) $0 \leq m_d(E) \leq +\infty$ για κάθε $E \in \mathcal{L}_d$.

(2) Είναι $\emptyset, \mathbb{R}^d \in \mathcal{L}_d$ και $m_d(\emptyset) = 0$, $m_d(\mathbb{R}^d) = +\infty$.

(3) Είναι $I \in \mathcal{L}_d$ και $m_d(I) = V_d(I)$ για κάθε διάστημα I στον $\mathbb{R}^d$.

(4) Κάθε αριθμήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}^d$ ανήκει στην $\mathcal{L}_d$ και είναι $m_d(E) = 0$.

(5) Αν $E, F \in \mathcal{L}_d$ και $E \subseteq F$, τότε $m_d(E) \leq m_d(F)$.

(6) Αν $E, E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{L}_d$ και $E \subseteq E_1 \cup E_2 \cup \cdots$, τότε $m_d(E) \leq m_d(E_1) + m_d(E_2) + \cdots$.

(7) Αν $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{L}_d$, τα $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{L}_d$ είναι ξένα ανά δύο και $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots$, τότε $m_d(E) = m_d(E_1) + m_d(E_2) + \cdots$.

(8) Αν $F \in \mathcal{L}_d$ με $m_d(F) = 0$ και $E \subseteq F$, τότε $E \in \mathcal{L}_d$ και $m_d(E) = 0$.

Η (1) προκύπτει από την Πρόταση 2.2(1). Η (2) προκύπτει από την Πρόταση 2.2(4) και την Πρόταση 2.4(1). Η (3) προκύπτει από την Πρόταση 2.2(3) και την Πρόταση 2.8. Η (4) προκύπτει από την Πρόταση 2.3 και την Πρόταση 2.4(2). Η (5) προκύπτει από την Πρόταση 2.2(2). Η (6) προκύπτει από την Πρόταση 2.2(5). Η (7) προκύπτει από την Πρόταση 2.7 με $A = \mathbb{R}^d$. Τέλος, η (8) προκύπτει από την Πρόταση 2.2(2) και την Πρόταση 2.4(2).

Πρόταση 2.10. *Έστω ότι τα $E_1, E_2, \ldots$ είναι μετρήσιμα στον $\mathbb{R}^d$ και ισχύει $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n. Αν $E = \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$, τότε $m_d(E_n) \to m_d(E)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 \setminus E_1$, $F_3 = E_3 \setminus E_2$ κλπ. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα $F_1, F_2, \ldots$ είναι μετρήσιμα στον $\mathbb{R}^d$, ότι είναι ξένα ανά δύο, ότι $E = \cup_{k=1}^{+\infty} F_k$ και ότι $E_n = \cup_{k=1}^{n} F_k$. Επομένως,

$$m_d(E_n) = \sum_{k=1}^{n} m_d(F_k) \to \sum_{k=1}^{+\infty} m_d(F_k) = m_d(E).$$

□

Πρόταση 2.11. *Έστω ότι τα $E_1, E_2, \ldots$ είναι μετρήσιμα στον $\mathbb{R}^d$ και ισχύει $E_{n+1} \subseteq E_n$ για κάθε n. Αν $E = \cap_{n=1}^{+\infty} E_n$ και αν είναι $m_d(E_n) < +\infty$ για έναν τουλάχιστον n, τότε είναι $m_d(E_n) \to m_d(E_n)$.*

Απόδειξη. Έστω $m_d(E_{n_0}) < +\infty$. Τα $E_{n_0} \setminus E_{n_0+1}$, $E_{n_0} \setminus E_{n_0+2}$, $E_{n_0} \setminus E_{n_0+3}$ κλπ είναι μετρήσιμα στον $\mathbb{R}^d$, και είναι $E_{n_0} \setminus E_{n_0+n} \subseteq E_{n_0} \setminus E_{n_0+n+1}$ για κάθε $n \geq 1$. Επίσης, είναι $E_{n_0} \setminus E = \cup_{n=1}^{+\infty}(E_{n_0} \setminus E_{n_0+n})$. Από την Πρόταση 2.10 συνεπάγεται ότι

$$m_d(E_{n_0} \setminus E_{n_0+n}) \to m_d(E_{n_0} \setminus E).$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι είναι $m_d(E_{n_0}) = m_d(E) + m_d(E_{n_0} \setminus E)$ και $m_d(E_{n_0}) = m_d(E_{n_0+n}) + m_d(E_{n_0} \setminus E_{n_0+n})$. Από την $m_d(E_{n_0}) < +\infty$ συνεπάγεται ότι $m_d(E_{n_0} \setminus E) = m_d(E_{n_0}) - m_d(E)$ και $m_d(E_{n_0} \setminus E_{n_0+n}) = m_d(E_{n_0}) - m_d(E_{n_0+n})$. Άρα

$$m_d(E_{n_0}) - m_d(E_{n_0+n}) \to m_d(E_{n_0}) - m_d(E).$$

Πάλι, επειδή είναι $m_d(E_{n_0}) < +\infty$, συνεπάγεται $m_d(E_{n_0+n}) \to m_d(E)$ και, επομένως, $m_d(E_n) \to m_d(E)$. $\square$

Σχόλιο. Αν από την Πρόταση 2.11 παραλείψουμε την υπόθεση ότι είναι $m_d(E_n) < +\infty$ για έναν τουλάχιστον n, τότε το συμπέρασμα μπορεί να μην ισχύει. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε στον $\mathbb{R}^1$ τα σύνολα $E_n = [n, +\infty)$. Τότε είναι $E_{n+1} \subseteq E_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\cap_{n=1}^{+\infty} E_n = \emptyset$. Όμως, είναι $m_1(E_n) = +\infty$ (γιατί;) για κάθε n, αλλά $m_1(\emptyset) = 0$.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι το $[0,1]^d \setminus \mathbb{Q}^d$ είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$ και ότι $m_d([0,1]^d \setminus \mathbb{Q}^d) = 1$.

   Σχόλιο. Το $[0,1]^d \setminus \mathbb{Q}^d$ είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα συνόλου με θετικό μέτρο, το οποίο δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα.

2. Αν $E, F \in \mathcal{L}_d$, αποδείξτε ότι $m_d(E \cup F) + m_d(E \cap F) = m_d(E) + m_d(F)$.

3. Αν $E, F \in \mathcal{L}_d$, $E \subseteq F$ και $m_d(E) < +\infty$, αποδείξτε ότι $m_d(F \setminus E) = m_d(F) - m_d(E)$. Τι μπορείτε να πείτε αν είναι $m_d(E) = +\infty$;

4. Έστω $A_n \, (n \in \mathbb{N})$ υποσύνολα ενός συνόλου X. Το $\cap_{m=1}^{+\infty} \big(\cup_{n=m}^{+\infty} A_n \big)$ ονομάζεται **ανώτατο όριο** και το $\cup_{m=1}^{+\infty} \big(\cap_{n=m}^{+\infty} A_n \big)$ ονομάζεται **κατώτατο όριο** της ακολουθίας συνόλων (A_n). Συμβολίζουμε

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \cap_{m=1}^{+\infty} \Big(\cup_{n=m}^{+\infty} A_n \Big), \qquad \underline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \cup_{m=1}^{+\infty} \Big(\cap_{n=m}^{+\infty} A_n \Big).$$

   Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n \subseteq \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$.
   Αποδείξτε ότι το $\underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$ έχει στοιχεία του ακριβώς εκείνα τα $x \in X$ τα οποία ανήκουν σε όλα τα A_n από έναν δείκτη και πέρα. Επίσης, αποδείξτε ότι το $\overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$ έχει στοιχεία του ακριβώς εκείνα τα $x \in X$ τα οποία ανήκουν σε άπειρα A_n.
   Έστω $E_n \in \mathcal{L}_d$ για κάθε $n \geq 1$.
   (i) Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} m_d(E_n) < +\infty$, αποδείξτε ότι $m_d(\overline{\lim}_{n\to+\infty} E_n) = 0$.
   Υπόδειξη: Για κάθε $m \geq 1$ είναι $\overline{\lim}_{n\to+\infty} E_n \subseteq \cup_{n=m}^{+\infty} E_n$.
   (ii) Αποδείξτε ότι $m_d(\underline{\lim}_{n\to+\infty} E_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} m_d(E_n)$.
   Υπόδειξη: Γράψτε $F_m = \cap_{n=m}^{+\infty} E_n$ και παρατηρήστε ότι $F_m \subseteq E_m$ και $F_m \subseteq F_{m+1}$ για κάθε $m \geq 1$.
   (iii) Αν $m_d(\cup_{n=n_0}^{+\infty} E_n) < +\infty$ για έναν n_0, τότε $\overline{\lim}_{n\to+\infty} m_d(E_n) \leq m_d(\overline{\lim}_{n\to+\infty} E_n)$.
   Υπόδειξη: Γράψτε $F_m = \cup_{n=m}^{+\infty} E_n$ και παρατηρήστε ότι $E_m \subseteq F_m$ και $F_{m+1} \subseteq F_m$ για κάθε $m \geq 1$.

5. Αν $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $E \in \mathcal{L}_d$, $E \subseteq A$ και $m_d(E) < +\infty$, τότε αποδείξτε ότι $m_d^*(A \setminus E) = m_d^*(A) - m_d(E)$.
   Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον ορισμό του ότι $E \in \mathcal{L}_d$.

6. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και $E \in \mathcal{L}_d$. Αν $m_d^*(A \triangle E) = 0$, αποδείξτε ότι $A \in \mathcal{L}_d$.
   Υπόδειξη: Αποδείξτε πρώτα ότι $m_d^*(A \setminus E) = 0$, $m_d^*(E \setminus A) = 0$.

7. Αναδιατυπώστε τα αποτελέσματα της άσκησης 5 της ενότητας 2.2 ως εξής.
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ με $m_d^*(A) < +\infty$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}^d$ τέτοιο ώστε να είναι $A \subseteq U$ και $m_d(U) < m_d^*(A) + \epsilon$.
Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι

$$m_d^*(A) = \inf\{m_d(U) : A \subseteq U, U \text{ ανοικτό } \subseteq \mathbb{R}^d\}.$$

Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ υπάρχει σύνολο $G \subseteq \mathbb{R}^d$ το οποίο είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών $\subseteq \mathbb{R}^d$ και, επομένως, $G \in \mathcal{L}_d$ ώστε $A \subseteq G$ και $m_d(G) = m_d^*(A)$.

8. Έστω $A_n \subseteq \mathbb{R}^d$ $(n \in \mathbb{N})$ με $A_n \subseteq A_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$. Αποδείξτε ότι $m_d^*(\cup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim m_d^*(A_n)$.
Υπόδειξη: Σύμφωνα με την άσκηση 7, για κάθε n υπάρχει $G_n \in \mathcal{L}_d$ με $A_n \subseteq G_n$ και $m_d(G_n) = m_d^*(A_n)$. Κατόπιν, θεωρήστε τα $F_n = G_1 \cup \cdots \cup G_n$ και αποδείξτε ότι $A \subseteq F_n \subseteq F_{n+1}$ και $m_d(F_n) = m_d^*(A_n)$.

9. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι $m_d^*(A \cup B) + m_d^*(A \cap B) \leq m_d^*(A) + m_d^*(B)$.
Υπόδειξη: Βάσει της άσκησης 7, υπάρχουν $G, H \in \mathcal{L}_d$ με $A \subseteq G$, $B \subseteq H$ και $m_d(G) = m_d^*(A)$, $m_d(H) = m_d^*(B)$. Χρησιμοποιήστε την άσκηση 2.

10. Έστω $E \subseteq [0,1]$ και $F = \{x^2 : x \in E\}$. Αν $m_1(E) = 0$, αποδείξτε ότι $m_1(F) = 0$.
Υπόδειξη: Πάρτε $\epsilon > 0$ και θεωρήστε ανοικτά διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ ώστε να είναι $E \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} V_1(I_n) < \epsilon$. Θεωρήστε τα διαστήματα $I_n{}' = I_n \cap [0,1]$, οπότε $E \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} I_n{}'$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} V_1(I_n{}') < \epsilon$. Για κάθε $I_n{}'$ θεωρήστε το αντίστοιχο διάστημα J_n με άκρα τα τετράγωνα των άκρων του $I_n{}'$. Αποδείξτε ότι $F \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} J_n$, οπότε $m_1^*(F) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} V_1(J_n) < 2\epsilon$.

11. Έστω $E \in \mathcal{L}_1$. Ορίζουμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = m_1\big(E \cap (-\infty, x]\big)$$

και υποθέτουμε ότι το E είναι τέτοιο ώστε η f να μην είναι ταυτοτικά $+\infty$. Για παράδειγμα, το E θα μπορούσε να είναι κάτω φραγμένο. Αποδείξτε ότι
(i) η f είναι αύξουσα, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = m_1(E)$ και $f(x) < +\infty$ για κάθε x και
(ii) η f είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1, δηλαδή ισχύει

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$$

για κάθε x_1, x_2 . Επομένως, η f είναι συνεχής.

12. Έστω $E \in \mathcal{L}_1$. Αποδείξτε ότι για κάθε y με $0 \leq y \leq m_1(E)$ υπάρχει $F \in \mathcal{L}_1$ με $F \subseteq E$ και $m_1(F) = y$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής στη συνάρτηση f της άσκησης 11.

13. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ με $m_d^*(A) > 0$ και $0 < \lambda < 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I στον $\mathbb{R}^d$ ώστε να είναι $m_d^*(A \cap I) > \lambda V_d(I)$.
Υπόδειξη: Κατ' αρχάς, έστω $0 < m_d^*(A) < +\infty$. Υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_n\,(n \in \mathbb{N})$ έτσι ώστε να είναι $A \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) < \frac{1}{\lambda} m_d^*(A)$. Παρατηρήστε ότι $m_d^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*(A \cap I_n)$. Άρα είναι $m_d^*(A \cap I_n) > \lambda V_d(I_n)$ για έναν τουλάχιστον n. Τέλος, έστω $m_d^*(A) = +\infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει διάστημα J ώστε $0 < m_d^*(A \cap J) < +\infty$. Γράψτε $B = A \cap J$ και εφαρμόστε το αποτέλεσμα της πρώτης περίπτωσης στο B.

14. Έστω $E \in \mathcal{L}_d$ και $0 < \delta < 1$ με την ιδιότητα: $m_d(E \cap I) > \delta V_d(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα I στον $\mathbb{R}^d$. Αποδείξτε ότι $m_d(E^c) = 0$.
Υπόδειξη: Είναι $m_d(E^c \cap I) < (1-\delta)V_d(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα I στον $\mathbb{R}^d$. Υποθέστε $m_d(E^c) > 0$ και καταλήξτε σε άτοπο χρησιμοποιώντας την άσκηση 13.

15. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Ένα $E \subseteq \mathbb{R}^d$ χαρακτηρίζεται **μετρήσιμο κάλυμμα του** A αν $E \in \mathcal{L}_d$, $A \subseteq E$ και, δεν υπάρχει $F \subseteq E \setminus A$ με $F \in \mathcal{L}_d$ και $m_d(F) > 0$. Αποδείξτε ότι
(i) αν τα E_1, E_2 είναι μετρήσιμα καλύμματα του A, τότε είναι $m_d(E_1 \triangle E_2) = 0$ και $m_d(E_1) = m_d(E_2)$,
Υπόδειξη: Δείτε ότι $E_1 \setminus E_2 \subseteq E_1 \setminus A$ και $E_2 \setminus E_1 \subseteq E_2 \setminus A$.
(ii) αν το E_1 είναι μετρήσιμο κάλυμμα του A, $E_2 \in \mathcal{L}_d$, $A \subseteq E_2$ και $m_d(E_1 \triangle E_2) = 0$, τότε το E_2 είναι μετρήσιμο κάλυμμα του A.
(iii) για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ υπάρχει μετρήσιμο κάλυμμα G του A με $m_d(G) = m_d^*(A)$.
Υπόδειξη: Αν $m_d^*(A) < +\infty$, αποδείξτε ότι το G που εμφανίζεται στην άσκηση 7 είναι μετρήσιμο κάλυμμα του A. Έστω $m_d^*(A) = +\infty$. Πάρτε τα $I_n = [-n, n]^d$ και τα $A_n = A \cap I_n$, για τα οποία είναι $m_d^*(A_n) < +\infty$ και $A = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Θεωρήστε μετρήσιμο κάλυμμα G_n του A_n και το $G = \cup_{n=1}^{+\infty} G_n$. Έστω $F \in \mathcal{L}_d$ και $F \subseteq G \setminus A$. Θεωρήστε τα $F_n = F \cap G_n$, οπότε $F = \cup_{n=1}^{+\infty} F_n$ και $F_n \subseteq G_n \setminus A_n$.

16. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Ορίζουμε το **εσωτερικό μέτρο** του A ως

$$m_{d*}(A) = \sup\{m_d(F) : F \text{ κλειστό } \subseteq A\}.$$

Αποδείξτε ότι
(i) $m_{d*}(A) \leq m_d^*(A)$,
(ii) $m_{d*}(\emptyset) = 0$, $m_{d*}(\mathbb{R}^d) = +\infty$ και
(iii) υπάρχει H το οποίο είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών $\subseteq \mathbb{R}^d$ και, επομένως, $H \in \mathcal{L}_d$ ώστε $H \subseteq A$ και $m_d(H) = m_{d*}(A)$.
Υπόδειξη: Πάρτε κλειστά $F_n \subseteq A$ ώστε $m_d(F_n) \to m_{d*}(A)$.

17. (Συνέχεια της 16.) Αν $A \in \mathcal{L}_d$, αποδείξτε ότι $m_{d*}(A) = m_d^*(A) = m_d(A)$.
Υπόδειξη: Το $m_d^*(A) = m_d(A)$ είναι προφανές. Έστω A φραγμένο και πάρτε ένα οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $I \supseteq A$. Βάσει της άσκησης 7, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}^d$ ώστε $I \setminus A \subseteq U$ και $m_d(U) < m_d(I \setminus A) + \epsilon$. Τότε το $F = I \setminus U$ είναι κλειστό $\subseteq A$ και $m_d(F) > m_d(A) - \epsilon$. Άρα $m_{d*}(A) = m_d(A)$. Τέλος, έστω μη φραγμένο A. Θεωρήστε τα φραγμένα $A_n = A \cap [-n, n]^d$ για τα οποία ισχύει $A_n \subseteq A_{n+1}$ και $A = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$ και, επομένως, $m_d(A_n) \to m_d(A)$. Βάσει του πρώτου μέρος, υπάρχουν κλειστά $F_n \subseteq A_n$ ώστε $m_d(F_n) > m_d(A_n) - \frac{1}{n}$. Άρα $m_d(F_n) \to m_d(A)$ και, επομένως, $m_{d*}(A) = m_d(A)$.
Αν $m_{d*}(A) = m_d^*(A) < +\infty$, αποδείξτε ότι $A \in \mathcal{L}_d$.
Υπόδειξη: Βάσει των ασκήσεων 7 και 16, υπάρχουν $H, G \in \mathcal{L}_d$ ώστε $H \subseteq A \subseteq G$ και $m_d(H) = m_{d*}(A)$, $m_d(G) = m_d^*(A)$, οπότε $m_d(H) = m_d(G) < +\infty$. Άρα $m_d(G \setminus H) = 0$ και, επειδή, $A \setminus H \subseteq G \setminus H$, είναι $(A \setminus H) \in \mathcal{L}_d$.

18. Ένα $E \subseteq \mathbb{R}^d$ χαρακτηρίζεται **μετρήσιμος πυρήνας του** A αν $E \in \mathcal{L}_d$, $E \subseteq A$ και δεν υπάρχει $F \subseteq A \setminus E$ με $F \in \mathcal{L}_d$ και $m_d(F) > 0$. Αποδείξτε ότι
(i) το E είναι μετρήσιμος πυρήνας του A αν και μόνο αν το E^c είναι μετρήσιμο κάλυμμα του A^c (δείτε την άσκηση 15),
(ii) αν τα E_1 και E_2 είναι μετρήσιμοι πυρήνες του A, τότε είναι $m_d(E_1 \triangle E_2) = 0$ και $m_d(E_1) = m_d(E_2)$ και
(iii) για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ υπάρχει μετρήσιμος πυρήνας H του A με $m_d(H) = m_{d*}(A)$.

Υπόδειξη: Έστω $m_{d*}(A) < +\infty$. Αποδείξτε ότι το H που εμφανίζεται στην άσκηση 16 είναι μετρήσιμος πυρήνας του A. Γι αυτό πάρτε $F \subseteq A \setminus H$ με $F \in \mathcal{L}_d$ και υποθέστε ότι $m_d(F) > 0$. Βάσει της άσκησης 17, υπάρχει κλειστό $F' \subseteq F$ ώστε $m_d(F') > 0$. Θεωρήστε τα κλειστά F_n στην υπόδειξη της άσκησης 17 και τα κλειστά $F_n \cup F' \subseteq A$ και παρατηρήστε ότι είναι $m_d(F_n \cup F') > m_{d*}(A)$ για αρκετά μεγάλο n. Τέλος, έστω $m_{d*}(A) = +\infty$. Θεωρήστε τα $A_n = A \cap [-n, n]^d$ για τα οποία είναι $m_{d*}(A_n) < +\infty$ και $A = \cup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Για κάθε n πάρτε μετρήσιμο πυρήνα H_n του A_n και αποδείξτε ότι το $H = \cup_{n=1}^{+\infty} H_n$ είναι μετρήσιμος πυρήνας του A με $m_d(H) = +\infty$.

19. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $E \in \mathcal{L}_d$ και $A \subseteq E$. Αποδείξτε ότι $m_d^*(A) + m_{d*}(E \setminus A) = m_d(E)$.

20. Έστω σύνολο X. Αποδείξτε ότι οποιαδήποτε τομή σ-αλγεβρών υποσυνόλων του X είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X.

21. Έστω $\mathcal{C}$ μια οποιαδήποτε οικογένεια υποσυνόλων του X. Συμβολίζουμε $\sigma(\mathcal{C})$ την τομή όλων των σ-αλγεβρών υποσυνόλων του X οι οποίες περιέχουν την $\mathcal{C}$. Αποδείξτε ότι η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X η οποία περιέχει την $\mathcal{C}$. Δηλαδή
(i) $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$,
(ii) η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X και
Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση 20.
(iii) για κάθε $\mathcal{A}$ η οποία είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X με $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ συνεπάγεται $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$.
Αν η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X, αποδείξτε ότι $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.
Έστω $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ δυο οικογένειες υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2)$ αν και μόνο αν $\mathcal{C}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_2)$ και $\mathcal{C}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_1)$.

22. Συμβολίζουμε $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{U}_d)$, όπου $\mathcal{U}_d$ είναι η οικογένεια όλων των ανοικτών $\subseteq \mathbb{R}^d$. Δηλαδή, η $\mathcal{B}_d$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ η οποία περιέχει όλα τα ανοικτά $\subseteq \mathbb{R}^d$. Η $\mathcal{B}_d$ ονομάζεται **Borel σ-άλγεβρα** στον $\mathbb{R}^d$ και τα στοιχεία της χαρακτηρίζονται ως **Borel σύνολα** στον $\mathbb{R}^d$.
Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτό, κάθε κλειστό, κάθε αριθμήσιμη τομή ανοικτών και κάθε αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^d$ είναι Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^d$. Επίσης, κάθε διάστημα στον $\mathbb{R}^d$ είναι Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^d$.
Αποδείξτε ότι $\mathcal{B}_d \subseteq \mathcal{L}_d$, δηλαδή κάθε Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$.
Αποδείξτε ότι $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{F}_d)$ και $\mathcal{B}_d = \sigma(\mathcal{I}_d)$, όπου $\mathcal{F}_d$ είναι η οικογένεια όλων των κλειστών $\subseteq \mathbb{R}^d$ και $\mathcal{I}_d$ είναι η οικογένεια όλων των διαστημάτων ή όλων των ανοικτών διαστημάτων ή όλων των κλειστών διαστημάτων στον $\mathbb{R}^d$.
Υπόδειξη: Δείτε το τελευταίο μέρος της άσκησης 21.

23. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$.
Αποδείξτε ότι $A \in \mathcal{L}_d$ αν και μόνο αν υπάρχει Borel σύνολο G στον $\mathbb{R}^d$ ώστε να είναι $A \subseteq G$ και $m_d^*(G \setminus A) = 0$.
Υπόδειξη: Το G που περιγράφεται στην άσκηση 15 είναι Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^d$. Πιο συγκεκριμένα, αν $m_d^*(A) < +\infty$, τότε το G είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών και, αν $m_d^*(A) = +\infty$, τότε το G είναι αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων τομών ανοικτών. Τώρα, αν $A \in \mathcal{L}_d$, από τον ορισμό του μετρήσιμου καλύμματος συνεπάγεται $m_d(G \setminus A) = 0$. Αντιστρόφως, αν $m_d^*(G \setminus A) = 0$, τότε $(G \setminus A) \in \mathcal{L}_d$.
Αποδείξτε ότι $A \in \mathcal{L}_d$ αν και μόνο αν υπάρχει Borel σύνολο H στον $\mathbb{R}^d$ ώστε να είναι $H \subseteq A$ και $m_d^*(A \setminus H) = 0$.
Υπόδειξη: Προκύπτει από το προηγούμενο, γράφοντας $A \setminus H = H^c \setminus A^c$.

Έστω $m_d^*(A) < +\infty$. Αποδείξτε ότι $A \in \mathcal{L}_d$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει B το οποίο είναι πεπερασμένη ένωση διαστημάτων ώστε $m_d^*(A \triangle B) < \epsilon$.
Υπόδειξη: Υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ ώστε $A \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) < m_d^*(A) + \frac{\epsilon}{2}$. Επίσης, υπάρχει N ώστε $\sum_{n=N+1}^{+\infty} V_d(I_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Αν $B = \cup_{n=1}^{N} I_n$, τότε $A \setminus B \subseteq \cup_{n=N+1}^{+\infty} I_n$ και $B \setminus A \subseteq (\cup_{n=1}^{+\infty} I_n) \setminus A$. Τώρα, αν $A \in \mathcal{L}_d$, συνεπάγεται $m_d(A \setminus B) \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} V_d(I_n) < \frac{\epsilon}{2}$ και $m_d(B \setminus A) \leq m_d(\cup_{n=1}^{+\infty} I_n) - m_d(A) < \frac{\epsilon}{2}$ και, επομένως, $m_d(A \triangle B) < \epsilon$. Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε n υπάρχει B_n το οποίο είναι πεπερασμένη ένωση διαστημάτων και, επομένως, $B_n \in \mathcal{L}_d$ ώστε $m_d^*(A \triangle B_n) < \frac{1}{2^n}$. Γράφουμε $F = \cap_{m=1}^{+\infty} \big(\cup_{n=m}^{+\infty} B_n \big)$ και τότε $F \in \mathcal{L}_d$. Είναι $F \setminus A = \cap_{m=1}^{+\infty} \big(\cup_{n=m}^{+\infty} (B_n \setminus A) \big)$. Άρα για κάθε m ισχύει $F \setminus A \subseteq \cup_{n=m}^{+\infty} (B_n \setminus A)$, οπότε $m_d^*(F \setminus A) \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m-1}}$ και, επομένως, $m_d^*(F \setminus A) = 0$. Επίσης, $A \setminus F = \cup_{m=1}^{+\infty} \big(\cap_{n=m}^{+\infty} (A \setminus B_n) \big) = \cup_{m=M}^{+\infty} \big(\cap_{n=m}^{+\infty} (A \setminus B_n) \big) \subseteq \cup_{m=M}^{+\infty} (A \setminus B_m)$ για κάθε M. Άρα $m_d^*(A \setminus F) \leq \sum_{m=M}^{+\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{M-1}}$ για κάθε M, οπότε $m_d^*(A \setminus F) = 0$. Συμπεραίνουμε ότι $m_d^*(A \triangle F) = 0$ και, βάσει της άσκησης 6, ότι $A \in \mathcal{L}_d$.

2.4 Το σύνολο του Cantor.

Θεωρούμε την εξής ακολουθία συνόλων

$$F_0 = [0, 1],$$

$$F_1 = \Big[0, \frac{1}{3}\Big] \cup \Big[\frac{2}{3}, 1\Big],$$

$$F_2 = \Big[0, \frac{1}{9}\Big] \cup \Big[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\Big] \cup \Big[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\Big] \cup \Big[\frac{8}{9}, 1\Big],$$

$$F_3 = \Big[0, \frac{1}{27}\Big] \cup \Big[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\Big] \cup \Big[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\Big] \cup \Big[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\Big] \cup \Big[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\Big] \cup \Big[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\Big] \cup \Big[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\Big] \cup \Big[\frac{26}{27}, 1\Big],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Τα σύνολα αυτά δημιουργούνται ως εξής. Ξεκινάμε με το $F_0 = [0, 1]$. Χωρίζουμε το $[0, 1]$ σε τρία ισομήκη κλειστά διαστήματα και κρατάμε τα δυο ακριανά: η ένωσή τους είναι το F_1. Σε καθένα από τα δυο κλειστά διαστήματα που αποτελούν το F_1 επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, δηλαδή το χωρίζουμε σε τρία ισομήκη κλειστά διαστήματα και κρατάμε τα δυο ακριανά: η ένωση των τεσσάρων διαστημάτων που προκύπτουν είναι το F_2. Συνεχίζουμε επ' άπειρον.

Είναι φανερό ότι για κάθε $n \geq 0$ το σύνολο F_n είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Άρα κάθε F_n είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με μέτρο Lebesgue $m_1(F_n) = 2^n \frac{1}{3^n} = \big(\frac{2}{3}\big)^n$. Είναι, επίσης, φανερό ότι είναι $F_{n+1} \subseteq F_n$ για κάθε $n \geq 0$.

Ορισμός. Ορίζουμε το σύνολο

$$C = \cap_{n=0}^{+\infty} F_n .$$

Το C ονομάζεται **σύνολο του Cantor**.

Το C είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ως τομή κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 2.11, είναι

$$m_1(C) = \lim_{n \to +\infty} m_1(F_n) = \lim_{n \to +\infty} \Big(\frac{2}{3}\Big)^n = 0.$$

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι το C δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι το C είναι αριθμήσιμο και έστω $C = \{x_1, x_2, \ldots\} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ένα από τα δυο διαστήματα που αποτελούν το F_1 *δεν* περιέχει τον x_1. Ονομάζουμε I_1 αυτό το διάστημα. Το I_1 γεννά δυο διαστήματα από αυτά που αποτελούν το F_2: τουλάχιστον ένα από αυτά τα δυο διαστήματα *δεν* περιέχει τον x_2. Ονομάζουμε I_2 αυτό το διάστημα. Το I_2 γεννά δυο διαστήματα από αυτά που αποτελούν το F_3: τουλάχιστον ένα από αυτά τα δυο διαστήματα *δεν* περιέχει τον x_3. Ονομάζουμε I_3 αυτό το διάστημα. Συνεχίζουμε επ' άπειρον. Με αυτόν τον τρόπο σχηματίζεται μια ακολουθία κλειστών διαστημάτων $I_1, I_2, I_3, \dots$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $I_n \subseteq F_n$ για κάθε $n \geq 1$,

(ii) $x_n \notin I_n$ για κάθε $n \geq 1$,

(iii) $I_{n+1} \subseteq I_n$ για κάθε $n \geq 1$ και

(iv) $V_1(I_n) = \frac{1}{3^n} \to 0$.

Αν συμβολίσουμε $I_n = [a_n, b_n]$, τότε είναι

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \cdots\cdots \leq b_{n+1} \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 .$$

Άρα η ακολουθία (a_n) των αριστερών άκρων είναι αύξουσα και άνω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει. Ομοίως, η ακολουθία (b_n) των δεξιών άκρων είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη και, επομένως, συγκλίνει. Αν $a_n \to a$ και $b_n \to b$, τότε είναι $b_n - a_n = V_1(I_n) \to 0$ και, επομένως, $a = b$. Συμβολίζουμε $x = a = b$ το κοινό όριο των δυο ακολουθιών. Άρα είναι

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq \cdots \leq x \leq \cdots \leq b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 .$$

Αυτό σημαίνει ότι ο x ανήκει σε κάθε $[a_n, b_n] = I_n$. Άρα ο x ανήκει σε κάθε F_n και, επομένως, ο x ανήκει στο C. Από την άλλη μεριά, βλέπουμε ότι για κάθε $n \geq 1$ ισχύει $x \in I_n$ και $x_n \notin I_n$. Επομένως, είναι $x \neq x_n$ για κάθε $n \geq 1$. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο: $x \in C$ και $x \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Το C αποτελεί παράδειγμα υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ το οποίο είναι υπεραριθμήσιμο και έχει μέτρο $m_1(C) = 0$.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι τα στοιχεία του συνόλου του Cantor είναι ακριβώς όλοι οι αριθμοί στο $[0,1]$ οι οποίοι έχουν τριαδικό ανάπτυγμα από το οποίο λείπει τελείως το τριαδικό ψηφίο 1.

2. Έστω A το σύνολο των $x \in [0,1]$ από τη δεκαδική παράσταση των οποίων λείπει τελείως ένα συγκεκριμένο δεκαδικό ψηφίο - το 6 για παράδειγμα. Ακολουθήστε την επαγωγική διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor, χωρίζοντας κάθε φορά σε δέκα (αντί τρία) υποδιαστήματα, για να απεικονίσετε το σύνολο A στην πραγματική ευθεία και για να γράψετε το A ως $A = \cap_{n=1}^{+\infty} F_n$, όπου τα F_n είναι συγκεκριμένα κλειστά σύνολα. Τέλος, αποδείξτε ότι
(i) το A είναι κλειστό σύνολο και δεν περιέχει ανοικτά διαστήματα,
(ii) το A είναι υπεραριθμήσιμο και
(iii) $m_1(A) = 0$.

3. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοικτό διάστημα μήκους $\frac{\theta}{3^n}$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Ο θ είναι ένας προεπιλεγμένος αριθμός με $0 < \theta < 1$. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο *τύπου Cantor* C_θ. (Το σύνολο του Cantor αντιστοιχεί στον $\theta = 1$.) Αποδείξτε ότι
(i) το C_θ είναι κλειστό σύνολο και δεν περιέχει ανοικτά διαστήματα,
(ii) το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο και
(iii) $m_1(C_\theta) = 1 - \theta > 0$.

4. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι κατασκευής συνόλων *τύπου Cantor*. Ένας σχετικά απλός τρόπος είναι ο εξής.
Έστω αριθμός λ με $0 < \lambda < 1$. Ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ (με $a < b$) γεννά δυο ισομήκη κλειστά υποδιαστήματά του απορρίπτοντας το ανοικτό υποδιάστημα του που είναι συμμετρικό ως προς το μέσο $\frac{a+b}{2}$ και έχει μήκος $\lambda(b-a)$. Προφανώς, τα δυο διαστήματα που γεννιούνται έχουν συνολικό μήκος $(1-\lambda)(b-a)$.
Θεωρούμε αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ με την ιδιότητα $0 < \lambda_n < 1$ για κάθε n. Παίρνουμε $F_0 = [0,1]$. Το $[0,1]$ γεννά δυο κλειστά διαστήματα με τη μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου με $\lambda = \lambda_1$. Το F_1 είναι η ένωση των δυο αυτών κλειστών διαστημάτων. Κατόπιν, καθένα από τα δυο κλειστά διαστήματα που αποτελούν το F_1 γεννά δυο κλειστά διαστήματα με την ίδια μέθοδο με $\lambda = \lambda_2$. Το F_2 είναι η ένωση των τεσσάρων κλειστών διαστημάτων που μόλις γεννήθηκαν. Συνεχίζουμε τη διαδικασία επ' άπειρον. Καθένα από τα 2^{n-1} κλειστά διαστήματα που αποτελούν το F_{n-1} γεννά δυο κλειστά διαστήματα με την ίδια μέθοδο με $\lambda = \lambda_n$. Το F_n είναι η ένωση των 2^n κλειστών διαστημάτων που μόλις γεννήθηκαν. Τέλος, ορίζουμε το $A = \cap_{n=1}^{+\infty} F_n$. (Το σύνολο του Cantor αντιστοιχεί σε $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \frac{1}{3}$.)
Η ακολουθία με n-οστό όρο $(1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_n) > 0$ είναι, προφανώς, γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη, οπότε συγκλίνει σε αριθμό ≥ 0. Αποδείξτε ότι
$$(1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_n) \to m_1(A).$$
Αποδείξτε ότι είναι $m_1(A) > 0$ αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n < +\infty$.
Υπόδειξη: Έστω $m_1(A) > 0$. Από τη γνωστή ανισότητα $1 + x \leq e^x$ συνεπάγεται ότι $m_1(A) \leq (1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_n) \leq e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}$ και, επομένως, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \leq \log \frac{1}{m_1(A)}$ για κάθε n. Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \leq \log \frac{1}{m_1(A)} < +\infty$. Αντιστρόφως, έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n < +\infty$. Τότε υπάρχει n_0 ώστε να είναι $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \lambda_n < \frac{1}{2}$. Άρα $(1-\lambda_{n_0})\cdots(1-\lambda_n) \geq 1-(\lambda_{n_0}+\cdots+\lambda_n) > 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$, οπότε $m_1(A) \geq (1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_{n_0-1})\frac{1}{2} > 0$.

2.5 Μέτρο Lebesgue, αφφινικοί μετασχηματισμοί και στερεές κινήσεις.

Σ' αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του μέτρου σε σχέση με τις μεταφορές στον $\mathbb{R}^d$ και σε σχέση με τους γραμμικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^d$.

Ορισμός. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Ονομάζουμε **μεταφορά κατά** x_0 τη συνάρτηση $T_{x_0} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ με τύπο
$$T_{x_0}(x) = x + x_0$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ το $T_{x_0}(x) = x + x_0$ το ονομάζουμε **μεταφορά του** x **κατά** x_0. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ονομάζουμε **μεταφορά του** A **κατά** x_0 την εικόνα του A μέσω της T_{x_0}, δηλαδή το σύνολο $T_{x_0}(A) = \{T_{x_0}(a) : a \in A\} = \{a + x_0 : a \in A\} \subseteq \mathbb{R}^d$. Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε και $A + x_0$. Δηλαδή,
$$A + x_0 = \{a + x_0 : a \in A\}.$$

Φυσικά, γράφουμε $x - x_0$ αντί $x + (-x_0)$ και $A - x_0$ αντί $A + (-x_0)$. Επομένως, $A - x_0 = \{a - x_0 : a \in A\}$. Οι παρακάτω σχέσεις αποδεικνύονται πολύ εύκολα και θα τις χρησιμοποιήσουμε σε λίγο.
$$(A + x_0) - x_0 = A, \qquad \text{αν } A \subseteq B \text{ τότε } A + x_0 \subseteq B + x_0,$$
$$\Big(\bigcup A\Big) + x_0 = \bigcup(A + x_0), \quad \Big(\bigcap A\Big) + x_0 = \bigcap(A + x_0), \quad (A + x_0)^c = A^c + x_0.$$

Έστω
$$I=(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_d,b_d)$$
οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα στον $\mathbb{R}^d$ και $x_0=({x_0}^{(1)},\dots,{x_0}^{(d)})\in\mathbb{R}^d$. Θεωρούμε και το διάστημα
$$J=(a_1+{x_0}^{(1)},b_1+{x_0}^{(1)})\times\cdots\times(a_d+{x_0}^{(d)},b_d+{x_0}^{(d)}).$$
Τότε για κάθε $x=(x_1,\dots,x_d)$ και για το αντίστοιχο $y=x+x_0=(y_1,\dots,y_d)$ ισχύει $y_k=x_k+{x_0}^{(k)}$ για κάθε k. Άρα, $y\in I+x_0$ αν και μόνο αν $x\in I$ αν και μόνο αν $a_k<x_k<b_k$ για κάθε k αν και μόνο αν $a_k+{x_0}^{(k)}<y_k<b_k+{x_0}^{(k)}$ για κάθε k αν και μόνο αν $y\in J$. Επομένως,
$$I+x_0=J$$
και $V_d(I+x_0)=V_d(J)=\big(b_1+{x_0}^{(1)}-a_1-{x_0}^{(1)}\big)\cdots\big(b_d+{x_0}^{(d)}-a_d-{x_0}^{(d)}\big)=(b_1-a_1)\cdots(b_d-a_d)=V_d(I)$.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η μεταφορά κατά x_0 κάθε ανοικτού διαστήματος I στον $\mathbb{R}^d$ είναι ανοικτό διάστημα στον $\mathbb{R}^d$ με d-διάστατο όγκο ίσο με τον d-διάστατο όγκο του I.

Έστω $A\subseteq\mathbb{R}^d$ και $x_0\in\mathbb{R}^d$. Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι $m_d^*(A+x_0)\le m_d^*(A)$. Αν $m_d^*(A)=+\infty$, η ανισότητα είναι προφανής. Έστω $m_d^*(A)<+\infty$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon>0$, οπότε υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_1,I_2,\dots$ στον $\mathbb{R}^d$ ώστε $A\subseteq\cup_{n=1}^{+\infty}I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty}V_d(I_n)<m_d^*(A)+\epsilon$. Συνεπάγεται $A+x_0\subseteq\big(\cup_{n=1}^{+\infty}I_n\big)+x_0=\cup_{n=1}^{+\infty}(I_n+x_0)$, οπότε
$$\begin{aligned}m_d^*(A+x_0)&\le\sum_{n=1}^{+\infty}m_d^*(I_n+x_0)=\sum_{n=1}^{+\infty}V_d(I_n+x_0)\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}V_d(I_n)<m_d^*(A)+\epsilon.\end{aligned}$$
Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon>0$, συνεπάγεται $m_d^*(A+x_0)\le m_d^*(A)$. Αφού αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $A\subseteq\mathbb{R}^d$ και κάθε $x_0\in\mathbb{R}^d$, την εφαρμόζουμε στο $A+x_0$ και στο $-x_0$ και βρίσκουμε $m_d^*(A)=m_d^*\big((A+x_0)-x_0\big)\le m_d^*(A+x_0)$. Συνδυάζοντας με την αντίθετη ανισότητα συμπεραίνουμε ότι $m_d^*(A+x_0)=m_d^*(A)$.

Πρόταση 2.12. *Έστω $x_0\in\mathbb{R}^d$. Τότε για κάθε $A\subseteq\mathbb{R}^d$ ισχύει*
$$m_d^*(A+x_0)=m_d^*(A).$$
Επίσης, για κάθε $E\in\mathcal{L}_d$ συνεπάγεται $E+x_0\in\mathcal{L}_d$ και
$$m_d(E+x_0)=m_d(E).$$
Απόδειξη. Η πρώτη ισότητα έχει ήδη αποδειχτεί.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $A\subseteq\mathbb{R}^d$ και έχουμε
$$\begin{aligned}&m_d^*\big(A\cap(E+x_0)\big)+m_d^*\big(A\cap(E+x_0)^c\big)\\&\quad=m_d^*\big(\big((A-x_0)+x_0\big)\cap(E+x_0)\big)+m_d^*\big(\big((A-x_0)+x_0\big)\cap(E^c+x_0)\big)\\&\quad=m_d^*\big(\big((A-x_0)\cap E\big)+x_0\big)+m_d^*\big(\big((A-x_0)\cap E^c\big)+x_0\big)\\&\quad=m_d^*\big((A-x_0)\cap E\big)+m_d^*\big((A-x_0)\cap E^c\big)\\&\quad=m_d^*(A-x_0)=m_d^*(A),\end{aligned}$$
όπου η προτελευταία ισότητα ισχύει διότι $E\in\mathcal{L}_d$.
Άρα $E+x_0\in\mathcal{L}_d$. Τέλος, επειδή $E\in\mathcal{L}_d$ και $E+x_0\in\mathcal{L}_d$, συνεπάγεται
$$m_d(E+x_0)=m_d^*(E+x_0)=m_d^*(E)=m_d(E).$$
□

Η Πρόταση 2.12 λέει ότι, *αν μεταφέρουμε ένα μετρήσιμο σύνολο, τότε το σύνολο στην νέα του θέση είναι και πάλι μετρήσιμο και το μέτρο του παραμένει αμετάβλητο*.

Θα δούμε, τώρα, τι γίνεται αν εφαρμόσουμε γραμμικούς μετασχηματισμούς σε μετρήσιμα σύνολα.

Ορισμός. Μια συνάρτηση $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ χαρακτηρίζεται **γραμμικός μετασχηματισμός** του $\mathbb{R}^d$ αν

$$T(x+y) = T(x) + T(y), \qquad T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

Οι δυο σχέσεις του ορισμού συνδυάζονται και επεκτείνονται με την αρχή της επαγωγής στην

$$T(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 T(x_1) + \cdots + \lambda_n T(x_n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Ας θεωρήσουμε τα γνωστά μοναδιαία στοιχεία του $\mathbb{R}^d$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \ldots \qquad e_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

και τις αντίστοιχες εικόνες τους μέσω του μετασχηματισμού T

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} t_{1,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{d,1} \end{pmatrix} \qquad \ldots \qquad T(e_d) = \begin{pmatrix} t_{1,d} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{d,d} \end{pmatrix}.$$

Τότε για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ έχουμε $x = x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d$ και, επομένως,

$$\begin{aligned} T(x) = x_1 T(e_1) + \cdots + x_d T(e_d) &= \begin{pmatrix} t_{1,1}x_1 + \cdots + t_{1,d}x_d \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{d,1}x_1 + \cdots + t_{d,d}x_d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & t_{1,d} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{d,1} & \cdot & \cdot & \cdot & t_{d,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ορισμός. Ο $d \times d$ πίνακας $(t_{i,j})$ που εμφανίζεται στην τελευταία γραμμή συμβολίζεται $[T]$ και βλέπουμε ότι ο $[T]$ προκύπτει από τον T γράφοντας τα $T(e_1), \ldots, T(e_d)$ ως στήλες του $[T]$.

Αντιστρόφως, αν $(t_{i,j})$ είναι οποιοσδήποτε $d \times d$ πίνακας, τότε ορίζεται μια συνάρτηση $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ με τύπο

$$T(x) = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \cdot & \cdot & \cdot & t_{1,d} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_{d,1} & \cdot & \cdot & \cdot & t_{d,d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_d \end{pmatrix},$$

για κάθε $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η T είναι γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^d$ και είναι φανερό ότι τα $T(e_1), \dots, T(e_d)$ είναι οι στήλες του $(t_{i,j})$ και, επομένως, $[T] = (t_{i,j})$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα σε γραμμικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^d$ και σε $d \times d$ πίνακες.

Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι, αν οι T, S είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί του $\mathbb{R}^d$, τότε και ο $S \circ T$ είναι γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^d$. Είναι εύκολο να αποδειχτεί (πώς;) ότι, αν $[T], [S]$ είναι οι αντίστοιχοι $d \times d$ πίνακες, τότε

$$[S \circ T] = [S][T].$$

Ορισμός. Αν T είναι γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^d$, ορίζουμε την **ορίζουσα** του T να είναι η ορίζουσα του αντίστοιχου $d \times d$ πίνακα $[T]$ και τη συμβολίζουμε $\det T$. Δηλαδή

$$\det T = \det[T].$$

Επομένως, σύμφωνα με τον γνωστό κανόνα πολλαπλασιασμού πινάκων και οριζουσών,

$$\det S \circ T = \det[S \circ T] = \det([S][T]) = \det[S] \ \det[T] = \det S \ \det T.$$

Τώρα θα θεωρήσουμε κάποιους $d \times d$ πίνακες ειδικού τύπου καθώς και τους αντίστοιχους γραμμικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^d$.

Πρώτος ειδικός τύπος: Έστω $1 \leq k_0 \leq d$, $1 \leq l_0 \leq d$ και $k_0 \neq l_0$. Θεωρούμε τον πίνακα $(t_{i,j})$ με

$$t_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \neq k_0, l_0 \text{ ή } i = k_0, j = l_0 \text{ ή } i = l_0, j = k_0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και τον αντίστοιχο γραμμικό μετασχηματισμό T. Αν $(s_{i,j})$ είναι οποιοσδήποτε $d \times d$ πίνακας, τότε ο $(t_{i,j})(s_{i,j})$ είναι ίδιος με τον $(s_{i,j})$ με μόνη διαφορά ότι η k_0-γραμμή και η l_0-γραμμή του $(s_{i,j})$ έχουν αλλάξει θέσεις. Επίσης, ο $(s_{i,j})(t_{i,j})$ είναι ίδιος με τον $(s_{i,j})$ με μόνη διαφορά ότι η k_0-στήλη και η l_0-στήλη του $(s_{i,j})$ έχουν αλλάξει θέσεις. Τέλος, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ το $T(x)$ είναι το ίδιο με το x με μόνη διαφορά ότι η k_0-συντεταγμένη και η l_0-συντεταγμένη του x έχουν αλλάξει θέσεις. Είναι φανερό ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός του T είναι ο ίδιος ο T και ο αντίστροφος πίνακας του $(t_{i,j})$ είναι ο ίδιος ο $(t_{i,j})$. Επίσης,

$$\det T = \det(t_{i,j}) = -1.$$

Δεύτερος ειδικός τύπος: Έστω $1 \leq k_0 \leq d$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$. Θεωρούμε τον πίνακα $(t_{i,j})$ με

$$t_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \neq k_0 \\ \lambda, & \text{αν } i = j = k_0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και τον αντίστοιχο γραμμικό μετασχηματισμό T. Αν $(s_{i,j})$ είναι οποιοσδήποτε $d \times d$ πίνακας, τότε ο $(t_{i,j})(s_{i,j})$ είναι ίδιος με τον $(s_{i,j})$ με μόνη διαφορά ότι η k_0-γραμμή του $(s_{i,j})$ έχει πολλαπλασιαστεί με τον λ. Επίσης, ο $(s_{i,j})(t_{i,j})$ είναι ίδιος με τον $(s_{i,j})$ με μόνη διαφορά ότι η k_0-στήλη του $(s_{i,j})$ έχει πολλαπλασιαστεί με τον λ. Τέλος, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ το $T(x)$ είναι το ίδιο με το x με μόνη διαφορά ότι η k_0-συντεταγμένη έχει πολλαπλασιαστεί με τον λ. Είναι φανερό ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός του T είναι ο μετασχηματισμός ίδιου τύπου, που ορίζεται με τον ίδιο k_0 αλλά με τον $\frac{1}{\lambda}$ αντί του λ, και ο αντίστροφος πίνακας του $(t_{i,j})$ είναι ο πίνακας ίδιου τύπου, που ορίζεται με τον ίδιο k_0 αλλά με τον $\frac{1}{\lambda}$ αντί του λ. Επίσης,

$$\det T = \det(t_{i,j}) = \lambda.$$

Τρίτος ειδικός τύπος: Έστω $1 \le k_0 \le d$, $1 \le l_0 \le d$ και $k_0 \ne l_0$. Θεωρούμε τον πίνακα $(t_{i,j})$ με

$$t_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ \pm 1, & \text{αν } i = k_0\,,\ j = l_0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και τον αντίστοιχο γραμμικό μετασχηματισμό T. Αν $(s_{i,j})$ είναι οποιοσδήποτε $d \times d$ πίνακας, τότε ο $(t_{i,j})(s_{i,j})$ είναι ίδιος με τον $(s_{i,j})$ με μόνη διαφορά ότι η l_0-γραμμή του $(s_{i,j})$ έχει προστεθεί στην k_0-γραμμή του, αν $t_{k_0,l_0} = +1$, ή έχει αφαιρεθεί από την k_0-γραμμή του, αν $t_{k_0,l_0} = -1$. Επίσης, ο $(s_{i,j})(t_{i,j})$ είναι ίδιος με τον $(s_{i,j})$ με μόνη διαφορά ότι η l_0-στήλη του $(s_{i,j})$ έχει προστεθεί στην ή αφαιρεθεί από την k_0-στήλη του, αντιστοίχως. Τέλος, για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ το $T(x)$ είναι το ίδιο με το x με μόνη διαφορά ότι η l_0-συντεταγμένη του x έχει προστεθεί στην ή αφαιρεθεί από την k_0-συντεταγμένη του, αντιστοίχως. Είναι φανερό ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός του T είναι ο μετασχηματισμός ίδιου τύπου, που ορίζεται με τους ίδιους k_0, l_0 αλλά με ∓ 1 αντί ± 1 και ο αντίστροφος πίνακας του $(t_{i,j})$ είναι ο πίνακας ίδιου τύπου, που ορίζεται με τους ίδιους k_0, l_0 αλλά με ∓ 1 αντί ± 1. Επίσης,

$$\det T = \det(t_{i,j}) = 1.$$

Σχόλιο. Πριν προχωρήσουμε πρέπει να τονιστεί ότι στην περίπτωση $d = 1$ οι γραμμικοί μετασχηματισμοί του $\mathbb{R}$ πρώτου και τρίτου ειδικού τύπου *δεν υφίστανται*! Γι αυτούς τους μετασχηματισμούς χρειαζόμαστε τουλάχιστον δυο διαφορετικές συντεταγμένες k_0, l_0. Επίσης, στην ίδια περίπτωση, ένας γραμμικός μετασχηματισμός T του $\mathbb{R}$ δεύτερου ειδικού τύπου έχει τύπο $T(x) = \lambda x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\lambda \ne 0$. Όμως, *κάθε* γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}$ είναι είτε αυτού ακριβώς του τύπου είτε ο μηδενικός μετασχηματισμός (με $\lambda = 0$, δηλαδή). Επομένως, στην περίπτωση $d = 1$ όλη η επόμενη εργασία απλοποιείται δραστικά!

Από τη στοιχειώδη γραμμική άλγεβρα γνωρίζουμε τη μέθοδο του Gauss ως μέθοδο επίλυσης συστημάτων αλλά και ως μέθοδο υπολογισμού οριζουσών. Με την ορολογία που έχουμε εισάγει, το θεωρητικό καταστάλαγμα της μεθόδου του Gauss είναι το εξής. Για κάθε $d \times d$ πίνακα $(s_{i,j})$ υπάρχουν κάποιοι πεπερασμένοι $d \times d$ πίνακες των τριών ειδικών τύπων που περιγράψαμε προηγουμένως ώστε αν πολλαπλασιάσουμε τον $(s_{i,j})$ με αυτούς τους πίνακες από αριστερά και από δεξιά να προκύψει ένας $d \times d$ πίνακας $(r_{i,j})$, όπου

$$r_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{αν } 1 \le i = j \le m_0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για κάποιον m_0 με $0 \le m_0 \le d$ (στην περίπτωση $m_0 = 0$ είναι, φυσικά, $r_{i,j} = 0$ για κάθε i, j). Αν R είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^d$ που αντιστοιχεί στον πίνακα $(r_{i,j})$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ το $R(x)$ είναι το ίδιο με το x με τη διαφορά ότι οι συντεταγμένες του x μετά την m_0-οστή έχουν γίνει όλες 0. Βλέπουμε ότι ο R είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $m_0 = d$ ή, ισοδύναμα, αν $R = I_d$, ο ταυτοτικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^d$. Επίσης

$$\det R = \det(r_{i,j}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } m_0 = d \\ 0, & \text{αν } 0 \le m_0 < d \end{cases}$$

Επομένως, ο R είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det R \ne 0$.

Αν διατυπώσουμε τα προηγούμενα για γραμμικούς μετασχηματισμούς αντί για πίνακες, προκύπτει ότι για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό S του $\mathbb{R}^d$ υπάρχουν γραμμικοί μετασχηματισμοί $T_1{}', \ldots, T_n{}', T_{n+1}{}', \ldots, T_{n+m}{}'$ του $\mathbb{R}^d$, των τριών ειδικών τύπων, ώστε

$$T_n{}' \circ \cdots \circ T_1{}' \circ S \circ T_{n+m}{}' \circ \cdots \circ T_{n+1}{}' = R.$$

Τέλος, αν συμβολίσουμε T_k τον αντίστροφο του $T_k{}'$, τότε καταλήγουμε στον εξής κανόνα.

Για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό S του $\mathbb{R}^d$ υπάρχουν γραμμικοί μετασχηματισμοί $T_1, \dots, T_n, T_{n+1}, \dots, T_{n+m}$ του $\mathbb{R}^d$, όλοι των τριών ειδικών τύπων, ώστε

$$S = T_1 \circ \cdots \circ T_n \circ R \circ T_{n+1} \circ \cdots \circ T_{n+m}.$$

Από την τελευταία ισότητα βρίσκουμε ότι

$$\det S = \det T_1 \cdots \det T_n \, \det R \, \det T_{n+1} \cdots \det T_{n+m}.$$

Επειδή κάθε T_k είναι αντιστρέψιμος και συγχρόνως κάθε $\det T_k$ είναι $\neq 0$, συνεπάγεται ότι ο S είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο R είναι αντιστρέψιμος και, επίσης, ότι $\det S \neq 0$ αν και μόνο αν $\det R \neq 0$. Άρα, βάσει όσων είπαμε για τον R, καταλήγουμε στο γνωστό κριτήριο για την αντιστρεψιμότητα ενός γραμμικού μετασχηματισμού:

Ο γραμμικός μετασχηματισμός S είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det S \neq 0$.

Έστω οποιοδήποτε *κλειστό-ανοικτό* διάστημα

$$J = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_d, b_d)$$

και γραμμικός μετασχηματισμός T του $\mathbb{R}^d$ πρώτου ειδικού τύπου (ακριβώς όπως τον έχουμε περιγράψει). Θεωρούμε και το διάστημα J' το οποίο είναι το ίδιο με το J με μόνη διαφορά ότι οι ακμές $[a_{k_0}, b_{k_0}), [a_{l_0}, b_{l_0})$ του J έχουν αλλάξει θέση. Τότε για κάθε $x = (x_1, \dots, x_d)$ και για το αντίστοιχο $y = T(x) = (y_1, \dots, y_d)$ ισχύει $y_{k_0} = x_{l_0}$, $y_{l_0} = x_{k_0}$ και $y_j = x_j$ για κάθε $j \neq k_0, l_0$. Άρα $y \in T(J)$ αν και μόνο αν $x \in J$ αν και μόνο αν $a_{k_0} \leq x_{k_0} < b_{k_0}$, $a_{l_0} \leq x_{l_0} < b_{l_0}$, $a_j \leq x_j < b_j$ για $j \neq k_0, l_0$ αν και μόνο αν $a_{l_0} \leq y_{k_0} < b_{l_0}$, $a_{k_0} \leq y_{l_0} < b_{k_0}$, $a_j \leq y_j < b_j$ για $j \neq k_0, l_0$ αν και μόνο αν $y \in J'$. Άρα $T(J) = J'$ και, επομένως, $m_d\big(T(J)\big) = m_d(J') = V_d(J') = V_d(J)$. Επειδή $\det T = -1$, το τελευταίο γράφεται

$$m_d\big(T(J)\big) = |\det T|\, V_d(J).$$

Θεωρούμε, πάλι, οποιοδήποτε *κλειστό-ανοικτό* διάστημα J, το ίδιο με πριν, και γραμμικό μετασχηματισμό T του $\mathbb{R}^d$ δεύτερου ειδικού τύπου (ακριβώς όπως τον έχουμε περιγράψει). Θεωρούμε και το διάστημα J' το οποίο είναι το ίδιο με το J με μόνη διαφορά ότι η ακμή $[a_{k_0}, b_{k_0})$ του J έχει αντικατασταθεί με την $[\lambda a_{k_0}, \lambda b_{k_0})$, αν $\lambda > 0$, ή την $(\lambda b_{k_0}, \lambda a_{k_0}]$, αν $\lambda < 0$. Θεωρούμε την περίπτωση $\lambda > 0$. Τότε για κάθε $x = (x_1, \dots, x_d)$ και για το αντίστοιχο $y = T(x) = (y_1, \dots, y_d)$ ισχύει $y_{k_0} = \lambda x_{k_0}$ και $y_j = x_j$ για $j \neq k_0$. Άρα $y \in T(J)$ αν και μόνο αν $x \in J$ αν και μόνο αν $a_{k_0} \leq x_{k_0} < b_{k_0}$ και $a_j \leq x_j < b_j$ για $j \neq k_0$ αν και μόνο αν $\lambda a_{k_0} \leq y_{k_0} < \lambda b_{k_0}$ και $a_j \leq y_j < b_j$ για $j \neq k_0$ αν και μόνο αν $y \in J'$. Άρα $T(J) = J'$ και, επομένως, $m_d\big(T(J)\big) = m_d(J') = V_d(J') = \lambda V_d(J)$. Στην περίπτωση $\lambda < 0$, με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι $m_d\big(T(J)\big) = m_d(J') = V_d(J') = -\lambda V_d(J)$. Επειδή $\det T = \lambda$, συνεπάγεται και στις δυο περιπτώσεις ότι

$$m_d\big(T(J)\big) = |\det T|\, V_d(J).$$

Τέλος, έστω οποιοδήποτε *κλειστό-ανοικτό* διάστημα J, το ίδιο με πριν, και γραμμικός μετασχηματισμός T του $\mathbb{R}^d$ τρίτου ειδικού τύπου (ακριβώς όπως τον έχουμε περιγράψει). Τότε για κάθε $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ και το αντίστοιχο $y = T(x) = (y_1, \dots, y_d)$ ισχύει $y_{k_0} = x_{k_0} \pm x_{l_0}$ και $y_j = x_j$ για $j \neq k_0$. Θα θεωρήσουμε την περίπτωση $y_{k_0} = x_{k_0} + x_{l_0}$ διότι η περίπτωση $y_{k_0} = x_{k_0} - x_{l_0}$ είναι παρόμοια. Έχουμε, λοιπόν, ότι $y \in T(J)$ αν και μόνο αν $x \in J$ αν και μόνο αν

$a_{k_0} \le x_{k_0} < b_{k_0}$ και $a_j \le x_j < b_j$ για $j \ne k_0$ αν και μόνο αν $a_{k_0} \le y_{k_0} - y_{l_0} < b_{k_0}$ και $a_j \le y_j < b_j$ για $j \ne k_0$. Άρα

$$T(J) = \{(y_1, \dots, y_d) : a_{k_0} \le y_{k_0} - y_{l_0} < b_{k_0} \text{ και } a_j \le y_j < b_j \text{ για } j \ne k_0\}.$$

Θα σχηματίσουμε τρία ακόμη σύνολα:

$$E_1 = \{(y_1, \dots, y_d) : a_{k_0} + a_{l_0} \le y_{k_0} < b_{k_0} + a_{l_0} \text{ και } a_j \le y_j < b_j \text{ για } j \ne k_0\},$$

$$E_2 = \{(y_1, \dots, y_d) : a_{k_0} + a_{l_0} \le y_{k_0} < a_{k_0} + y_{l_0} \text{ και } a_j \le y_j < b_j \text{ για } j \ne k_0\},$$

$$E_3 = \{(y_1, \dots, y_d) : b_{k_0} + a_{l_0} \le y_{k_0} < b_{k_0} + y_{l_0} \text{ και } a_j \le y_j < b_j \text{ για } j \ne k_0\}.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα $T(J), E_2$ είναι ξένα, ότι τα E_1, E_3 είναι, επίσης, ξένα και ότι

$$T(J) \cup E_2 = E_1 \cup E_3\,.$$

Κατόπιν, παρατηρούμε ότι $E_3 = E_2 + x_0$ και $E_1 = J + y_0$, όπου $x_0 = ({x_0}^{(1)}, \dots, {x_0}^{(d)})$ με $x_0^{(k_0)} = b_{k_0} - a_{k_0}$ και $x_0^{(j)} = 0$ για $j \ne k_0$ και όπου $y_0 = ({y_0}^{(1)}, \dots, {y_0}^{(d)})$ με $y_0^{(k_0)} = a_{l_0}$ και $y_0^{(j)} = 0$ για $j \ne k_0$.
Επίσης, τα σύνολα $T(J), E_1, E_2, E_3$ είναι μετρήσιμα στον $\mathbb{R}^d$. Για παράδειγμα, το E_1 είναι διάστημα. Το E_2 είναι η τομή των $\{(y_1, \dots, y_d) : a_{k_0} + a_{l_0} \le y_{k_0}$ και $a_j \le y_j$ για $j \ne k_0\}$ και $\{(y_1, \dots, y_d) : y_{k_0} < a_{k_0} + y_{l_0}$ και $y_j < b_j$ για $j \ne k_0\}$, από τα οποία το πρώτο είναι κλειστό $\subseteq \mathbb{R}^d$ και το δεύτερο είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^d$. Κατόπιν, το $E_3 = E_2 + x_0$ είναι, επίσης, μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$. Τέλος, το $T(J) = (E_1 \cup E_3) \setminus E_2$ είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$.
Επομένως, από την $T(J) \cup E_2 = E_1 \cup E_3$ συνεπάγεται $m_d\big(T(J)\big) + m_d(E_2) = m_d(E_1) + m_d(E_3)$ και από τις $E_3 = E_2 + x_0$ και $E_1 = J + y_0$ συνεπάγεται $m_d(E_3) = m_d(E_2)$ και $m_d(E_1) = m_d(J) = V_d(J)$. Άρα, $m_d\big(T(J)\big) = V_d(J)$ και, επειδή $\det T = 1$,

$$m_d\big(T(J)\big) = |\det T|\, V_d(J).$$

Έχουμε, λοιπόν, αποδείξει τη σχέση $m_d\big(T(J)\big) = |\det T| V_d(J)$ για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό T του $\mathbb{R}^d$ από τους τρεις ειδικούς τύπους και για κάθε *κλειστό-ανοικτό* διάστημα $J = [a_1, b_1) \times \cdots \times [a_d, b_d)$.

Τώρα, έστω γραμμικός μετασχηματισμός T του $\mathbb{R}^d$ από τους τρεις ειδικούς τύπους και οποιοδήποτε $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Θα αποδείξουμε ότι

$$m_d^*\big(T(A)\big) \le |\det T|\, m_d^*(A).$$

Αν $m_d^*(A) = +\infty$, η ανισότητα είναι προφανής. Έστω $m_d^*(A) < +\infty$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_1, I_2, \dots$ του $\mathbb{R}^d$ ώστε $A \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) < m_d^*(A) + \epsilon$. Για καθένα από τα ανοικτά διαστήματα I_n θεωρούμε το αντίστοιχο *κλειστό-ανοικτό* διάστημα J_n και τότε είναι $I_n \subseteq J_n$ και $V_d(I_n) = V_d(J_n)$. Άρα $A \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} J_n$, οπότε $T(A) \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} T(J_n)$ και, επομένως,

$$m_d^*\big(T(A)\big) \le \sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*\big(T(J_n)\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} m_d\big(T(J_n)\big) = |\det T| \sum_{n=1}^{+\infty} V_d(J_n)$$

$$= |\det T| \sum_{n=1}^{+\infty} V_d(I_n) < |\det T| \big(m_d^*(A) + \epsilon\big).$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $m_d^*\big(T(A)\big) \le |\det T|\, m_d^*(A)$.

Επειδή ο T είναι αντιστρέψιμος, συνεπάγεται $A = T^{-1}\big(T(A)\big)$ και, επειδή ο T^{-1} είναι κι αυτός ειδικού τύπου, εφαρμόζουμε την $m_d^*\big(T(A)\big) \leq |\det T|\, m_d^*(A)$ στον T^{-1} αντί του T και στο σύνολο $T(A)$, οπότε $m_d^*(A) = m_d^*\big(T^{-1}\big(T(A)\big)\big) \leq |\det(T^{-1})|\, m_d^*\big(T(A)\big)$ και, επομένως, $|\det T|\, m_d^*(A) \leq m_d^*\big(T(A)\big)$. Από τις δυο ανισότητες έχουμε ότι

$$m_d^*\big(T(A)\big) = |\det T|\, m_d^*(A).$$

Ας θεωρήσουμε, τώρα, τον γραμμικό μετασχηματισμό R του $\mathbb{R}^d$, όπως τον είχαμε περιγράψει προηγουμένως. Αν $m_0 = d$, τότε $R = I_d$ και, επομένως, για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι $m_d^*\big(R(A)\big) = m_d^*(A) = |\det R|\, m_d^*(A)$. Αν $m_0 < d$, τότε για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ είναι $R(A) \subseteq L$, όπου L είναι το κύριο υπερεπίπεδο του $\mathbb{R}^d$ το οποίο είναι κάθετο στον x_d-άξονα: $L = \{(x_1, \ldots, x_d) : x_d = 0\}$. Άρα $m_d^*\big(R(A)\big) \leq m_d^*(L) = m_d(L) = 0$ και, επομένως, $m_d^*\big(R(A)\big) = 0 = |\det R|\, m_d^*(A)$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, είναι

$$m_d^*\big(R(A)\big) = |\det R|\, m_d^*(A).$$

Κατόπιν, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις $S = T_1 \circ \cdots \circ T_n \circ R \circ T_{n+1} \circ \cdots \circ T_{n+m}$ και $\det S = \det T_1 \cdots \det T_n \det R \det T_{n+1} \cdots \det T_{n+m}$ που αναφέραμε προηγουμένως και καταλήγουμε αμέσως στο πρώτο μέρος του Θεωρήματος 2.6.

Θεώρημα 2.6. *Για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό S του $\mathbb{R}^d$ και για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ισχύει*

$$m_d^*\big(S(A)\big) = |\det S|\, m_d^*(A).$$

Επίσης, για κάθε $E \in \mathcal{L}_d$ συνεπάγεται $S(E) \in \mathcal{L}_d$ και

$$m_d\big(S(E)\big) = |\det S|\, m_d(E).$$

Απόδειξη. Για το δεύτερο μέρος υποθέτουμε, κατ' αρχάς, ότι ο S είναι αντιστρέψιμος ή, ισοδύναμα, ότι $\det S \neq 0$. Η αντιστρεψιμότητα του S επιτρέπει να γράφουμε

$$S\big(S^{-1}(A)\big) = A, \qquad S(A)^c = S(A^c), \qquad S\Big(\cap A\Big) = \cup S(A).$$

Τότε, για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} m_d^*\big(A \cap S(E)\big) &+ m_d^*\big(A \cap S(E)^c\big) \\ &= m_d^*\big(S\big(S^{-1}(A)\big) \cap S(E)\big) + m_d^*\big(S\big(S^{-1}(A)\big) \cap S(E^c)\big) \\ &= m_d^*\big(S\big(S^{-1}(A) \cap E\big)\big) + m_d^*\big(S\big(S^{-1}(A) \cap E^c\big)\big) \\ &= |\det S| \Big(m_d^*\big(S^{-1}(A) \cap E\big) + m_d^*\big(S^{-1}(A) \cap E^c\big)\Big) \\ &= |\det S|\, m_d^*\big(S^{-1}(A)\big) \\ &= |\det S|\, |\det S^{-1}|\, m_d^*(A) = m_d^*(A). \end{aligned}$$

Άρα $S(E) \in \mathcal{L}_d$.
Τέλος, έστω ότι ο S δεν είναι αντιστρέψιμος ή, ισοδύναμα, ότι $\det S = 0$. Από το πρώτο μέρος συνεπάγεται ότι $m_d^*\big(S(E)\big) = 0$ και, επομένως, $S(E) \in \mathcal{L}_d$. Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $S(E) \in \mathcal{L}_d$. Τέλος, επειδή $E, S(E) \in \mathcal{L}_d$, από το πρώτο μέρος συνεπάγεται

$$m_d\big(S(E)\big) = m_d^*\big(S(E)\big) = |\det S|\, m_d^*(E) = |\det S|\, m_d(E).$$

□

Ορισμός. Αφφινικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^d$ χαρακτηρίζεται κάθε συνάρτηση η οποία είναι σύνθεση γραμμικού μετασχηματισμού του $\mathbb{R}^d$ και μεταφοράς στον $\mathbb{R}^d$, δηλαδή συνάρτηση $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ με τύπο

$$f(x)=S(x)+x_0\,,$$

όπου S είναι γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^d$ και $x_0\in\mathbb{R}^d$.

Βάσει της Πρότασης 2.12 και του Θεωρήματος 2.6, αν f είναι ο παραπάνω αφφινικός μετασχηματισμός, τότε ισχύει $m_d^*\big(f(A)\big)=|\det S|\,m_d^*(A)$ για κάθε $A\subseteq\mathbb{R}^d$. Επίσης, για κάθε $E\in\mathcal{L}_d$ συνεπάγεται $f(E)\in\mathcal{L}_d$ και $m_d\big(f(E)\big)=|\det S|\,m_d(E)$.

Ας θυμηθούμε τον συμβολισμό

$$\|x\|=\sqrt{{x_1}^2+\cdots+{x_d}^2}$$

για το **μήκος** του $x=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$ και

$$<x,y>=x_1y_1+\cdots+x_dy_d$$

για το **εσωτερικό γινόμενο** των $x=(x_1,\dots,x_d),y=(y_1,\dots,y_d)\in\mathbb{R}^d$. Προφανώς, $<x,x>=\|x\|^2$. Ας θυμηθούμε, επίσης, ότι τα στοιχεία $x_1\,,\,\dots\,,x_d$ του $\mathbb{R}^d$ αποτελούν **ορθοκανονική βάση** του $\mathbb{R}^d$ αν είναι

$$<x_i,x_j>=\begin{cases}1, & \text{αν } i=j\\ 0, & \text{αν } i\neq j\end{cases}$$

Η απλούστερη ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^d$ σχηματίζεται από τα $e_1\,,\,\dots\,,e_d$.

Ορισμός. Έστω γραμμικός μετασχηματισμός S του $\mathbb{R}^d$ και $[S]=(s_{i,j})$ ο αντίστοιχος $d\times d$ πίνακας. Ο **συζυγής προς τον** S γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^d$ συμβολίζεται S^* και είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός ο οποίος έχει αντίστοιχο πίνακα τον ανάστροφο του $[S]$. Δηλαδή,

$$[S^*]=[S]^t$$

ή, ισοδύναμα, $[S^*]=(s^*_{i,j})$, όπου $s^*_{i,j}=s_{j,i}$ για κάθε i,j.

Τώρα, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$ και για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό S του $\mathbb{R}^d$ ισχύει

$$<S(x),y>=<x,S^*(y)>\,.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}<S(x),y>&=\sum_{i=1}^d S(x)_iy_i=\sum_{i=1}^d\big(\sum_{j=1}^d s_{i,j}x_j\big)y_i=\sum_{j=1}^d x_j\big(\sum_{i=1}^d s_{i,j}y_i\big)\\&=\sum_{j=1}^d x_j\big(\sum_{i=1}^d s^*_{j,i}y_i\big)=\sum_{j=1}^d x_jS^*(y)_j=<x,S^*(y)>\,.\end{aligned}$$

Ορισμός. Ένας γραμμικός μετασχηματισμός O του $\mathbb{R}^d$ χαρακτηρίζεται **ορθογώνιος μετασχηματισμός** του $\mathbb{R}^d$ αν τα $O(e_1),\,\dots\,,O(e_d)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^d$.

Επειδή τα $O(e_1),\,\dots\,,O(e_d)$ είναι οι στήλες του $[O]$ και οι γραμμές του $[O]^t$, είναι προφανές ότι το γινόμενο $[O]^t[O]$ είναι ο $d\times d$ πίνακας $(<O(e_i),O(e_j)>)$. Άρα ο O είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν το γινόμενο $[O]^t[O]$ είναι ο μοναδιαίος $d \times d$ πίνακας. Αλλά είναι $[O^* \circ O] = [O^*][O] = [O]^t[O]$ και, επομένως, ο O είναι ορθογώνιος αν και μόνο αν $O^* \circ O = I_d$.

Άρα, αν ο O είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^d$, τότε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$ ισχύει

$$< O(x), O(y) >=< x, O^*\big(O(y)\big) >=< x, (O^* \circ O)(y) >=< x, y > .$$

Αποδεικνύεται και το αντίστροφο: αν ο γραμμικός μετασχηματισμός O του $\mathbb{R}^d$ ικανοποιεί την $< O(x), O(y) >=< x, y >$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$, τότε είναι $< O(e_i), O(e_j) >=< e_i, e_j >$ για κάθε i, j και, επομένως, ο O είναι ορθογώνιος.

Εφαρμόζοντας την $< O(x), O(y) >=< x, y >$ με $y = x$, βρίσκουμε ότι

$$\|O(x)\| = \|x\|$$

για κάθε x. Άρα *ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός του* $\mathbb{R}^d$ *αφήνει αμετάβλητα τα μήκη των στοιχείων του* $\mathbb{R}^d$. Γράφοντας $< x, y >= \|x\|\|y\| \cos\theta(x, y)$, όπου $\theta(x, y)$ είναι η γωνία ανάμεσα στα x, y, και, ανάλογα, $< O(x), O(y) >= \|O(x)\|\|O(y)\| \cos\theta(O(x), O(y))$, βρίσκουμε ότι $\cos\theta(O(x), O(y)) = \cos\theta(x, y)$. Επειδή οι γωνίες ανήκουν στο διάστημα $[0, \pi]$, συμπεραίνουμε ότι

$$\theta(O(x), O(y)) = \theta(x, y).$$

Επομένως, *ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός του* $\mathbb{R}^d$ *αφήνει αμετάβλητες τις γωνίες ανάμεσα στα στοιχεία του* $\mathbb{R}^d$.

Από την $O^* \circ O = I_d$ και την $\det(O^*) = \det[O^*] = \det([O]^t) = \det[O] = \det O$ συνεπάγεται ότι $(\det O)^2 = 1$ και, επομένως,

$$|\det O| = 1$$

για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό O του $\mathbb{R}^d$. Άρα

Πρόταση 2.13. *Για κάθε ορθογώνιο μετασχηματισμό O του $\mathbb{R}^d$ και για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ισχύει*

$$m_d^*\big(O(A)\big) = m_d^*(A).$$

Επίσης, για κάθε $E \in \mathcal{L}_d$ συνεπάγεται $O(E) \in \mathcal{L}_d$ και

$$m_d\big(O(E)\big) = m_d(E).$$

Ορισμός. Χαρακτηρίζουμε **στερεά κίνηση** στον $\mathbb{R}^d$ οποιαδήποτε $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ με τύπο

$$f(x) = O(x) + x_0 ,$$

όπου O είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^d$ και $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

Δηλαδή, οι στερεές κινήσεις είναι ειδική κατηγορία αφφινικών μετασχηματισμών. Από τα μέχρι τώρα αποτελέσματα προκύπτει το εξής.

Πρόταση 2.14. *Για κάθε στερεά κίνηση f του $\mathbb{R}^d$ και για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^d$ ισχύει*

$$m_d^*\big(f(A)\big) = m_d^*(A).$$

Επίσης, για κάθε $E \in \mathcal{L}_d$ συνεπάγεται $f(E) \in \mathcal{L}_d$ και

$$m_d\big(f(E)\big) = m_d(E).$$

Ασκήσεις.

1. Έστω σημεία $P, P_1, \ldots, P_d$ του $\mathbb{R}^d$. Θεωρούμε τα $x_1 = P_1 - P, \ldots, x_d = P_d - P$. Το **κλειστό παραλληλεπίπεδο** στον $\mathbb{R}^d$ που ορίζεται από τα $P, P_1, \ldots, P_d$ είναι το σύνολο

$$Q_{P;P_1,\ldots,P_d} = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_d x_d + P : 0 \leq \lambda_1 \leq 1, \ldots, 0 \leq \lambda_d \leq 1\}.$$

Ομοίως ορίζεται το ανοικτό παραλληλεπίπεδο: είναι, για κάθε k, $0 < \lambda_k < 1$ αντί $0 \leq \lambda_k \leq 1$.
Τέλος, ομοίως ορίζεται και κάθε άλλο παραλληλεπίπεδο.
Αποδείξτε ότι κάθε διάστημα στον $\mathbb{R}^d$ είναι παραλληλεπίπεδο στον $\mathbb{R}^d$.
Αποδείξτε ότι κάθε παραλληλεπίπεδο στον $\mathbb{R}^d$ είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}^d$ και ότι

$$m_d(Q_{P;P_1,\ldots,P_d}) = |\operatorname{det}(x_{i,j})| = \sqrt{\operatorname{det}(< x_i, x_j >)},$$

όπου $x_j = (x_{1,j}, \ldots, x_{d,j})$ για $j = 1, \ldots, d$.
Υπόδειξη: Θεωρήστε τον γραμμικό μετασχηματισμό S του $\mathbb{R}^d$ με την ιδιότητα: $S(e_j) = x_j$ για κάθε j. Ποιο σύνολο είναι το $S\big([0,1]^d\big) + P$;
Αν, επιπλέον, τα $P_1 - P, \ldots, P_d - P$ είναι ανά δύο κάθετα, αποδείξτε ότι

$$m_d(Q_{P;P_1,\ldots,P_d}) = \|P_1 - P\| \cdots \|P_d - P\|.$$

2. Έστω L οποιοδήποτε υπερεπίπεδο στον $\mathbb{R}^d$.
Αν γνωρίζουμε μια εξίσωση του L, έστω την $a_1 x_1 + \cdots + a_d x_d = c$ (όπου δεν είναι όλοι οι $a_1, \ldots, a_d$ ίσοι με 0), βρείτε σημεία $P, P_1, \ldots, P_{d-1}$ του L ώστε τα στοιχεία $P_1 - P, \ldots, P_{d-1} - P$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}^d$.
Υπόδειξη: Αν $a_d \neq 0$, πάρτε $P = (0, \ldots, 0, \frac{c}{a_d})$, $P_1 = (1, 0, \ldots, 0, \frac{c - a_1}{a_d})$ κλπ.
Αντιστρόφως, αν γνωρίζουμε σημεία $P, P_1, \ldots, P_{d-1}$ του L ώστε τα $P_1 - P, \ldots, P_{d-1} - P$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στον $\mathbb{R}^d$, βρείτε μια εξίσωση του L.
Κατόπιν πάρτε οποιοδήποτε επιπλέον σημείο P_d του $\mathbb{R}^d$ και θεωρήστε τον γραμμικό μετασχηματισμό S του $\mathbb{R}^d$ για τον οποίο είναι $S(e_j) = P_j - P$ και το υπερεπίπεδο $L_0 = \{(x_1, \ldots, x_d) : x_d = 0\}$ και αποδείξτε ότι $L = S(L_0)$.
Τέλος, αποδείξτε ότι $m_d(L) = 0$.

3. Βεβαιωθείτε ότι το σύνολο N που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 1 δεν είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}$.

4. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^d$. Ορίζουμε το **σύνολο διαφορών του** E ως εξής:

$$E - E = \{x' - x'' : x', x'' \in E\}.$$

Αποδείξτε ότι, αν $E \in \mathcal{L}_d$ και $m_d(E) > 0$, τότε το $E - E$ περιέχει κάποιο ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το 0.
Υπόδειξη: Έστω $0 < \delta < 2^{\frac{1}{d}} - 1$ και $\lambda = \frac{(1+\delta)^d}{2}$, οπότε είναι $0 < \lambda < 1$. Σύμφωνα με την άσκηση 13 της ενότητας 2.3, υπάρχει ανοικτό διάστημα I ώστε να είναι $m_d(E \cap I) > \lambda V_d(I)$. Θεωρήστε ένα ανοικτό διάστημα I_0 κέντρου 0 το οποίο είναι όμοιο με το I με συντελεστή ομοιότητας δ, οπότε $V_d(I_0) = \delta^d V_d(I)$. Αποδείξτε ότι $I_0 \subseteq (E \cap I) - (E \cap I) \subseteq E - E$. Αν αυτό δεν ισχύει, υπάρχει $x \in I_0$ ώστε $x \notin (E \cap I) - (E \cap I)$, οπότε $\big((E \cap I) + x\big) \cap (E \cap I) = \emptyset$. Τα $(E \cap I) + x$, $E \cap I$ περιέχονται σε διάστημα J ίδιου κέντρου με το I το οποίο είναι όμοιο με το I με συντελεστή ομοιότητας $1 + \delta$. Άρα $(1+\delta)^d V_d(I) = V_d(J) \geq m_d\big((E \cap I) + x\big) + m_d(E \cap I) = 2 m_d(E \cap I) > 2\lambda V_d(I)$.

Κεφάλαιο 3

Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις.

3.1 Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις.

Ορισμός. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Η f χαρακτηρίζεται **Lebesgue μετρήσιμη** ή, πιο απλά, **μετρήσιμη** αν

$$\{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Το $\{x \in A : f(x) > a\}$ γράφεται και $\{x \in A : f(x) \in (a, +\infty]\} = f^{-1}\big((a, +\infty]\big)$. Θα χρησιμοποιούμε συχνά τον γνωστό συμβολισμό $f^{-1}(K) = \{x \in A : f(x) \in K\}$ και ειδικά σε σχέση με ανισότητες ή ισότητες που ικανοποιούν οι τιμές μιας συνάρτησης.

Παραδείγματα. (1) $\{x \in A : f(x) \geq a\} = f^{-1}\big([a, +\infty]\big)$.
(2) $\{x \in A : f(x) < a\} = f^{-1}\big([-\infty, a)\big)$.
(3) $\{x \in A : a < f(x) \leq b\} = f^{-1}\big((a, b]\big)$.
(4) $\{x \in A : f(x) = a\} = f^{-1}\big([a, a]\big) = f^{-1}\big(\{a\}\big)$.
(5) $\{x \in A : f(x) = -\infty\} = f^{-1}\big([-\infty, -\infty]\big) = f^{-1}\big(\{-\infty\}\big)$.
(6) $\{x \in A : a \leq f(x) \leq b$ ή $c < f(x)\} = f^{-1}\big([a, b] \cup (c, +\infty]\big)$.

Θα χρησιμοποιούμε, επίσης, συχνά τις γνωστές σχέσεις

$$f^{-1}(\cup K) = \cup f^{-1}(K), \quad f^{-1}(\cap K) = \cap f^{-1}(K),$$
$$f^{-1}(K \setminus L) = f^{-1}(K) \setminus f^{-1}(L), \quad f^{-1}(K^c) = A \setminus f^{-1}(K).$$

Λήμμα 3.1. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$.*
(1) Αν $K, L \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ και $f^{-1}(K), f^{-1}(L) \in \mathcal{L}_d$, τότε $f^{-1}(K^c), f^{-1}(K \setminus L) \in \mathcal{L}_d$.
(2) Αν $K_n \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ και $f^{-1}(K_n) \in \mathcal{L}_d$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $f^{-1}\big(\cup_{n=1}^{+\infty} K_n\big) \in \mathcal{L}_d$ και $f^{-1}\big(\cap_{n=1}^{+\infty} K_n\big) \in \mathcal{L}_d$.

Απόδειξη. (1) $f^{-1}(K^c) = A \setminus f^{-1}(K) \in \mathcal{L}_d$, διότι $A \in \mathcal{L}_d$ και $f^{-1}(K) \in \mathcal{L}_d$. $f^{-1}(K \setminus L) = f^{-1}(K) \setminus f^{-1}(L) \in \mathcal{L}_d$, διότι $f^{-1}(K) \in \mathcal{L}_d$ και $f^{-1}(L) \in \mathcal{L}_d$.
(2) $f^{-1}\big(\cup_{n=1}^{+\infty} K_n\big) = \cup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(K_n) \in \mathcal{L}_d$, διότι $f^{-1}(K_n) \in \mathcal{L}_d$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ομοίως $f^{-1}\big(\cap_{n=1}^{+\infty} K_n\big) = \cap_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(K_n) \in \mathcal{L}_d$. $\square$

Ορισμός. Έχουμε χαρακτηρίσει *διάστημα* στο $\mathbb{R}$ κάθε $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ και (a, b). Θα χαρακτηρίζουμε **γενικευμένα διαστήματα** στο $\mathbb{R}$ όλα τα προηγούμενα καθώς και τα $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ και $(-\infty, +\infty)$. Τέλος, θα χαρακτηρίζουμε **γενικευμένα διαστήματα** στο $\overline{\mathbb{R}}$ όλα τα προηγούμενα καθώς και τα $[a, +\infty]$, $(a, +\infty]$, $[-\infty, b]$, $[-\infty, b)$, $(-\infty, +\infty]$, $[-\infty, +\infty)$, $[-\infty, +\infty]$, $[-\infty, -\infty]$, και $[+\infty, +\infty]$.

Πρόταση 3.1. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε $f^{-1}(K) = \{x \in A : f(x) \in K\} \in \mathcal{L}_d$ για κάθε K το οποίο είναι είτε γενικευμένο διάστημα είτε αριθμήσιμη ένωση γενικευμένων διαστημάτων στο $\overline{\mathbb{R}}$ είτε ανοικτό είτε κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$ είτε αριθμήσιμη τομή ανοικτών είτε αριθμήσιμη ένωση κλειστών $\subseteq \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Είναι $[a, +\infty] = \cap_{n=1}^{+\infty}(a - \frac{1}{n}, +\infty]$ και $[-\infty, b] = (b, +\infty]^c$. Από τον ορισμό και το Λήμμα 3.1 συνεπάγεται ότι $f^{-1}\big([a, +\infty]\big) \in \mathcal{L}_d$ και $f^{-1}\big([-\infty, b]\big) \in \mathcal{L}_d$. Επίσης, $[a, b] = [-\infty, b] \cap [a, +\infty]$, οπότε πάλι από το Λήμμα 3.1 συνεπάγεται ότι $f^{-1}\big([a, b]\big) \in \mathcal{L}_d$.
Τώρα, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι κάθε άλλο γενικευμένο διάστημα K στο $\overline{\mathbb{R}}$, εκτός των $\{-\infty\}$, $\{+\infty\}$, είναι αριθμήσιμη ένωση διαστημάτων τύπου $[a, b]$, $[-\infty, b]$ και $[a, +\infty]$. Ειδικά τα $K = \{-\infty\}$, $K = \{+\infty\}$ είναι αριθμήσιμες τομές διαστημάτων τύπου $[-\infty, b]$, το πρώτο, και $[a, +\infty]$, το δεύτερο. Άρα από το Λήμμα 3.1 συνεπάγεται ότι $f^{-1}(K) \in \mathcal{L}_d$ για κάθε γενικευμένο διάστημα στο $\overline{\mathbb{R}}$.
Αν $K = \cup_{n=1}^{+\infty} K_n$ και κάθε K_n είναι γενικευμένο διάστημα στο $\overline{\mathbb{R}}$, τότε από τα προηγούμενα και το Λήμμα 3.1 συνεπάγεται ότι $f^{-1}(K) \in \mathcal{L}_d$.
Αν το K είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$, έχουμε αποδείξει ότι υπάρχουν διαστήματα K_n στο $\mathbb{R}$ ώστε να είναι $K = \cup_{n=1}^{+\infty} K_n$. Άρα $f^{-1}(K) \in \mathcal{L}_d$. Τέλος, αν το K είναι κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$, τότε το $U = K^c$ είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(U) \in \mathcal{L}_d$. Επειδή $K = U^c$, συνεπάγεται $f^{-1}(K) \in \mathcal{L}_d$. □

Παραδείγματα. (1) Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ η οποία είναι σταθερή στο A. Δηλαδή, υπάρχει $c \in \overline{\mathbb{R}}$ ώστε να είναι $f(x) = c$ για κάθε $x \in A$. Τότε η f είναι μετρήσιμη.
Έστω $c \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\{x \in A : f(x) > a\} = \begin{cases} A, & \text{αν } a < c \\ \emptyset, & \text{αν } a \geq c \end{cases}$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση, $\{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$, οπότε η f είναι μετρήσιμη.
Έστω $c = +\infty$. Τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι $\{x \in A : f(x) > a\} = A \in \mathcal{L}_d$, οπότε η f είναι μετρήσιμη.
Έστω $c = -\infty$. Τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι $\{x \in A : f(x) > a\} = \emptyset \in \mathcal{L}_d$, οπότε η f είναι μετρήσιμη.
(2) Έστω $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ συνεχής στον $\mathbb{R}^d$. Τότε η f είναι μετρήσιμη.
Έστω $a \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$. Αρκεί να αποδείξουμε ότι το $U = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > a\}$ είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^d$. Θεωρούμε οποιοδήποτε $x_0 \in U$, δηλαδή $f(x_0) > a$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, για κάθε $\epsilon > 0$ και, επομένως, και για $\epsilon = f(x_0) - a > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε για κάθε x με $\|x - x_0\| < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Δηλαδή, για κάθε x στην ανοικτή μπάλα $B(x_0; \delta)$ ισχύει $f(x) > f(x_0) - \epsilon = f(x_0) - (f(x_0) - a) = a$. Άρα $B(x_0; \delta) \subseteq U$. Αποδείξαμε, λοιπόν, ότι για κάθε $x_0 \in U$ υπάρχει ανοικτή μπάλα $B(x_0; \delta) \subseteq U$. Άρα το U είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}^d$.
(3) Θεωρούμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός. Έστω $B \subseteq A$ και $A \in \mathcal{L}_d$. Η συνάρτηση $\chi_B : A \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in B \\ 0, & \text{αν } x \in A \setminus B \end{cases}$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική συνάρτηση του** B (στο A).

Θα αποδείξουμε ότι η χ_B είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $B \in \mathcal{L}_d$. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι $B = \{x \in A : \chi_B(x) > \frac{1}{2}\}$. Άρα, αν η χ_B είναι μετρήσιμη, τότε $B \in \mathcal{L}_d$. Αντιστρόφως, έστω ότι

$B \in \mathcal{L}_d$. Τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\{x \in A : \chi_B(x) > a\} = \begin{cases} A, & \text{αν } a < 0 \\ B, & \text{αν } 0 \leq a < 1 \\ \emptyset, & \text{αν } a \geq 1 \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση είναι $\{x \in A : \chi_B(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$. Άρα η χ_B είναι μετρήσιμη.

Ορισμός. Αν $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ και $B \subseteq A$, τότε η συνάρτηση $f\big|_B : B \to \overline{\mathbb{R}}$ με τύπο

$$f\big|_B(x) = f(x)$$

για κάθε $x \in B$ ονομάζεται **περιορισμός της** f **στο** B.

Πρόταση 3.2. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και Lebesgue μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Αν $B \subseteq A$ και $B \in \mathcal{L}_d$ τότε η $f\big|_B$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\{x \in B : f\big|_B(x) > a\} = \{x \in B : f(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > a\} \cap B.$$

Είναι $\{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$ και $B \in \mathcal{L}_d$, οπότε $\{x \in B : f\big|_B(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$ και, επομένως, η $f\big|_B$ είναι μετρήσιμη. $\square$

Πρόταση 3.3. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Έστω, επίσης, $A_n \in \mathcal{L}_d \quad (n \in \mathbb{N})$ ώστε τα A_n να είναι ανά δύο ξένα και $\cup_{n=1}^{+\infty} A_n = A$. Αν για κάθε n η $f\big|_{A_n} : A_n \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, τότε και η $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\{x \in A : f(x) > a\} = \cup_{n=1}^{+\infty}\{x \in A_n : f(x) > a\} = \cup_{n=1}^{+\infty}\{x \in A_n : f\big|_{A_n}(x) > a\}.$$

Κάθε $f\big|_{A_n}$ είναι μετρήσιμη, οπότε $\{x \in A_n : f\big|_{A_n}(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$ για κάθε n, οπότε $\{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$. Άρα η f είναι μετρήσιμη. $\square$

Σχόλιο. Η Πρόταση 3.2 λέει ότι, αν μια μετρήσιμη συνάρτηση σε μικρότερο μετρήσιμο πεδίο ορισμού, τότε η συνάρτηση που προκύπτει είναι κι αυτή μετρήσιμη. Η Πρόταση 3.3 λέει ότι, αν συγκολλήσουμε αριθμήσιμες μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε η συνάρτηση που προκύπτει είναι μετρήσιμη.

Με αυτές τις δυο μεθόδους μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα μεγάλο απόθεμα μετρήσιμων συναρτήσεων. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση στον $\mathbb{R}^d$ και πάρουμε τον περιορισμό της σε οποιοδήποτε διάστημα στον $\mathbb{R}^d$, τότε αυτός ο περιορισμός είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το συγκεκριμένο διάστημα. Κατόπιν, αν θεωρήσουμε αριθμήσιμες τέτοιες συναρτήσεις, δηλαδή περιορισμούς συνεχών συναρτήσεων σε αριθμήσιμα διαστήματα τα οποία είναι ξένα ανά δύο και αν συγκολλήσουμε αυτές τις συναρτήσεις, τότε προκύπτει συνάρτηση που, όπως είναι γνωστό, την χαρακτηρίζουμε **κατά τμήματα συνεχή**. Άρα, *κάθε κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση είναι μετρήσιμη*. Μπορούμε, πιο γενικά, να συγκολλήσουμε αριθμήσιμες συνεχείς συναρτήσεις αφού πρώτα τις περιορίσουμε σε ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα. Η συνάρτηση που προκύπτει είναι κι αυτή μετρήσιμη.

Ορισμός. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\lambda f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ με τον τύπο

$$(\lambda f)(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \lambda = 0 \text{ και } f(x) = \pm\infty \\ \lambda f(x), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Πρόταση 3.4. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$, μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε η $\lambda f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda = 0$. Τότε η λf είναι σταθερή 0 στο A, οπότε είναι μετρήσιμη.
Έστω $\lambda > 0$. Τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\{x \in A : (\lambda f)(x) > a\} = \{x \in A : \lambda f(x) > a\} = \left\{x \in A : f(x) > \frac{a}{\lambda}\right\} \in \mathcal{L}_d\,.$$

Άρα η λf είναι μετρήσιμη.
Έστω $\lambda < 0$. Τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\{x \in A : (\lambda f)(x) > a\} = \{x \in A : \lambda f(x) > a\} = \left\{x \in A : f(x) < \frac{a}{\lambda}\right\} \in \mathcal{L}_d\,.$$

Άρα η λf είναι μετρήσιμη. $\square$

Ορισμός. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f + g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ με τον τύπο

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } f(x) = \pm\infty \text{ και } g(x) = \mp\infty \\ f(x) + g(x), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Πρόταση 3.5. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμες $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε η $f + g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Χωρίζουμε το A στα εξής τέσσερα υποσύνολά του.

$$\begin{aligned}
B &= \{x \in A : -\infty < f(x) < +\infty, -\infty < g(x) < +\infty\},\\
C &= \{x \in A : f(x) = +\infty, g(x) > -\infty\} \cup \{x \in A : g(x) = +\infty, f(x) > -\infty\},\\
D &= \{x \in A : f(x) = -\infty, g(x) < +\infty\} \cup \{x \in A : g(x) = -\infty, f(x) < +\infty\},\\
E &= \{x \in A : f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\} \cup \{x \in A : f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\}.
\end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα B, C, D, E είναι ανά δύο ξένα καθώς και ότι $B \cup C \cup D \cup E = A$. Επίσης, τα τέσσερα σύνολα είναι μετρήσιμα. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
B &= f^{-1}\big((-\infty, +\infty)\big) \cap g^{-1}\big((-\infty, +\infty)\big) \in \mathcal{L}_d\,,\\
C &= \Big(f^{-1}\big(\{+\infty\}\big) \cap g^{-1}\big((-\infty, +\infty]\big)\Big) \cup \Big(g^{-1}\big(\{+\infty\}\big) \cap f^{-1}\big((-\infty, +\infty]\big)\Big) \in \mathcal{L}_d\,,\\
D &= \Big(f^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cap g^{-1}\big([-\infty, +\infty)\big)\Big) \cup \Big(g^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cap f^{-1}\big([-\infty, +\infty)\big)\Big) \in \mathcal{L}_d\,,\\
E &= \Big(f^{-1}\big(\{+\infty\}\big) \cap g^{-1}\big(\{-\infty\}\big)\Big) \cup \Big(f^{-1}\big(\{-\infty\}\big) \cap g^{-1}\big(\{+\infty\}\big)\Big) \in \mathcal{L}_d\,.
\end{aligned}$$

Κατόπιν, παρατηρούμε ότι $(f+g)(x) = +\infty$ για κάθε $x \in C$. Άρα η $(f+g)\big|_C$ είναι σταθερή $+\infty$ στο πεδίο ορισμού της, το C, και, επομένως, είναι μετρήσιμη.
Ομοίως, είναι $(f+g)(x) = -\infty$ για κάθε $x \in D$. Άρα η $(f+g)\big|_D$ είναι σταθερή $-\infty$ στο πεδίο ορισμού της, το D, και, επομένως, είναι μετρήσιμη.
Τέλος, είναι $(f+g)(x) = 0$ για κάθε $x \in E$. Άρα η $(f+g)\big|_E$ είναι σταθερή 0 στο πεδίο ορισμού της, το E, και, επομένως, είναι μετρήσιμη.

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 3.3, για να αποδείξουμε ότι η $f+g$ είναι μετρήσιμη, αρκεί να αποδείξουμε ότι η $(f+g)\big|_B$ είναι μετρήσιμη.
Θεωρούμε μια οποιαδήποτε αρίθμηση του $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \{r_1\,, r_2\,, r_3\,, \dots\}.$$

Τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\begin{aligned}\{x \in B : (f+g)\big|_B(x) > a\} &= \{x \in B : (f+g)(x) > a\} \\ &= \{x \in B : f(x) + g(x) > a\} \\ &= \cup_{n=1}^{+\infty}\{x \in B : f(x) > r_n\,, g(x) > a - r_n\}.\end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε την τελευταία ισότητα σκεφτόμαστε ως εξής. Έστω $y \in \cup_{n=1}^{+\infty}\{x \in B : f(x) > r_n\,, g(x) > a-r_n\}$. Τότε υπάρχει κάποιος $n \in \mathbb{N}$ ώστε $y \in \{x \in B : f(x) > r_n\,, g(x) > a-r_n\}$ και, επομένως, $y \in B$, $f(y) > r_n$ και $g(y) > a-r_n$. Συνεπάγεται $y \in B$ και $f(y)+g(y) > r_n+(a-r_n) = a$, οπότε $y \in \{x \in B : f(x) + g(x) > a\}$. Αντιστρόφως, έστω $y \in \{x \in B : f(x) + g(x) > a\}$. Τότε $y \in B$ και $f(y) + g(y) > a$, οπότε $f(y) > a - g(y)$. Λόγω της πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$, υπάρχει κάποιος ρητός ανάμεσα στους $f(y)$ και $a - g(y)$. Δηλαδή υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $y \in B$ και $f(y) > r_n > a-g(y)$. Άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $y \in B$, $f(y) > r_n$ και $g(y) > a-r_n$ και, επομένως, $y \in \{x \in B : f(x) > r_n\,, g(x) > a - r_n\}$. Άρα $y \in \cup_{n=1}^{+\infty}\{x \in B : f(x) > r_n\,, g(x) > a - r_n\}$.
Τώρα, είναι

$$\{x \in B : f(x) > r_n\,, g(x) > a - r_n\} = B \cap \{x \in A : f(x) > r_n\} \cap \{x \in A : g(x) > a - r_n\} \in \mathcal{L}_d$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και, επομένως, $\{x \in B : (f+g)\big|_B(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$. Άρα η $(f+g)\big|_B$ είναι μετρήσιμη. □

Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 3.4 και 3.5, βλέπουμε ότι αν $A \in \mathcal{L}_d$ και οι $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμες, τότε και η

$$f - g = f + (-1)g : A \to \overline{\mathbb{R}}$$

είναι μετρήσιμη.

Λήμμα 3.2. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε η $f^2 : A \to \overline{\mathbb{R}}$ με τύπο $(f^2)(x) = \big(f(x)\big)^2$ για κάθε $x \in A$ είναι κι αυτή μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Αν $a < 0$, τότε

$$\{x \in A : (f^2)(x) > a\} = \{x \in A : \big(f(x)\big)^2 > a\} = A \in \mathcal{L}_d\,.$$

Αν $a \geq 0$, τότε

$$\begin{aligned}\{x \in A : (f^2)(x) > a\} &= \{x \in A : \big(f(x)\big)^2 > a\} \\ &= \{x \in A : f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in A : f(x) < -\sqrt{a}\} \in \mathcal{L}_d\,.\end{aligned}$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση, είναι $\{x \in A : (f^2)(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$ και, επομένως, η f^2 είναι μετρήσιμη. □

Ορισμός. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $fg : A \to \overline{\mathbb{R}}$ με τον τύπο

$$(fg)(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } f(x) = \pm\infty,\ g(x) = 0 \text{ ή αν } f(x) = 0,\ g(x) = \pm\infty \\ f(x)g(x), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Πρόταση 3.6. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμες $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε η $fg : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Χωρίζουμε το A στα εξής τέσσερα υποσύνολά του.

$$\begin{aligned}
B &= \{x \in A : -\infty < f(x) < +\infty, -\infty < g(x) < +\infty\},\\
C &= \{x \in A : f(x) = +\infty, g(x) > 0\} \cup \{x \in A : f(x) = -\infty, g(x) < 0\}\\
&\quad \cup \{x \in A : f(x) > 0, g(x) = +\infty\} \cup \{x \in A : f(x) < 0, g(x) = -\infty\},\\
D &= \{x \in A : f(x) = -\infty, g(x) > 0\} \cup \{x \in A : f(x) = +\infty, g(x) < 0\}\\
&\quad \cup \{x \in A : f(x) > 0, g(x) = -\infty\} \cup \{x \in A : f(x) < 0, g(x) = +\infty\},\\
E &= \{x \in A : f(x) = 0, g(x) = +\infty\} \cup \{x \in A : f(x) = 0, g(x) = -\infty\}\\
&\quad \cup \{x \in A : f(x) = +\infty, g(x) = 0\} \cup \{x \in A : f(x) = -\infty, g(x) = 0\}.
\end{aligned}$$

Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.5, εύκολα αποδεικνύεται ότι τα σύνολα B, C, D, E είναι μετρήσιμα, ξένα ανά δύο και ότι $B \cup C \cup D \cup E = A$. Κατόπιν, παρατηρούμε ότι η fg είναι σταθερή $+\infty$ στο C, σταθερή $-\infty$ στο D και σταθερή 0 στο E. Άρα οι περιορισμοί $(fg)\big|_C$, $(fg)\big|_D$ και $(fg)\big|_E$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός $(fg)\big|_B$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση.
Για κάθε $x \in B$ οι $f(x), g(x)$ είναι πραγματικοί αριθμοί και, επομένως, είναι

$$f(x)g(x) = \frac{1}{4}\big(f(x) + g(x)\big)^2 - \frac{1}{4}\big(f(x) - g(x)\big)^2.$$

Άρα για τους περιορισμούς $f\big|_B, g\big|_B$ και $(fg)\big|_B$ ισχύει

$$(fg)\big|_B = \frac{1}{4}\big(f\big|_B + g\big|_B\big)^2 - \frac{1}{4}\big(f\big|_B - g\big|_B\big)^2.$$

Είναι $B \in \mathcal{L}_d$, οπότε οι $f\big|_B$ και $g\big|_B$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις. Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 3.5, οι $f\big|_B + g\big|_B$ και $f\big|_B - g\big|_B$ είναι μετρήσιμες και, σύμφωνα με το Λήμμα 3.2, οι $\big(f\big|_B + g\big|_B\big)^2$ και $\big(f\big|_B - g\big|_B\big)^2$ είναι μετρήσιμες. Άρα η $(fg)\big|_B$ είναι μετρήσιμη. □

Πρόταση 3.7. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμες $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε $\{x \in A : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{L}_d$.*

Απόδειξη. Είναι $\{x \in A : f(x) = g(x)\} = \{x \in A : (f - g)(x) = 0\} = (f - g)^{-1}\big(\{0\}\big) \in \mathcal{L}_d$, διότι η $f - g$ είναι μετρήσιμη. □

Πρόταση 3.8. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμες $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε οι $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι κι αυτές μετρήσιμες.*

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι για οποιουσδήποτε $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ ισχύει: $\max\{b, c\} > a$ αν και μόνο αν είτε $b > a$ είτε $c > a$. Άρα, για κάθε $a \in \mathbb{R}$, είναι

$$\begin{aligned}
\{x \in A : \max\{f, g\}(x) > a\} &= \{x \in A : \max\{f(x), g(x)\} > a\}\\
&= \{x \in A : f(x) > a \text{ ή } g(x) > a\}\\
&= \{x \in A : f(x) > a\} \cup \{x \in A : g(x) > a\}.
\end{aligned}$$

Είναι $\{x \in A : f(x) > a\}, \{x \in A : g(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$ και, επομένως, $\{x \in A : \max\{f, g\}(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$. Άρα η $\max\{f, g\}$ είναι μετρήσιμη.
Επειδή οι f, g είναι μετρήσιμες, συνεπάγεται ότι οι $-f, -g$ είναι μετρήσιμες, οπότε η $\max\{-f, -g\}$ είναι μετρήσιμη. Άρα και η $\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}$ είναι μετρήσιμη. □

Ορισμός. Για κάθε $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ορίζουμε

$$a^+ = \max\{a, 0\} = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ 0, & \text{αν } a \leq 0 \end{cases} \qquad a^- = -\min\{a, 0\} = \begin{cases} 0, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a \leq 0 \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι ισχύει

$$a^+ \geq 0, \quad a^- \geq 0, \quad a^+ - a^- = a, \quad a^+ + a^- = |a|.$$

Ορισμός. Τώρα, για κάθε $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ορίζουμε τις συναρτήσεις $f^+ = \max\{f, 0\}, f^- = -\min\{f, 0\}$, όπου 0 είναι η μηδενική συνάρτηση στο A.

Φυσικά, για τις τιμές των συναρτήσεων αυτών ισχύει $f^+(x) = \max\{f, 0\}(x) = \max\{f(x), 0\} = \big(f(x)\big)^+$ και, ομοίως, $f^-(x) = -\min\{f, 0\}(x) = -\min\{f(x), 0\} = \big(f(x)\big)^-$. Επίσης,

$$f^+ \geq 0, \quad f^- \geq 0, \quad f^+ - f^- = f, \quad f^+ + f^- = |f|.$$

Πρόταση 3.9. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε οι $f^+, f^-, |f| : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι κι αυτές μετρήσιμες.*

Απόδειξη. Άμεση εφαρμογή των προηγούμενων προτάσεων και ειδικότερα της Πρότασης 3.8. $\square$

Ορισμός. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και συναρτήσεις $f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\sup_{n \geq 1} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad \inf_{n \geq 1} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$$

με τους τύπους

$$\big(\sup_{n \geq 1} f_n\big)(x) = \sup\{f_n(x) : n \geq 1\}, \quad \big(\inf_{n \geq 1} f_n\big)(x) = \inf\{f_n(x) : n \geq 1\}$$

για κάθε $x \in A$.
Φυσικά, με εντελώς ανάλογο τρόπο ορίζονται, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, και οι

$$\sup_{n \geq m} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad \inf_{n \geq m} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}.$$

Αν, για συντομία, συμβολίσουμε $g_m = \sup_{n \geq m} f_n$, τότε παρατηρούμε ότι ισχύει $g_{m+1} \leq g_m$ στο κοινό πεδίο ορισμού A και, επομένως, είναι $\lim_{m \to +\infty} g_m = \inf_{m \geq 1} g_m$ στο A. Ομοίως, αν συμβολίσουμε $h_m = \inf_{n \geq m} f_n$, τότε ισχύει $h_{m+1} \geq h_m$ στο A και, επομένως, είναι $\lim_{m \to +\infty} h_m = \sup_{m \geq 1} h_m$ στο A. Ορίζουμε, τώρα, τις συναρτήσεις

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}, \qquad \underline{\lim_{n \to +\infty}} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$$

με τους τύπους

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} f_n = \inf_{m \geq 1} \big(\sup_{n \geq m} f_n\big) = \lim_{m \to +\infty} \big(\sup_{n \geq m} f_n\big), \qquad \underline{\lim_{n \to +\infty}} f_n = \sup_{m \geq 1} \big(\inf_{n \geq m} f_n\big) = \lim_{m \to +\infty} \big(\inf_{n \geq m} f_n\big).$$

Με άλλα λόγια, για κάθε $x \in A$ είναι

$$\big(\overline{\lim_{n \to +\infty}} f_n\big)(x) = \overline{\lim_{n \to +\infty}} f_n(x), \qquad \big(\underline{\lim_{n \to +\infty}} f_n\big)(x) = \underline{\lim_{n \to +\infty}} f_n(x).$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύουν τα εξής:
(i) $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x)$ και
(ii) $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x)$ αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ και, στην περίπτωση αυτή, ισχύει

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Μπορούμε, λοιπόν, να ορίσουμε το σύνολο

$$B = \{x \in A : \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x)\} = \{x \in A : \text{το } \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ υπάρχει}\}$$

οπότε ακριβώς στο σύνολο B μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$\lim_{n\to+\infty} f_n : B \to \overline{\mathbb{R}}$$

με τύπο

$$\big(\lim_{n\to+\infty} f_n\big)(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Πρόταση 3.10. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμες $f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$.*
(1) *Οι $\sup_{n\geq1} f_n$, $\inf_{n\geq1} f_n$, $\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμες.*
(2) *Για το σύνολο $B = \big\{x \in A : \text{το } \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ υπάρχει}\big\}$ ισχύει $B \in \mathcal{L}_d$ και η $\lim_{n\to+\infty} f_n : B \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. (1) Αν $P \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ και $a \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει το εξής: $a < \sup P$ αν και μόνο αν ο a δεν είναι άνω φράγμα του P αν και μόνο αν υπάρχει $p \in P$ ώστε $p > a$. Αυτό θα το χρησιμοποιήσουμε στη δεύτερη ισότητα παρακάτω:

$$\begin{aligned}\big\{x \in A : \big(\sup_{n\geq1} f_n\big)(x) > a\big\} &= \big\{x \in A : \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} > a\big\}\\ &= \{x \in A : \text{υπάρχει } n \in \mathbb{N} \text{ ώστε } f_n(x) > a\}\\ &= \cup_{n=1}^{+\infty}\{x \in A : f_n(x) > a\}.\end{aligned}$$

Κάθε f_n είναι μετρήσιμη, οπότε $\{x \in A : f_n(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$ για κάθε n και, επομένως, $\big\{x \in A : \big(\sup_{n\geq1} f_n\big)(x) > a\big\} \in \mathcal{L}_d$. Άρα η $\sup_{n\geq1} f_n$ είναι μετρήσιμη.
Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\inf_{n\geq1} f_n = -\sup_{n\geq1}(-f_n)$. Επειδή κάθε f_n είναι μετρήσιμη, συνεπάγεται ότι κάθε $-f_n$ είναι μετρήσιμη, οπότε από τα προηγούμενα συνεπάγεται ότι η $\sup_{n\geq1}(-f_n)$ είναι μετρήσιμη και άρα η $\inf_{n\geq1} f_n$ είναι μετρήσιμη.
Τέλος, με διαδοχική εφαρμογή των προηγουμένων, έχουμε ότι κάθε $g_m = \sup_{n\geq m} f_n$ είναι μετρήσιμη και ότι η $\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \inf_{m\geq1} g_m$ είναι μετρήσιμη. Ομοίως, κάθε $h_m = \inf_{n\geq m} f_n$ είναι μετρήσιμη και η $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \sup_{m\geq1} h_m$ είναι μετρήσιμη.
(2) Επειδή οι $\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμες, σύμφωνα με την Πρόταση 3.7 το

$$B = \{x \in A : \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x)\}$$

είναι μετρήσιμο. Επομένως και οι περιορισμοί $\big(\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n\big)\big|_B$ και $\big(\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n\big)\big|_B$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις. Όμως, είναι

$$\big(\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n\big)\big|_B = \big(\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n\big)\big|_B = \lim_{n\to+\infty} f_n$$

και, επομένως, η $\lim_{n\to+\infty} f_n$ είναι μετρήσιμη. □

Ασκήσεις.

1. Εφαρμόζοντας τον ορισμό, αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι μετρήσιμες.

$$f(x) = \frac{1}{x} \ (0 < x < 1), \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{αν } 0 < x \le 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } -1 < x \le 0 \\ -4, & \text{αν } 0 < x \le 2 \\ 3, & \text{αν } 2 < x \le 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \tan x, & \text{αν } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ +\infty, & \text{αν } x = \frac{\pi}{2} \\ -\infty, & \text{αν } x = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 1 \\ 2, & \text{αν } x = 1 \\ 2 - x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

   Υπόδειξη: Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων και αποδείξτε ότι είναι μετρήσιμα $\subseteq \mathbb{R}$. Επίσης, για κάθε f και κάθε $a \in \mathbb{R}$ βρείτε το σύνολο $\{x : f(x) > a\}$.

2. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$, $N \subseteq A$ και $N \notin \mathcal{L}_d$. Θεωρήστε τη συνάρτηση με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in N \\ -1, & \text{αν } x \in A \setminus N \end{cases}$$

   Αποδείξτε ότι η f δεν είναι μετρήσιμη στο A ενώ η $|f|$ είναι μετρήσιμη στο A.
   Υπόδειξη: Βρείτε κάποιο $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\{x \in A : f(x) > a\} \notin \mathcal{L}_d$.

3. Έστω $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Αποδείξτε ότι $f^+ f^- = 0$ και $f^n = (f^+)^n + (f^-)^n$ στο A για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, αν $f = g - h$ και $g, h \ge 0$ στο A, αποδείξτε ότι $f^+ \le g$ και $f^- \le h$ στο A.

4. Έστω $0 < p < +\infty$, $A \in \mathcal{L}_d$ και $f : A \to [0, +\infty]$. Αν η f είναι μετρήσιμη, αποδείξτε ότι και η $f^p : A \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμη.
   Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον ορισμό.

5. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Αν $B = \{x \in A : f(x) \neq 0\}$, αποδείξτε ότι η $\frac{1}{g} : B \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.
   Υπόδειξη: Αποδείξτε πρώτα ότι $B \in \mathcal{L}_d$ και εφαρμόστε τον ορισμό.

6. Αν η $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μονότονη, αποδείξτε ότι είναι μετρήσιμη.
   Υπόδειξη: Πάρτε οποιοδήποτε $a \in \mathbb{R}$. Τί είναι το $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$;

7. Βρείτε τις συναρτήσεις $\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n$ και $\lim_{n\to+\infty} f_n$ καθώς και τα πεδία ορισμού τους για τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων.
   (i) $f_n(x) = x^n$ $(0 \le x \le 1)$,
   (ii) $f_{2n}(x) = \left(1 + \frac{x}{2n}\right)^{2n}$, $f_{2n-1}(x) = \left(1 - \frac{x}{2n-1}\right)^{2n-1}$ $(0 \le x < +\infty)$,
   (iii) $f_{2n}(x) = x - x^{2n}$, $f_{2n-1}(x) = x^{2n-1}$ $(0 \le x \le 1)$,
   (iv) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \{r_1, \ldots, r_n\} \\ 1, & \text{αν } x \in [0,1] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\} \end{cases}$ όπου $Q \cap [0,1] = \{r_1, r_2, \ldots\}$ είναι οποιαδήποτε αρίθμηση του $Q \cap [0,1]$.

8. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Επίσης, έστω αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ και $B = S^{-1}(A)$. Αποδείξτε ότι, αν η f είναι μετρήσιμη, τότε και η $f \circ S : B \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη.
Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\{x \in B : (f \circ S)(x) > a\} = S^{-1}\big(\{y \in A : f(y) > a\}\big)$.

9. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμη $f : A \to \mathbb{R}$. Επίσης, έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.
Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\{x \in A : (g \circ f)(x) > a\} = f^{-1}\big(\{y \in \mathbb{R} : g(y) > a\}\big)$. Κατόπιν, παρατηρήστε ότι το $\{y \in \mathbb{R} : g(y) > a\}$ είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$. Χρησιμοποιήστε ότι κάθε ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων.

10. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Αποδείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\{x \in A : f(x) \geq a\} \in \mathcal{L}_d$.
Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\{x \in A : f(x) \geq a\} = \cap_{n=1}^{+\infty}\{x \in A : f(x) > a - \frac{1}{n}\}$. Επίσης, $\{x \in A : f(x) > a\} = \cup_{n=1}^{+\infty}\{x \in A : f(x) \geq a + \frac{1}{n}\}$.
Κάντε το ίδιο, αντικαθιστώντας το $\geq$ στο $\{x \in A : f(x) \geq a\}$ με το $<$ καθώς και με το $\leq$.

11. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Έστω, επίσης, και ένα $D \subseteq \mathbb{R}$ το οποίο είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ (για παράδειγμα, το $D = \mathbb{Q}$). Αποδείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $r \in D$ ισχύει $\{x \in A : f(x) > r\} \in \mathcal{L}_d$.
Υπόδειξη: Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει (γιατί;) ακολουθία (r_n) έτσι ώστε $r_n \in D$ και $r_n > a$ για κάθε n και $r_n \to a$. Παρατηρήστε ότι $\{x \in A : f(x) > a\} = \cup_{n=1}^{+\infty}\{x \in A : f(x) > r_n\}$.

12. Έστω οποιοδήποτε $E \subseteq \mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τον τύπο $f(x) = \begin{cases} -e^x, & \text{αν } x \notin E \\ e^x, & \text{αν } x \in E \end{cases}$ Αποδείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = a\}$ είναι είτε μονοσύνολο είτε κενό. Επομένως το σύνολο αυτό είναι μετρήσιμο στον $\mathbb{R}$ για κάθε a. Όμως, αποδείξτε ότι η f δεν είναι μετρήσιμη.

13. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Ορίζουμε

$$\mu_f(a) = m_d\big(\{x \in A : f(x) < a\}\big)$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:
(i) η μ_f είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $\mu_f \geq 0$ στο $\mathbb{R}$,
(ii) η μ_f είναι συνεχής από αριστερά σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$, δηλαδή ότι $\lim_{a' \to a-} \mu_f(a') = \mu_f(a)$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$,
(iii) $\lim_{a' \to +\infty} \mu_f(a') + m_d(\{x \in A : f(x) = +\infty\}) = m_d(A)$.
Θεωρούμε και το $M = \{a \in \mathbb{R} : \mu_f(a) = +\infty\}$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση: $M = \mathbb{R}$. Τότε αποδείξτε ότι $\mu_f = +\infty$ στο $\mathbb{R}$.
Δεύτερη περίπτωση: $M = \emptyset$. Τότε αποδείξτε ότι $0 \leq \mu_f < +\infty$ στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε, επίσης, ότι $\lim_{a' \to a+} \mu_f(a') = \mu_f(a) + m_d(\{x \in A : f(x) = a\})$. Αυτό σημαίνει ότι η μ_f είναι συνεχής στο a αν και μόνο αν $m_d(\{x \in A : f(x) = a\}) = 0$. Επίσης, αυτό σημαίνει ότι το άλμα της μ_f στο a, δηλαδή το $\lim_{a' \to a+} \mu_f(a') - \lim_{a' \to a-} \mu_f(a')$, είναι ίσο με $m_d(\{x \in A : f(x) = a\})$.
Τρίτη περίπτωση: $M \neq \emptyset$ και $M \neq \mathbb{R}$. Τότε το M είναι κάτω φραγμένο και, επομένως, έχει infimum. Έστω $a_0 = \inf M$. Αποδείξτε ότι $0 \leq \mu_f(a) < +\infty$ για κάθε $a < a_0$ και $\mu_f(a) = +\infty$ για κάθε $a > a_0$. Αποδείξτε, επίσης, ότι όλα τα συμπεράσματα της δεύτερης περίπτωσης ισχύουν για $a < a_0$.

3.2 L-σχεδόν παντού.

Ορισμός. Έστω κάποια ιδιότητα $P = P(x)$ η οποία αναφέρεται σε κάποια μεταβλητή x και η οποία ισχύει ή δεν ισχύει ανάλογα με τις τιμές που παίρνει η μεταβλητή x. Για παράδειγμα, η ιδιότητα $x^2 > 2$ ή η ιδιότητα $x = 7$. Αν, λοιπόν, έχουμε μια τέτοια ιδιότητα και η μεταβλητή x παίρνει τιμές μέσα από το σύνολο $A \in \mathcal{L}_d$ τότε λέμε ότι **η $P(x)$ ισχύει για L-σχεδόν κάθε $x \in A$** ή **η P ισχύει L-σχεδόν παντού στο A** ή, απλούστερα, ότι **η $P(x)$ ισχύει για σχεδόν κάθε $x \in A$** ή **η P ισχύει σχεδόν παντού στο A** αν το σύνολο των x για τα οποία δεν ισχύει η $P(x)$ έχει d-διάστατο μέτρο ίσο με 0 :

$$m_d\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\}\big) = 0.$$

Παρατηρούμε ότι, αν η P ισχύει σχεδόν παντού στο $A \in \mathcal{L}_d$ τότε, εξ ορισμού, $\{x \in A :$ δεν ισχύει η $P(x)\} \in \mathcal{L}_d$ και, επομένως,

$$\{x \in A : \text{ ισχύει η } P(x)\} = A \setminus \{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\} \in \mathcal{L}_d\,.$$

Μάλιστα, είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned} m_d(A) &= m_d\big(\{x \in A : \text{ ισχύει η } P(x)\}\big) + m_d\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\}\big) \\ &= m_d\big(\{x \in A : \text{ ισχύει η } P(x)\}\big). \end{aligned}$$

Έστω ότι έχουμε δυο ιδιότητες $P = P(x)$ και $Q = Q(x)$ με μεταβλητή x στο $A \in \mathcal{L}_d$. Ας υποθέσουμε ότι η P συνεπάγεται την Q, δηλαδή ότι για κάθε x: *αν ισχύει η $P(x)$, τότε ισχύει και η $Q(x)$*. Τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: *αν η P ισχύει σχεδόν παντού στο A, τότε και η Q ισχύει σχεδόν παντού στο A.* Αυτό αποδεικνύεται εύκολα ως εξής. Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι $\{x \in A :$ δεν ισχύει η $Q(x)\} \subseteq \{x \in A :$ δεν ισχύει η $P(x)\}$, οπότε

$$\begin{aligned} m_d^*\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } Q(x)\}\big) &\leq m_d^*\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\}\big) \\ &= m_d\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\}\big) = 0. \end{aligned}$$

Άρα $\{x \in A :$ δεν ισχύει η $Q(x)\} \in \mathcal{L}_d$ και $m_d\big(\{x \in A :$ δεν ισχύει η $Q(x)\}\big) = m_d^*\big(\{x \in A :$ δεν ισχύει η $Q(x)\}\big) = 0$.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ιδιότητες $P_n = P_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ με μεταβλητή x στο $A \in \mathcal{L}_d$. Τότε σχηματίζεται η **σύζευξη** P των P_n, η οποία συμβολίζεται και $\wedge_{n=1}^{+\infty} P_n$. Αυτή είναι μια νέα πρόταση η οποία ισχύει αν και μόνο αν ισχύει κάθε P_n. Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $x \in A$: *ισχύει η $P(x)$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η $P_n(x)$*. Τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: *αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η P_n ισχύει σχεδόν παντού στο A, τότε και η P ισχύει σχεδόν παντού στο A.* Κι αυτό αποδεικνύεται εύκολα, όπως το προηγούμενο. Από την υπόθεση είναι $\{x \in A :$ δεν ισχύει η $P(x)\} = \cup_{n=1}^{+\infty}\{x \in A :$ δεν ισχύει η $P_n(x)\}$, οπότε

$$\begin{aligned} m_d^*\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\}\big) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} m_d^*\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P_n(x)\}\big) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} m_d\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P_n(x)\}\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα $\{x \in A :$ δεν ισχύει η $P(x)\} \in \mathcal{L}_d$ και $m_d\big(\{x \in A :$ δεν ισχύει η $P(x)\}\big) = m_d^*\big(\{x \in A :$ δεν ισχύει η $P(x)\}\big) = 0$.

Πολλές φορές τον τελευταίο κανόνα τον διατυπώνουμε ως εξής: *αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η P_n ισχύει σχεδόν παντού στο A, τότε όλες ταυτόχρονα οι P_n ισχύουν σχεδόν παντού στο A.*

Πρόταση 3.11. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Αν $B \subseteq A$ με $m_d(A \setminus B) = 0$ και η $f\big|_B$ είναι μετρήσιμη, τότε και η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\{x \in A : f(x) > a\} = \{x \in B : f(x) > a\} \cup \{x \in A \setminus B : f(x) > a\}.$$

Τώρα, $\{x \in B : f(x) > a\} = \{x \in B : f\big|_B(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$ διότι η $f\big|_B$ είναι μετρήσιμη. Επίσης, $\{x \in A \setminus B : f(x) > a\} \subseteq A \setminus B$. Επειδή $m_d(A \setminus B) = 0$, συνεπάγεται $m_d^*\big(\{x \in A \setminus B : f(x) > a\}\big) = 0$ και, επομένως, $\{x \in A \setminus B : f(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$. Άρα $\{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{L}_d$, οπότε η f είναι μετρήσιμη. □

Πρόταση 3.12. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Έστω και μια $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ τέτοια ώστε να ισχύει $g = f$ σχεδόν παντού στο A. Τότε η g είναι κι αυτή μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $B = \{x \in A : g(x) = f(x)\}$. Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι $m_d(A \setminus B) = 0$, οπότε $A \setminus B \in \mathcal{L}_d$ και, επομένως, $B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{L}_d$. Άρα η $f\big|_B$ είναι μετρήσιμη και, επειδή, $g\big|_B = f\big|_B$, συνεπάγεται ότι και η $g\big|_B$ είναι μετρήσιμη. Από την Πρόταση 3.11 συνεπάγεται ότι η g είναι μετρήσιμη. □

Πρόταση 3.13. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμες $f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Έστω και μια $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Αν ισχύει $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A, τότε και η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $B = \{x \in A : \text{το } \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ υπάρχει}\}$ και $C = \{x \in A : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)\}$.
Σύμφωνα με την Πρόταση 3.10, ισχύει $B \in \mathcal{L}_d$ και η $\lim_{n\to+\infty} f_n : B \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη. Επίσης, $C \subseteq B \subseteq A$ και από την υπόθεση συνεπάγεται ότι $m_d(A \setminus C) = 0$. Άρα $C \in \mathcal{L}_d$. Επομένως, η $f\big|_C = \big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\big)\big|_C$ είναι μετρήσιμη και, από την Πρόταση 3.11, η f είναι μετρήσιμη. □

Ασκήσεις.

1. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και $\mathcal{M}_A$ το σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Για κάθε $f, g \in \mathcal{M}_A$ ορίζουμε $f \sim g$ αν $f = g$ σχεδόν παντού στο A. Αποδείξτε ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathcal{M}_A$.
   Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\{x \in A : f(x) \neq h(x)\} \subseteq \{x \in A : f(x) \neq g(x)\} \cup \{x \in A : g(x) \neq h(x)\}$.

2. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και $f_1, f_2, g_1, g_2 : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Υποθέστε ότι $f_1 = g_1$ σχεδόν παντού στο A και $f_2 = g_2$ σχεδόν παντού στο A.
   Αποδείξτε ότι καθένα από τα παρακάτω ισχύει σχεδόν παντού στο A:
   $$f_1 + f_2 = g_1 + g_2\,, \qquad f_1 f_2 = g_1 g_2\,, \qquad \lambda f_1 = \lambda f_2\,,$$
   $$\max\{f_1, f_2\} = \max\{g_1, g_2\}, \qquad \min\{f_1, f_2\} = \min\{g_1, g_2\}.$$
   Αποδείξτε ότι αν $f_1 \leq f_2$ σχεδόν παντού στο A, τότε $g_1 \leq g_2$ σχεδόν παντού στο A.

3. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και $f_n, g_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Υποθέστε ότι για κάθε n είναι $f_n = g_n$ σχεδόν παντού στο A.
   Αποδείξτε ότι καθένα από τα παρακάτω ισχύει σχεδόν παντού στο A:
   $$\sup_{n\geq1} f_n = \sup_{n\geq1} g_n\,, \qquad \inf_{n\geq1} f_n = \inf_{n\geq1} g_n\,, \qquad \overline{\lim_{n\to+\infty}} f_n = \overline{\lim_{n\to+\infty}} g_n\,, \qquad \underline{\lim_{n\to+\infty}} f_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} g_n\,.$$

Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\{x \in A : \sup_{n\geq 1} f_n(x) \neq \sup_{n\geq 1} g_n(x)\} \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty}\{x \in A : f_n(x) \neq g_n(x)\}$.
Επίσης, αν $B \subseteq A$ είναι το πεδίο ορισμού της $\lim_{n\to+\infty} f_n$ και $C \subseteq A$ είναι το πεδίο ορισμού της $\lim_{n\to+\infty} g_n$, αποδείξτε ότι $m_d(B\triangle C) = 0$ και ότι

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} g_n$$

σχεδόν παντού στο $B \cap C$.

4. Έστω ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}^d$ και $f, g : U \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο U. Αν είναι $f = g$ σχεδόν παντού στο U, αποδείξτε ότι $f = g$ στο U.
Υπόδειξη: Έστω $f(x_0) \neq g(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in U$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει ανοικτή μπάλα $B(x_0; \delta) \subseteq U$ ώστε $\delta > 0$ και $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in B(x_0; \delta)$. Όμως, $m_d\big(B(x_0; \delta)\big) > 0$.

5. **Θεώρημα του Egoroff**. Έστω $f, f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, όπου $A \in \mathcal{L}_d$, $m_d(A) < +\infty$, κάθε f_n είναι μετρήσιμη και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A. Αποδείξτε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει σύνολο $E \subseteq A$, ώστε $E \in \mathcal{L}_d$, $m_d(A \setminus E) < \delta$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E.
Υπόδειξη: Έστω $B = \{x \in A : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)\}$. Τότε $m_d(A \setminus B) = 0$. Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $B_{n,m} = \{x \in B : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ για κάθε $k \geq m\}$. Τότε $\cup_{m=1}^{+\infty} B_{n,m} = B$ και $B_{n,m} \subseteq B_{n,m+1}$ για κάθε n, m. Άρα $\lim_{m\to+\infty} m_d(B_{n,m}) = m_d(B)$. Συνεπάγεται $\lim_{m\to+\infty} m_d(B \setminus B_{n,m}) = 0$. Άρα για κάθε n υπάρχει $m_n \in \mathbb{N}$ ώστε $m_d(B \setminus B_{n,m_n}) < \frac{\delta}{2^n}$. Ορίζουμε $E = \cap_{n=1}^{+\infty} B_{n,m_n}$. Τότε $m_d(A \setminus E) = m_d(B \setminus E) < \delta$. Επίσης, για κάθε n είναι $E \subseteq B_{n,m_n}$, οπότε $|f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ για κάθε $x \in E$ και κάθε $k \geq m_n$. Άρα $\sup\{x \in E : |f_k(x) - f(x)|\} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $k \geq m_n$. Άρα $\lim_{k\to+\infty} \sup\{x \in E : |f_k(x) - f(x)|\} = 0$.

6. Έστω ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.
Αποδείξτε ότι η f' είναι μετρήσιμη.

3.3 Απλές συναρτήσεις.

Ορισμός. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Μια συνάρτηση $\phi : A \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **απλή συνάρτηση στο** A αν το σύνολο τιμών της είναι *πεπερασμένο*. Πρέπει να τονιστεί ότι, εξ ορισμού, οι τιμές μιας απλής συνάρτησης είναι όλες *πραγματικοί αριθμοί*.

Έστω, λοιπόν, $\phi : A \to \mathbb{R}$ μια οποιαδήποτε απλή συνάρτηση στο A και έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ όλες οι (διαφορετικές ανά δύο) τιμές της. Ορίζουμε

$$A_k = \{x \in A : \phi(x) = \lambda_k\} = \phi^{-1}\big(\{\lambda_k\}\big),$$

για $1 \leq k \leq n$, το σύνολο στο οποίο η ϕ παίρνει την τιμή λ_k. Είναι φανερό ότι τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ξένα ανά δύο και ότι $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

Συγκρίνουμε την ϕ με την $\sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_{A_k}$, όπου (υπενθυμίζουμε) με χ_B συμβολίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου B. Θεωρούμε οποιοδήποτε $x \in A$. Το x ανήκει σε ακριβώς ένα από τα $A_1, \ldots, A_n$, και έστω $x \in A_{k_0}$. Συνεπάγεται ότι $\chi_{A_{k_0}}(x) = 1$ και $\chi_{A_k}(x) = 0$ για κάθε $k \neq k_0$ και, επομένως,

$$\Big(\sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_{A_k}\Big)(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \chi_{A_k}(x) = \lambda_{k_0}.$$

Από την άλλη μεριά, επειδή $x \in A_{k_0}$, συνεπάγεται

$$\phi(x) = \lambda_{k_0} .$$

Άρα

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}\Big)(x) = \phi(x)$$

για κάθε $x \in A$. Δηλαδή

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k} .$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι κάθε απλή συνάρτηση γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων.

Ορισμός. Η συγκεκριμένη γραφή $\phi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}$, όπου οι αριθμοί $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι διαφορετικοί ανά δύο, τα $A_1, \dots, A_n$ είναι ξένα ανά δύο και $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ ονομάζεται **κανονική αναπαράσταση** της ϕ.

Λήμμα 3.3. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και απλή συνάρτηση ϕ στο A. Αν $\phi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}$ είναι η κανονική αναπαράσταση της ϕ, τότε: η ϕ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $A_k \in \mathcal{L}_d$ για κάθε k.*

Απόδειξη. Αν η ϕ είναι μετρήσιμη, τότε $A_k = \phi^{-1}\big(\{\lambda_k\}\big) \in \mathcal{L}_d$.
Αντιστρόφως, αν $A_k \in \mathcal{L}_d$ για κάθε k, τότε κάθε χ_{A_k} είναι μετρήσιμη, οπότε και ο γραμμικός συνδυασμός $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}$, δηλαδή η ϕ, είναι μετρήσιμη συνάρτηση. □

Πρόταση 3.14. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$.*
(1) Αν οι ϕ, ψ είναι απλές συναρτήσεις στο A και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε και οι $\lambda\phi$, $\phi+\psi$, $\phi-\psi$, $\phi\psi$, $\max\{\phi, \psi\}$, $\min\{\phi, \psi\}$, ϕ^+, ϕ^- και $|\phi|$ είναι απλές συναρτήσεις στο A. Αν, επιπλέον, οι ϕ, ψ είναι μετρήσιμες, τότε και οι υπόλοιπες συναρτήσεις είναι μετρήσιμες.
(2) Αν η ϕ είναι απλή συνάρτηση στο A και $B \subseteq A$, τότε η $\phi\big|_B$ είναι απλή συνάρτηση στο B. Αν, επιπλέον, η ϕ είναι μετρήσιμη και $B \in \mathcal{L}_d$, τότε και η $\phi\big|_B$ είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη. (1) Έστω λ_k $(1 \le k \le n)$ όλες οι (διαφορετικές ανά δύο) τιμές της ϕ και μ_l $(1 \le l \le m)$ όλες οι (διαφορετικές ανά δύο) τιμές της ψ.
Είναι φανερό ότι οι τιμές της $\lambda\phi$ είναι η 0, αν $\lambda = 0$, ή οι $\lambda\lambda_k$ $(1 \le k \le n)$, αν $\lambda \neq 0$.
Ομοίως, οι τιμές της $\phi \pm \psi$ είναι κάποιες από τις $\lambda_k \pm \mu_l$ $(1 \le k \le n, 1 \le l \le m)$ και οι τιμές της $\phi\psi$ είναι κάποιες από τις $\lambda_k\mu_l$ $(1 \le k \le n, 1 \le l \le m)$. Επίσης, οι τιμές της $\max\{\phi, \psi\}$ είναι κάποιες από τις $\max\{\lambda_k, \mu_l\}$ $(1 \le k \le n, 1 \le l \le m)$ και οι τιμές της $\min\{\phi, \psi\}$ είναι κάποιες από τις $\min\{\lambda_k, \mu_l\}$ $(1 \le k \le n, 1 \le l \le m)$.
Άρα όλες αυτές οι συναρτήσεις έχουν πεπερασμένο σύνολο (πραγματικών) τιμών και επομένως είναι απλές συναρτήσεις στο A. Προφανώς, τότε και οι $\phi^+ = \max\{\phi, 0\}$, $\phi^- = -\min\{\phi, 0\}$ και $|\phi| = \phi^+ + \phi^-$ είναι απλές συναρτήσεις στο A.
Το συμπέρασμα για τη μετρησιμότητα είναι στοιχειώδες.
(2) Αν λ_k $(1 \le k \le n)$ όλες οι (διαφορετικές ανά δύο) τιμές της ϕ, τότε οι τιμές της $\phi\big|_B$ είναι κάποιες από τις λ_k $(1 \le k \le n)$. Άρα η $\phi\big|_B$ έχει πεπερασμένο σύνολο (πραγματικών) τιμών και επομένως είναι απλή συνάρτηση στο B.
Το συμπέρασμα για τη μετρησιμότητα είναι και πάλι στοιχειώδες. □

Η επόμενη Πρόταση 3.15 θα φανεί αρκετά χρήσιμη στο επόμενο κεφάλαιο.

Πρόταση 3.15. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^d$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ώστε $f \geq 0$ στο A. Τότε υπάρχουν απλές συναρτήσεις ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A με τις ιδιότητες:*
(i) $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$,
(ii) $\phi_n \to f$ στο A και
(iii) αν η f είναι μετρήσιμη, τότε όλες οι ϕ_n είναι κι αυτές μετρήσιμες.

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιονδήποτε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε τα εξής σύνολα:

$$E_{n,k} = \left\{ x \in A : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\} \quad (0 \leq k \leq 2^{2n} - 1)$$

και

$$F_n = \{x \in A : 2^n \leq f(x)\}.$$

Είναι σαφές ότι τα $E_{n,0}\,, E_{n,1}\,, \dots\,, E_{n,2^{2n}-1}\,, F_n$ είναι ξένα ανά δύο και ότι

$$E_{n,0} \cup E_{n,1} \cup \cdots \cup E_{n,2^{2n}-1} \cup F_n = A.$$

Είναι, επίσης, σαφές ότι, αν η f είναι μετρήσιμη, τότε όλα τα παραπάνω σύνολα είναι μετρήσιμα. Τώρα, σχηματίζουμε τη συνάρτηση $\phi_n : A \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\begin{aligned}
\phi_n &= \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + 2^n \chi_{F_n} \\
&= \frac{0}{2^n} \chi_{E_{n,0}} + \frac{1}{2^n} \chi_{E_{n,1}} + \cdots + \frac{2^{2n}-1}{2^n} \chi_{E_{n,2^{2n}-1}} + 2^n \chi_{F_n}\,.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι είναι $\phi_n \geq 0$ και ότι, αν η f είναι μετρήσιμη, τότε, επειδή όλα τα παραπάνω σύνολα είναι μετρήσιμα, συνεπάγεται ότι όλες οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις που εμφανίζονται στον τύπο της ϕ_n είναι μετρήσιμες και, επομένως, η ϕ_n είναι κι αυτή μετρήσιμη.
Για να συγκρίνουμε τις ϕ_n και ϕ_{n+1}, θεωρούμε και το σύνολο

$$G_n = \{x \in A : 2^n \leq f(x) < 2^{n+1}\}$$

και βλέπουμε τις εξής σχέσεις:

$$E_{n,k} = E_{n+1,2k} \cup E_{n+1,2k+1} \ (0 \leq k \leq 2^{2n} - 1), \quad F_n = G_n \cup F_{n+1}\,,$$

$$E_{n+1,2^{2n+1}} \cup \cdots \cup E_{n+1,2^{2n+2}-1} = G_n\,.$$

Επίσης, τα $G_n\,, F_{n+1}$ είναι ξένα. Άρα

$$\begin{aligned}
\phi_n &= \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n}\chi_{E_{n,k}} + 2^n\chi_{F_n} \\
&= \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{2k}{2^{n+1}}\Big(\chi_{E_{n+1,2k}} + \chi_{E_{n+1,2k+1}}\Big) + 2^n\big(\chi_{G_n} + \chi_{F_{n+1}}\big) \\
&\leq \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \Big(\frac{2k}{2^{n+1}}\chi_{E_{n+1,2k}} + \frac{2k+1}{2^{n+1}}\chi_{E_{n+1,2k+1}}\Big) + 2^n\chi_{G_n} + 2^{n+1}\chi_{F_{n+1}} \\
&= \sum_{l=0}^{2^{2n+1}-1} \frac{l}{2^{n+1}}\chi_{E_{n+1,l}} + 2^n\chi_{G_n} + 2^{n+1}\chi_{F_{n+1}} \\
&= \sum_{l=0}^{2^{2n+1}-1} \frac{l}{2^{n+1}}\chi_{E_{n+1,l}} + 2^n\Big(\chi_{E_{n+1,2^{2n+1}}} + \cdots + \chi_{E_{n+1,2^{2n+2}-1}}\Big) + 2^{n+1}\chi_{F_{n+1}} \\
&\leq \sum_{l=0}^{2^{2n+1}-1} \frac{l}{2^{n+1}}\chi_{E_{n+1,l}} + \sum_{l=2^{2n+1}}^{2^{2n+2}-1} \frac{l}{2^{n+1}}\chi_{E_{n+1,l}} + 2^{n+1}\chi_{F_{n+1}} \\
&= \sum_{l=0}^{2^{2n+2}-1} \frac{l}{2^{n+1}}\chi_{E_{n+1,l}} + 2^{n+1}\chi_{F_{n+1}} \\
&= \phi_{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Τέλος, μένει να αποδείξουμε ότι $\phi_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$, οπότε έστω οποιοδήποτε $x \in A$. Αν $0 \leq f(x) < +\infty$, τότε υπάρχει n_0 ώστε $f(x) < 2^n$ για κάθε $n \geq n_0$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $n \geq n_0$ και, επειδή $0 \leq 2^n f(x) < 2^{2n}$, υπάρχει k ώστε $0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$ και $k \leq 2^n f(x) < k+1$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in E_{n,k}$ και, επομένως, $\phi_n(x) = \frac{k}{2^n}$. Άρα

$$\phi_n(x) \leq f(x) < \phi_n(x) + \frac{1}{2^n}$$

για κάθε $n \geq n_0$ και, επομένως,

$$\phi_n(x) \to f(x).$$

Αν $f(x) = +\infty$, τότε για κάθε n είναι $2^n \leq f(x)$. Δηλαδή, $x \in F_n$, οπότε $\phi_n(x) = 2^n$. Άρα

$$\phi_n(x) \to +\infty = f(x).$$

□

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B\,, \quad \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B\,, \quad \chi_{A^c} = 1 - \chi_A\,.$$

2. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι απλές και ποιες είναι οι κανονικές τους αναπαραστάσεις;

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \{\frac{1}{n}\,, n \in \mathbb{N}\} \\ 0, & \text{αν } x \notin \{\frac{1}{n}\,, n \in \mathbb{N}\} \end{cases}, \qquad \phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\phi(x) = [x] \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \phi(x) = [x] \quad (-3 \leq x \leq 4).$$

3. Δείτε την άσκηση 4 της ενότητας 2.3.
   Έστω $A = \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$. Αποδείξτε ότι $\chi_A = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \chi_{A_n}$.
   Έστω $A = \underline{\lim}_{n\to+\infty} n$. Αποδείξτε ότι $\chi_A = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \chi_{A_n}$.

Κεφάλαιο 4

Το ολοκλήρωμα Lebesgue.

4.1 Απλές μη αρνητικές Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις.

Ορισμός. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και $\phi : \to [0, +\infty)$ οποιαδήποτε μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση στο A και έστω

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$$

η κανονική αναπαράστασή της. Αυτό σημαίνει ότι τα σύνολα $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{L}_d$ είναι μη κενά και ανά δύο ξένα, ότι $A_1 \cup \cdots \cup A_n = A$, ότι σε κάθε A_k η ϕ έχει σταθερή τιμή $a_k \geq 0$ και ότι οι $a_1, \ldots, a_n$ είναι όλες οι διαφορετικές ανά δύο τιμές της ϕ. Ορίζουμε το **ολοκλήρωμα Lebesgue** ή, πιο απλά, **ολοκλήρωμα** της ϕ στο A, και το συμβολίζουμε $\int_A \phi$, να είναι ο αριθμός

$$\int_A \phi = \sum_{k=1}^{n} a_k m_d(A_k).$$

Αν είναι $a_k = 0$ και $m_d(A_k) = +\infty$, τότε συμβατικά δεχόμαστε ότι $a_k m_d(A_k) = 0$.

Λήμμα 4.1. *Έστω $A, B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{L}_d$, $A = B_1 \cup \cdots \cup B_m$ και τα $B_1, \ldots, B_m$ είναι ανά δύο ξένα. Έστω, επίσης, αριθμοί $b_1, \ldots, b_m \geq 0$ και η συνάρτηση $\phi = \sum_{l=1}^{m} b_l \chi_{B_l} : A \to \mathbb{R}$. Τότε η ϕ είναι μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση στο A και ισχύει*

$$\int_A \phi = \sum_{l=1}^{m} b_l m_d(B_l).$$

Απόδειξη. Επειδή κάθε B_l είναι μετρήσιμο, κάθε χ_{B_l} είναι μετρήσιμη. Άρα και ο γραμμικός συνδυασμός $\phi = \sum_{l=1}^{m} b_l \chi_{B_l}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση στο A. Τα $B_1, \ldots, B_m$ είναι ανά δύο ξένα, οπότε η ϕ είναι σταθερή $= b_l$ σε κάθε B_l και, επειδή $A = B_1 \cup \cdots \cup B_m$, οι $b_1, \ldots, b_m$ είναι όλες οι τιμές της ϕ στο A. Οι τιμές αυτές είναι πεπερασμένες, οπότε η ϕ είναι απλή και επειδή $b_1, \ldots, b_m \geq 0$, η ϕ είναι μη αρνητική.
Αν είχαμε υποθέσει ότι οι $b_1, \ldots, b_m$ είναι ανά δύο διαφορετικοί και ότι τα $B_1, \ldots, B_m$ είναι μη κενά, τότε η $\phi = \sum_{l=1}^{m} b_l \chi_{B_l}$ θα ήταν η κανονική αναπαράσταση της ϕ. Για να υπολογίσουμε το $\int_A \phi$ πρέπει να βρούμε την κανονική αναπαράσταση της ϕ.
Αν κάποιο B_{l_0} είναι $= \emptyset$, τότε μπορούμε να το αγνοήσουμε. Πράγματι, δεν επηρεάζεται η ισότητα $A = B_1 \cup \cdots \cup B_m$, ούτε η ισότητα $\phi = \sum_{l=1}^{m} b_l \chi_{B_l}$ (διότι η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_{B_{l_0}}$ είναι ταυτοτικά μηδέν στο A), ούτε η ισότητα $\int_A \phi = \sum_{l=1}^{m} b_l m_d(B_l)$ (διότι $m_d(B_{l_0}) = m_d(\emptyset) = 0$). Επομένως, αγνοούμε όλα τα B_l τα οποία είναι κενά και, αφού αλλάξουμε την αρίθμηση και

ξανασυμβολίσουμε m το πλήθος των B_l που απομένουν, *μπορούμε να υποθέσουμε στη συνέχεια ότι όλα τα $B_1, \ldots, B_m$ είναι μη κενά.*

Κατόπιν, ομαδοποιούμε τους $b_1, \ldots, b_m$, βάζοντας όλους όσοι είναι ίσοι μεταξύ τους στην ίδια ομάδα. Αλλάζοντας, αν χρειάζεται, την αρίθμηση των $b_1, \ldots, b_m$, ας υποθέσουμε ότι δημιουργούνται n ομάδες:

$$\{b_1 = \cdots = b_{l_1}\}, \{b_{l_1+1} = \cdots = b_{l_2}\}, \ldots\ldots, \{b_{l_{n-2}+1} = \cdots = b_{l_{n-1}}\},\ \{b_{l_{n-1}+1} = \cdots = b_{l_n}\},$$

όπου (όπως δηλώνεται) σε κάθε ομάδα οι αριθμοί είναι ίσοι μεταξύ τους, όπου αριθμοί από διαφορετικές ομάδες είναι άνισοι και όπου, φυσικά, $l_n = m$. Τώρα, συμβολίζουμε a_1 την κοινή τιμή των αριθμών της πρώτης ομάδας, a_2 την κοινή τιμή των αριθμών της δεύτερης ομάδας, $\ldots, a_{n-1}$ την κοινή τιμή των αριθμών της $(n-1)$-οστής ομάδας και a_n την κοινή τιμή των αριθμών της n-οστής ομάδας. Επομένως, οι αριθμοί $a_1, \ldots, a_n$ είναι όλες οι διαφορετικές ανά δύο τιμές της ϕ. Συμβολίζουμε, επίσης,

$$\begin{aligned} A_1 = B_1 \cup \cdots \cup B_{l_1},\ A_2 = B_{l_1+1} \cup \cdots \cup B_{l_2},\ \ldots \\ \ldots, A_{n-1} = B_{l_{n-2}+1} \cup \cdots \cup B_{l_{n-1}},\ A_n = B_{l_{n-1}+1} \cup \cdots \cup B_{l_n}. \end{aligned}$$

Συνεπάγεται ότι η ϕ είναι σταθερή $= a_k$ σε κάθε A_k, ότι τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι μη κενά, ανά δύο ξένα και ότι $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Άρα ισχύει

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$$

και *αυτή είναι η κανονική αναπαράσταση της* ϕ. Άρα

$$\begin{aligned} \int_A \phi &= a_1 m_d(A_1) + \cdots + a_n m_d(A_n) \\ &= a_1\big(m_d(B_1) + \cdots + m_d(B_{l_1})\big) + \cdots + a_n\big(m_d(B_{l_{n-1}+1}) + \cdots + m_d(B_{l_n})\big) \\ &= \big(b_1 m_d(B_1) + \cdots + b_{l_1} m_d(B_{l_1})\big) + \cdots + \big(b_{l_{n-1}+1} m_d(B_{l_{n-1}+1}) + \cdots + b_{l_n} m_d(B_{l_n})\big) \\ &= b_1 m_d(B_1) + \cdots + b_m m_d(B_m). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 4.1. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$, αριθμός $\lambda \geq 0$ και μη αρνητικές μετρήσιμες απλές συναρτήσεις ϕ, ψ στο A. Τότε:*
(i) $\int_A \phi \geq 0$,
(ii) $\int_A (\lambda\phi) = \lambda \int_A \phi$,
(iii) $\int_A (\phi + \psi) = \int_A \phi + \int_A \psi$ και,
(iv) αν $\phi \leq \psi$ στο A, τότε $\int_A \phi \leq \int_A \psi$.

Απόδειξη. Έστω $\phi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ και $\psi = \sum_{l=1}^{m} b_l \chi_{B_l}$ οι κανονικές αναπαραστάσεις των ϕ, ψ.
(i) Επειδή κάθε a_k και κάθε $m_d(A_k)$ είναι ≥ 0, είναι $\int_A \phi = \sum_{k=1}^{n} a_k m_d(A_k) \geq 0$.
(ii) Είναι $\lambda\phi = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k) \chi_{A_k}$ και, από το Λήμμα 4.1, είναι $\int_A (\lambda\phi) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k) m_d(A_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k m_d(A_k) = \lambda \int_A \phi$.
(iii) Θεωρούμε τα σύνολα $C_{k,l} = A_k \cap B_l \in \mathcal{L}_d$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$ και $l = 1, \ldots, m$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα σύνολα αυτά είναι ανά δύο ξένα και ότι η ένωσή τους είναι $= A$. Επίσης, η συνάρτηση $\phi + \psi$ είναι σταθερή $= a_k + b_l$ σε κάθε $C_{k,l}$. Δηλαδή, $\phi + \psi = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} (a_k + b_l) \chi_{C_{k,l}}$ στο A. Από το Λήμμα 4.1 συνεπάγεται ότι $\int_A (\phi + \psi) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} (a_k + b_l) m_d(C_{k,l})$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι για κάθε k η ένωση των $C_{k,l}$ $(1 \leq l \leq m)$ είναι $= A_k$ και, ομοίως, για κάθε l η ένωση των

$C_{k,l}$ $(1 \leq k \leq n)$ είναι $= B_l$. Άρα είναι $\sum_{l=1}^{m} m_d(C_{k,l}) = m_d(A_k)$ και $\sum_{k=1}^{n} m_d(C_{k,l}) = m_d(B_l)$. Συνδυάζοντας όλα αυτά βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_A (\phi + \psi) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} (a_k + b_l) m_d(C_{k,l}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} a_k m_d(C_{k,l}) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} b_l m_d(C_{k,l}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \Big(\sum_{l=1}^{m} m_d(C_{k,l}) \Big) + \sum_{l=1}^{m} b_l \Big(\sum_{k=1}^{n} m_d(C_{k,l}) \Big) = \sum_{k=1}^{n} a_k m_d(A_k) + \sum_{l=1}^{m} b_l m_d(B_l) \\ &= \int_A \phi + \int_A \psi.\end{aligned}$$

(iv) Αν $\phi \leq \psi$ στο A, τότε η $\psi - \phi$ είναι μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση στο A και ισχύει $\psi = \phi + (\psi - \phi)$ στο A. Από το (iii) συνεπάγεται $\int_A \psi = \int_A \phi + \int_A (\psi - \phi)$. Από το (i) συνεπάγεται $\int_A (\psi - \phi) \geq 0$ και, επομένως, $\int_A \psi \geq \int_A \phi$. □

Ορισμός. Έστω $A, B \in \mathcal{L}_d$ με $B \subseteq A$ και μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση ϕ στο A. Όταν γράφουμε $\int_B \phi$, δηλαδή το ολοκλήρωμα της ϕ στο B, εξυπακούεται ότι θεωρούμε την ϕ περιορισμένη στο B ώστε να έχει πεδίο ορισμού το B. Ίσως θα ήταν πιο ακριβές να γράφουμε $\int_B (\phi\big|_B)$, αλλά θα αποφύγουμε αυτό το περίπλοκο σύμβολο. Θυμόμαστε, πάντως, ότι η $\phi\big|_B$ είναι μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση στο B.

Λήμμα 4.2. *Έστω $A, B \in \mathcal{L}_d$ με $B \subseteq A$ και μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση ϕ στο A. Τότε $\int_B \phi = \int_A (\phi \chi_B)$.*

Απόδειξη. Έστω $\phi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ η κανονική αναπαράσταση της ϕ στο A. Θεωρούμε τα σύνολα $B_k = A_k \cap B \in \mathcal{L}_d$. Είναι προφανές ότι τα σύνολα αυτά είναι ανά δύο ξένα και ότι η ένωσή τους είναι $= B$. Επίσης, η $\phi\big|_B$ είναι σταθερή $= a_k$ σε κάθε B_k. Δηλαδή είναι $\phi\big|_B = \sum_{k=1}^{n} a_k (\chi_{B_k})\big|_B$. Από το Λήμμα 4.1 συνεπάγεται ότι

$$\int_B \phi = \int_B (\phi\big|_B) = \sum_{k=1}^{n} a_k m_d(B_k).$$

Από την άλλη μεριά, είναι $\phi \chi_B = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k} \chi_B = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k \cap B} = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{B_k}$. Άρα, πάλι από το Λήμμα 4.1 συνεπάγεται ότι

$$\int_A (\phi \chi_B) = \sum_{k=1}^{n} a_k m_d(B_k).$$

Άρα $\int_B \phi = \int_A (\phi \chi_B)$. □

Αξίζει να θυμόμαστε τον τύπο

$$\int_B \phi = \sum_{k=1}^{n} a_k m_d(B_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k m_d(A_k \cap B)$$

που υπάρχει μέσα στην απόδειξη του Λήμματος 4.2.

Λήμμα 4.3. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση ϕ στο A. Επίσης, έστω $E_n \in \mathcal{L}_d$ $(n \in \mathbb{N})$ ώστε $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$ και έστω $E = \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Τότε $\int_{E_n} \phi \to \int_E \phi$.*

Απόδειξη. Έστω $\phi = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{A_k}$ η κανονική αναπαράσταση της ϕ στο A. Επειδή $A_k \cap E_n \subseteq A_k \cap E_{n+1}$ για κάθε $n \geq 1$ και $A_k \cap E = \cup_{n=1}^{+\infty}(A_k \cap E_n)$, συνεπάγεται

$$m_d(A_k \cap E_n) \to m_d(A_k \cap E).$$

Επομένως,

$$\int_{E_n} \phi = \sum_{k=1}^{m} a_k m_d(A_k \cap E_n) \to \sum_{k=1}^{m} a_k m_d(A_k \cap E) = \int_{E} \phi.$$

□

Λήμμα 4.4. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μη αρνητικές μετρήσιμες απλές συναρτήσεις ϕ, ψ και $\phi_n\,, \psi_n \quad (n \in \mathbb{N})$ στο A.*
(1) *Αν $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ στο A για κάθε $n \geq 1$ και $\phi \leq \lim_{n\to+\infty} \phi_n$ στο A, τότε $\int_A \phi \leq \lim_{n\to+\infty} \int_A \phi_n$.*
(2) *Αν $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ και $\psi_n \leq \psi_{n+1}$ στο A για κάθε $n \geq 1$ και $\lim_{n\to+\infty} \phi_n \leq \lim_{n\to+\infty} \psi_n$ στο A, τότε $\lim_{n\to+\infty} \int_A \phi_n \leq \lim_{n\to+\infty} \int_A \psi_n$.*
(3) *Αν $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ και $\psi_n \leq \psi_{n+1}$ στο A για κάθε $n \geq 1$ και $\lim_{n\to+\infty} \phi_n = \lim_{n\to+\infty} \psi_n$ στο A, τότε $\lim_{n\to+\infty} \int_A \phi_n = \lim_{n\to+\infty} \int_A \psi_n$.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι από την $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ στο A συνεπάγεται η $\int_A \phi_n \leq \int_A \phi_{n+1}$. Επομένως η ακολουθία $\int_A \phi_n \quad (n \in \mathbb{N})$ έχει όριο, δηλαδή υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} \int_A \phi_n$. Το ίδιο, φυσικά, ισχύει και για το $\lim_{n\to+\infty} \int_A \psi_n$.
(1) Θεωρούμε οποιονδήποτε αριθμό λ με $0 < \lambda < 1$ και για κάθε $n \geq 1$ ορίζουμε το σύνολο

$$E_n = \{x \in A : \lambda\phi(x) \leq \phi_n(x)\}.$$

Επειδή η συνάρτηση $\phi_n - \lambda\phi$ είναι μετρήσιμη και $E_n = \{x \in A : (\phi_n - \lambda\phi)(x) \geq 0\}$, συνεπάγεται ότι $E_n \in \mathcal{L}_d$ για κάθε n. Επίσης, είναι προφανές ότι $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n και ότι $A = \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Ας δούμε λίγο πιο προσεκτικά τη δεύτερη σχέση. Επειδή $E_n \subseteq A$ για κάθε n, συνεπάγεται $\cup_{n=1}^{+\infty} E_n \subseteq A$. Έστω, τώρα, τυχόν $x \in A$. Αν $\phi(x) = 0$, τότε $\lambda\phi(x) = 0$, οπότε η $\phi_n(x) \geq \lambda\phi(x)$ ισχύει για κάθε n, οπότε $x \in E_n$ για κάθε n και, επομένως, $x \in \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Αν $\phi(x) > 0$, τότε $\lambda\phi(x) < \phi(x)$. Επειδή $\phi(x) \leq \lim_{n\to+\infty} \phi_n(x)$, συνεπάγεται ότι ισχύει $\lambda\phi(x) \leq \phi_n(x)$ για κάθε $n \geq$ από κάποιον $n_0 \in \mathbb{N}$. Άρα ισχύει $x \in E_n$ για κάθε $n \geq n_0$ και, επομένως, $x \in \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, είναι $x \in \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$ και, επομένως, $A \subseteq \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$.
Τώρα, από το Λήμμα 4.3 συνεπάγεται

$$\int_A \phi = \lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} \phi.$$

Επειδή ισχύει $\lambda\phi \leq \phi_n$ στο E_n είναι $\int_{E_n} (\lambda\phi) \leq \int_{E_n} \phi_n$. Ακόμη, είναι $\int_{E_n} \phi_n = \int_A (\phi_n \chi_{E_n}) \leq \int_A \phi_n$, διότι ισχύει $\phi_n \chi_{E_n} \leq \phi_n$ στο A. Άρα

$$\lambda \int_A \phi = \lim_{n\to+\infty} \lambda \int_{E_n} \phi = \lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} (\lambda\phi) \leq \lim_{n\to+\infty} \int_A \phi_n\,.$$

Επειδή η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε λ με $0 < \lambda < 1$ και τα $\int_A \phi$ και $\lim_{n\to+\infty} \int_A \phi_n$ δεν εξαρτώνται από τον λ, παίρνοντας όριο καθώς $\lambda \to 1-$, συμπεραίνουμε ότι $\int_A \phi \leq \lim_{n\to+\infty} \int_A \phi_n$.
(2). Θεωρούμε οποιονδήποτε k και παρατηρούμε ότι, επειδή $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ στο A για κάθε n, συνεπάγεται $\phi_k \leq \lim_{n\to+\infty} \phi_n$ στο A. Άρα $\phi_k \leq \lim_{n\to+\infty} \psi_n$ στο A και, επομένως, από το (1) συνεπάγεται

$$\int_A \phi_k \leq \lim_{n\to+\infty} \int_A \psi_n\,.$$

Αυτό ισχύει για κάθε k, οπότε $\lim_{k\to+\infty}\int_A \phi_k \le \lim_{n\to+\infty}\int_A \psi_n$. Αυτό ακριβώς θέλαμε να αποδείξουμε.
(3) Η $\lim_{n\to+\infty}\phi_n = \lim_{n\to+\infty}\psi_n$ σημαίνει ότι $\lim_{n\to+\infty}\phi_n \le \lim_{n\to+\infty}\psi_n$ και $\lim_{n\to+\infty}\psi_n \le \lim_{n\to+\infty}\phi_n$. Άρα από το (2) συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty}\int_A \phi_n \le \lim_{n\to+\infty}\int_A \psi_n$ και $\lim_{n\to+\infty}\int_A \psi_n \le \lim_{n\to+\infty}\int_A \phi_n$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}\int_A \phi_n = \lim_{n\to+\infty}\int_A \psi_n$. □

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των παρακάτω απλών συναρτήσεων, αφού βρείτε τις κανονικές αναπαραστάσεις τους.

$$\chi_{[0,5]} + 2\chi_{[-1,0)}\,, \quad 3\chi_{[1,7]} + 2\chi_{[2,8]} + \chi_{[-1,4]}\,, \quad \chi_{\mathbb{Q}}\,, \quad 2\chi_{\mathbb{Q}} + 3\chi_{[0,1]}\,,$$

$$2\chi_{[0,1]\times[-1,2]}\,, \quad \chi_{[0,1)\times[1,+\infty)} + 5\chi_{[-1,3]\times[2,7]}\,, \quad \chi_{\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}\,,$$

$$2\chi_{\{1\}\times[1,+\infty)} + \chi_{[1,3)\times[-2,1)}\,, \quad \chi_{[0,1]\times[1,2]\times[-1,4)} + 3\chi_{[-1,2]\times[1,2)\times[0,2)}\,.$$

Κατόπιν, υπολογίστε τα ίδια ολοκληρώματα (πολύ πιο εύκολα) χωρίς να βρείτε τις κανονικές αναπαραστάσεις.

4.2 Μη αρνητικές Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις.

Ορισμός. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμη συνάρτηση $f : A \to [0,+\infty]$. Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων απλών συναρτήσεων $\phi_n : A \to [0,+\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ με τις ιδιότητες: (i) $0 \le \phi_n \le \phi_{n+1}$ στο A για κάθε n και (ii) $\phi_n \to f$ στο A. Το ότι υπάρχει τουλάχιστον μια τέτοια ακολουθία εξασφαλίζεται από την Πρόταση 3.15. Κατόπιν, θεωρούμε την ακολουθία των ολοκληρωμάτων $\int_A \phi_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Αυτά τα ολοκληρώματα έχουν ορισθεί στην προηγούμενη ενότητα 4.1 και είναι στοιχεία του $[0,+\infty]$ (Πρόταση 4.1), δηλαδή μη αρνητικοί αριθμοί ή $+\infty$. Επειδή $\phi_n \le \phi_{n+1}$ στο A, συνεπάγεται από την Πρόταση 4.1 ότι $\int_A \phi_n \le \int_A \phi_{n+1}$. Άρα η ακολουθία των ολοκληρωμάτων είναι αύξουσα και, επομένως, έχει όριο το οποίο είναι στοιχείο του $[0,+\infty]$. Ορίζουμε το **ολοκλήρωμα Lebesgue** ή, πιο απλά, **ολοκλήρωμα** της f στο A, και το συμβολίζουμε $\int_A f$, να είναι το όριο

$$\int_A f = \lim_{n\to+\infty}\int_A \phi_n\,.$$

Όπως είπαμε, η Πρόταση 3.15 εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ακολουθίας ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ με τις ιδιότητες (i) και (ii). Εν γένει, υπάρχουν περισσότερες τέτοιες ακολουθίες (για την ίδια f). Έστω ότι ψ_n $(n \in \mathbb{N})$ είναι κι αυτή μια οποιαδήποτε ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων απλών συναρτήσεων με τις ίδιες ιδιότητες: (i) $0 \le \psi_n \le \psi_{n+1}$ στο A για κάθε n και (ii) $\psi_n \to f$ στο A. Τότε ισχύει $\lim_{n\to+\infty}\phi_n = \lim_{n\to+\infty}\psi_n$ στο A, οπότε από το Λήμμα 4.4(3) συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to+\infty}\int_A \phi_n = \lim_{n\to+\infty}\int_A \psi_n$. Αυτό σημαίνει ότι το $\int_A f$, όπως το ορίσαμε προηγουμένως, *είναι καλώς ορισμένο*.

Πρόταση 4.2. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$, αριθμός $\lambda \ge 0$ και μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις f, g στο A. Τότε:*
(i) $\int_A f \ge 0$,
(ii) $\int_A (\lambda f) = \lambda \int_A f$,
(iii) $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$ *και,*
(iv) *αν* $f \le g$ *στο* A, *τότε* $\int_A f \le \int_A g$.

Απόδειξη. (i) Αυτό το έχουμε ήδη αποδείξει.
(ii) Θεωρούμε μετρήσιμες απλές συναρτήσεις $\phi_n : A \to [0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ ώστε $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$ στο A για κάθε n και $\phi_n \to f$ στο A. Συνεπάγεται από τον ορισμό του $\int_A f$ ότι $\int_A \phi_n \to \int_A f$. Τώρα ορίζουμε τις μετρήσιμες απλές συναρτήσεις $\lambda\phi_n : A \to [0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$. Γι αυτές ισχύει $0 \leq \lambda\phi_n \leq \lambda\phi_{n+1}$ στο A για κάθε n και $\lambda\phi_n \to \lambda f$ στο A. Συνεπάγεται από τον ορισμό του $\int_A(\lambda f)$ ότι $\int_A(\lambda\phi_n) \to \int_A(\lambda f)$. Από την Πρόταση 4.1, έχουμε ότι $\int_A(\lambda\phi_n) = \lambda \int_A \phi_n$. Άρα

$$\int_A (\lambda f) = \lim_{n\to+\infty} \int_A (\lambda\phi_n) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\lambda \int_A \phi_n\Big) = \lambda \lim_{n\to+\infty} \int_A \phi_n = \lambda \int_A f.$$

(ii) Εκτός από τις ϕ_n, θεωρούμε και μετρήσιμες απλές συναρτήσεις $\psi_n : A \to [0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ ώστε $0 \leq \psi_n \leq \psi_{n+1}$ στο A για κάθε n και $\psi_n \to g$ στο A. Από τον ορισμό του $\int_A g$ είναι $\int_A \psi_n \to \int_A g$. Τώρα ορίζουμε τις μετρήσιμες απλές συναρτήσεις $\phi_n + \psi_n : A \to [0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$. Γι αυτές ισχύει $0 \leq (\phi_n + \psi_n) \leq (\phi_{n+1} + \psi_{n+1})$ στο A για κάθε n και $\phi_n + \psi_n \to f + g$ στο A. Συνεπάγεται από τον ορισμό του $\int_A(f+g)$ ότι $\int_A(\phi_n + \psi_n) \to \int_A(f+g)$. Από την Πρόταση 4.1, είναι $\int_A(\phi_n + \psi_n) = \int_A \phi_n + \int_A \psi_n$. Άρα

$$\int_A (f+g) = \lim_{n\to+\infty} \int_A (\phi_n + \psi_n) = \lim_{n\to+\infty} \Big(\int_A \phi_n + \int_A \psi_n\Big) = \int_A f + \int_A g.$$

(iii) Θεωρούμε τις ϕ_n και ψ_n, όπως πριν. Επειδή $f \leq g$ στο A, είναι $\lim_{n\to+\infty} \phi_n \leq \lim_{n\to+\infty} \psi_n$ στο A. Από το Λήμμα 4.4(2) προκύπτει ότι

$$\int_A f = \lim \int_A \phi_n \leq \lim \int_A \psi_n = \int_A g.$$

$\square$

Ορισμός. Έστω $A, B \in \mathcal{L}_d$ με $B \subseteq A$ και μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f στο A. Όπως και στην περίπτωση των απλών συναρτήσεων, όταν γράφουμε $\int_B f$ θα εννοούμε το ολοκλήρωμα του περιορισμού $f\big|_B$ της f στο B, η οποία είναι μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στο B.

Λήμμα 4.5. *Έστω $A, B \in \mathcal{L}_d$ με $B \subseteq A$ και μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f στο A. Τότε $\int_B f = \int_A (f\chi_B)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μετρήσιμες απλές συναρτήσεις ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$ στο A για κάθε n και $\phi_n \to f$ στο A. Τότε οι $\phi_n\big|_B$ $(n \in \mathbb{N})$ είναι μετρήσιμες απλές συναρτήσεις στο B και ισχύει $0 \leq \phi_n\big|_B \leq \phi_{n+1}\big|_B$ στο B για κάθε n και $\phi_n\big|_B \to f\big|_B$ στο B. Από τον ορισμό του $\int_B f = \int_B (f\big|_B)$ είναι $\int_B \phi_n = \int_B (\phi_n\big|_B) \to \int_B (f\big|_B) = \int_B f$. Ομοίως, οι $\phi_n\chi_B$ $(n \in \mathbb{N})$ είναι μετρήσιμες απλές συναρτήσεις στο A και ισχύει $0 \leq \phi_n\chi_B \leq \phi_{n+1}\chi_B$ στο A για κάθε n και $\phi_n\chi_B \to f\chi_B$ στο A. Από τον ορισμό του $\int_A(f\chi_B)$ είναι $\int_A(\phi_n\chi_B) \to \int_A(f\chi_B)$. Από το Λήμμα 4.2 έχουμε ότι $\int_B \phi_n = \int_A(\phi_n\chi_B)$ και, επομένως,

$$\int_B f = \lim_{n\to+\infty} \int_B \phi_n = \lim_{n\to+\infty} \int_A (\phi_n\chi_B) = \int_A (f\chi_B).$$

$\square$

Πρόταση 4.3. *Έστω $A, B, C \in \mathcal{L}_d$ με $B, C \subseteq A$, $B \cap C = \emptyset$ και μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f στο A. Τότε $\int_{B\cup C} f = \int_B f + \int_C f$.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 4.2 και το Λήμμα 4.5, συνεπάγεται

$$\int_{B\cup C} f = \int_A (f\chi_{B\cup C}) = \int_A \big(f(\chi_B+\chi_C)\big) = \int_A (f\chi_B+f\chi_C) = \int_A (f\chi_B)+\int_A (f\chi_C) = \int_B f+\int_C f.$$

Παρατηρήστε ότι η ισότητα $\chi_{B\cup C} = \chi_B + \chi_C$ ισχύει στο A ακριβώς επειδή τα B, C είναι ξένα. $\square$

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του ολοκληρώματος μη αρνητικών συναρτήσεων για να υπολογίσετε το $\int_{[0,+\infty)} f$ των

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\chi_{[k-1,k)}\,, \quad f = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\chi_{[k-1,k)}\,, \quad f = \sum_{k=1}^{+\infty} k\chi_{(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}\,.$$

Υπόδειξη: Για την πρώτη f δοκιμάστε τις $\phi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\chi_{[k-1,k)}$ και αποδείξτε ότι είναι μη αρνητικές μετρήσιμες στο $[0, +\infty)$, ότι $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ και $\phi_n \to f$ στο $[0, +\infty)$.

4.3 Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις.

Ορισμός. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε τις $f^+, f^- : A \to [0, +\infty]$ για τις οποίες ισχύει

$$f = f^+ - f^-\,, \qquad |f| = f^+ + f^-$$

στο A. Στην προηγούμενη ενότητα ορίσαμε τα $\int_A f^+$ και $\int_A f^-$ και, τώρα, ορίζουμε το **ολοκλήρωμα Lebesgue** ή, απλούστερα, **ολοκλήρωμα** της f στο A, και το συμβολίζουμε $\int_A f$, ως εξής:

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-\,.$$

Προσοχή! Τα $\int_A f^+$ και $\int_A f^-$ είναι στοιχεία του $[0, +\infty]$. Στην περίπτωση που προκύπτει απροσδιόριστη μορφή, δηλαδή αν $\int_A f^+ = +\infty$ και $\int_A f^- = +\infty$, τότε *δεν ορίζεται το* $\int_A f$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:
(i) Αν $0 \leq \int_A f^+ < +\infty$ και $0 \leq \int_A f^- < +\infty$, τότε το $\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-$ είναι πραγματικός αριθμός.
(ii) Αν $\int_A f^+ = +\infty$ και $0 \leq \int_A f^- < +\infty$, τότε $\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^- = +\infty$.
(iii) Αν $0 \leq \int_A f^+ < +\infty$ και $\int_A f^- = +\infty$, τότε $\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^- = -\infty$.
(iv) Αν $\int_A f^+ = +\infty$ και $\int_A f^- = +\infty$, τότε το $\int_A f$ δεν ορίζεται.

Παρατηρούμε ότι

$$\int_A |f| = \int_A f^+ + \int_A f^-\,.$$

Αυτό είναι άμεση εφαρμογή της Πρότασης 4.2, επειδή οι f^+, f^- είναι μη αρνητικές.

Ορισμός. Με τα ίδια σύμβολα, η f χαρακτηρίζεται **Lebesgue ολοκληρώσιμη** ή, πιο απλά, **ολοκληρώσιμη** στο A αν το $\int_A f$ είναι αριθμός (και όχι $\pm\infty$).

Λήμμα 4.6. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο A αν και μόνο αν οι f^+ και f^- είναι ολοκληρώσιμες στο A αν και μόνο αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο A.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με τις προηγούμενες παρατηρήσεις, το $\int_A f$ είναι αριθμός αν και μόνο αν τα $\int_A f^+$ και $\int_A f^-$ είναι και τα δυο αριθμοί. Επίσης, από την ισότητα $\int_A |f| = \int_A f^+ + \int_A f^-$ (και επειδή και οι τρεις ποσότητες είναι μη αρνητικές) προκύπτει ότι τα $\int_A f^+$ και $\int_A f^-$ είναι και τα δυο αριθμοί αν και μόνο αν το $\int_A |f|$ είναι αριθμός. $\square$

Βάσει του Λήμματος 4.6:

Η f είναι ολοκληρώσιμη στο A αν και μόνο αν $\int_A |f| < +\infty$.

Πρόταση 4.4. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$, αριθμός λ και ολοκληρώσιμες f, g στο A. Τότε:*
(i) *η λf είναι ολοκληρώσιμη στο A και*

$$\int_A (\lambda f) = \lambda \int_A f.$$

(ii) *η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο A και*

$$\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g.$$

(iii) *αν $f \leq g$ στο A, τότε $\int_A f \leq \int_A g$.*

Απόδειξη. (i) Επειδή $|\lambda| \geq 0$ και $|f| \geq 0$, από την Πρόταση 4.2 συνεπάγεται $\int_A |\lambda f| = \int_A |\lambda||f| = |\lambda| \int_A |f| < +\infty$, διότι $\int_A |f| < +\infty$. Άρα η λf είναι ολοκληρώσιμη. Επομένως, εκτός από τα $\int_A f^+$, $\int_A f^-$ και τα $\int_A (\lambda f)^+$, $\int_A (\lambda f)^-$ είναι αριθμοί.
Αν $\lambda = 0$, τότε, από τον τρόπο που έχει ορισθεί η συνάρτηση λf, είναι $\lambda f = 0$ στο A (ακόμη κι αν η f έχει τιμές $\pm\infty$ σε σημεία του A). Ακόμη, επειδή το $\int_A f$ είναι αριθμός, συνεπάγεται $\int_A (\lambda f) = \int_A 0 = 0 = \lambda \int_A f$.
Τώρα, έστω $\lambda > 0$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ και $(\lambda f)^- = \lambda f^-$ στο A. Άρα, πάλι από την Πρόταση 4.2, συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\int_A (\lambda f) &= \int_A (\lambda f)^+ - \int_A (\lambda f)^- = \int_A (\lambda f^+) - \int_A (\lambda f^-) = \lambda \int_A f^+ - \lambda \int_A f^- \\ &= \lambda \Big(\int_A f^+ - \int_A f^- \Big) = \lambda \int_A f.\end{aligned}$$

Τέλος, έστω $\lambda < 0$. Τότε $(\lambda f)^+ = -\lambda f^-$ και $(\lambda f)^- = -\lambda f^+$ στο A. Άρα, και πάλι από την Πρόταση 4.2 (προσέξτε: $-\lambda > 0$), συνεπάγεται

$$\begin{aligned}\int_A (\lambda f) &= \int_A (\lambda f)^+ - \int_A (\lambda f)^- = \int_A (-\lambda f^-) - \int_A (-\lambda f^+) \\ &= -\lambda \int_A f^- + \lambda \int_A f^+ = \lambda \Big(\int_A f^+ - \int_A f^- \Big) = \lambda \int_A f.\end{aligned}$$

(ii) Από την Πρόταση 4.2 συνεπάγεται $\int_A |f + g| \leq \int_A (|f| + |g|) = \int_A |f| + \int_A |g| < +\infty$, διότι $\int_A |f| < +\infty$ και $\int_A |g| < +\infty$. Άρα η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη και, επομένως, εκτός από τα $\int_A f^+$, $\int_A f^-$, $\int_A g^+$, $\int_A g^-$ και τα $\int_A (f + g)^+$, $\int_A (f + g)^-$ είναι αριθμοί.
Τώρα, ισχύει $(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ και, επομένως, $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+$ στο A. (Αυτό είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί, αλλά έχει πολλές λεπτομέρειες με τις οποίες ας ασχοληθείτε εσείς. Μην ξεχνάτε ότι, από τον τρόπο που έχει ορισθεί η $f + g$, είναι

$(f+g)(x) = 0$ στην περίπτωση που $f(x) = \pm\infty$ και $g(x) = \mp\infty$.) Επειδή όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στην τελευταία ισότητα είναι ≥ 0, από την Πρόταση 4.2 συνεπάγεται

$$\int_A (f+g)^+ + \int_A f^- + \int_A g^- = \int_A \Big((f+g)^+ + f^- + g^-\Big) = \int_A \Big((f+g)^- + f^+ + g^+\Big)$$
$$= \int_A (f+g)^- + \int_A f^+ + \int_A g^+$$

και, επειδή όλα τα ολοκληρώματα είναι αριθμοί,

$$\int_A (f+g)^+ - \int_A (f+g)^- = \int_A f^+ - \int_A f^- + \int_A g^+ - \int_A g^- \,.$$

Άρα $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$.
(iii) Από την $f \leq g$ συνεπάγεται $f^+ - f^- \leq g^+ - g^-$ και, επομένως, $f^+ + g^- \leq f^- + g^+$ (κι αυτό χρειάζεται λίγες πράξεις για να αποδειχθεί). Άρα, από την Πρόταση 4.2,

$$\int_A f^+ + \int_A g^- = \int_A (f^+ + g^-) \leq \int_A (f^- + g^+) = \int_A f^- + \int_A g^+$$

και, επειδή όλα τα ολοκληρώματα είναι αριθμοί,

$$\int_A f^+ - \int_A f^- \leq \int_A g^+ - \int_A g^- \,.$$

Άρα $\int_A f \leq \int_A g$. □

Λήμμα 4.7. *Έστω $A, B \in \mathcal{L}_d$ με $B \subseteq A$ και μετρήσιμη συνάρτηση f στο A. Τότε:*
(i) $\int_B f = \int_A (f\chi_B)$.
(ii) η f είναι ολοκληρώσιμη στο B αν και μόνο αν η $f\chi_B$ είναι ολοκληρώσιμη στο A.

Απόδειξη. (i) Ισχύει $(f\big|_B)^+ = f^+\big|_B$ και $(f\big|_B)^- = f^-\big|_B$. Άρα

$$\int_B f = \int_B (f\big|_B) = \int_B (f\big|_B)^+ - \int_B (f\big|_B)^- = \int_B (f^+\big|_B) - \int_B (f^+\big|_B) = \int_B f^+ - \int_B f^- \,.$$

Από το Λήμμα 4.5 συνεπάγεται $\int_B f^+ = \int_A (f^+\chi_B)$ και $\int_B f^- = \int_A (f^-\chi_B)$. Επίσης, είναι εύκολο να δει κανείς ότι $f^+\chi_B = (f\chi_B)^+$ και $f^-\chi_B = (f\chi_B)^-$. Άρα

$$\int_B f = \int_A (f^+\chi_B) - \int_A (f^-\chi_B) = \int_A (f\chi_B)^+ - \int_A (f\chi_B)^- = \int_A (f\chi_B).$$

(ii) Από το (i) είναι προφανές ότι το $\int_B f$ είναι αριθμός αν και μόνο αν το $\int_A (f\chi_B)$ είναι αριθμός. □

Πρόταση 4.5. *Έστω $A, B, C \in \mathcal{L}_d$ με $B, C \subseteq A$, $B \cap C = \emptyset$ και ολοκληρώσιμη συνάρτηση f στο A. Τότε $\int_{B\cup C} f = \int_B f + \int_C f$.*

Απόδειξη. Επειδή $|f\chi_B| = |f||\chi_B| = |f|\chi_B \leq |f|$ στο A, συνεπάγεται $\int_A |f\chi_B| \leq \int_A |f| < +\infty$. Άρα η $f\chi_B$ είναι ολοκληρώσιμη στο A. Ομοίως και $f\chi_C$ είναι ολοκληρώσιμη στο A. Επομένως, από την Πρόταση 4.4 και το Λήμμα 4.7, συνεπάγεται

$$\int_{B\cup C} f = \int_A (f\chi_{B\cup C}) = \int_A \big(f(\chi_B + \chi_C)\big) = \int_A (f\chi_B + f\chi_C) = \int_A (f\chi_B) + \int_A (f\chi_C) = \int_B f + \int_C f.$$

□

Ασκήσεις.

1. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ με $m_d(A) < +\infty$. Αν η f^2 είναι ολοκληρώσιμη στο A, αποδείξτε ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο A.
Υπόδειξη: $|f| \leq \frac{1}{2}f^2 + \frac{1}{2}$.

2. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμες f, g στο A ώστε $f \leq g$ στο A. Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει το $\int_A f$ και είναι $\neq -\infty$, τότε υπάρχει και το $\int_A g$ και $\int_A f \leq \int_A g$.
Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $0 \leq g^- \leq f^-$ στο A.

3. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$, αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός $S : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ και $B = S^{-1}(A)$.
(1) Αν η $\phi : A \to [0, +\infty)$ είναι μετρήσιμη απλή συνάρτηση στο A με κανονική αναπαράσταση $\phi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}$, αποδείξτε ότι η $\phi \circ S : B \to [0, +\infty)$ είναι κι αυτή μετρήσιμη απλή συνάρτηση στο B με κανονική αναπαράσταση $\phi \circ S = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{S^{-1}(A_k)}$. Κατόπιν, αποδείξτε ότι $\int_B (\phi \circ S) = \frac{1}{|\det S|} \int_A \phi$.
(2) Αν η $f : A \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμη, αποδείξτε ότι
$$\int_B (f \circ S) = \frac{1}{|\det S|} \int_A f.$$
Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση 8 της ενότητας 3.1. Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του (1) και τον ορισμό του $\int_A f$.
(2) Έστω ολοκληρώσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Αποδείξτε ότι η $f \circ S$ είναι κι αυτή ολοκληρώσιμη στο B και ότι $\int_B (f \circ S) = \frac{1}{|\det S|} \int_A f$.
Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα του (2).

4. Βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ αλλά ώστε η $|f|$ να είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$.

4.4 Ο ρόλος των συνόλων μηδενικού μέτρου Lebesgue.

Πρόταση 4.6. *Έστω $A, B \in \mathcal{L}_d$ με $B \subseteq A$ και $m_d(B) = 0$. Τότε για κάθε μετρήσιμη f στο A ισχύει $\int_B f = 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιαδήποτε μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση ϕ στο A και έστω $\phi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}$ η κανονική της αναπαράσταση. Από τον τύπο αμέσως μετά το Λήμμα 4.2 συνεπάγεται
$$\int_B \phi = \sum_{k=1}^n a_k m_d(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^n a_k 0 = 0,$$
διότι $A_k \cap B \subseteq B$ και, επομένως, $m_d(A_k \cap B) = 0$.
Τώρα, έστω μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f στο A. Παίρνουμε οποιαδήποτε ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων απλών ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ στο A για κάθε n και $\phi_n \to f$ στο A. Οι σχέσεις αυτές ισχύουν, προφανώς, και στο B. Μόλις αποδείξαμε ότι $\int_B \phi_n = 0$ για κάθε n και από τον ορισμό του $\int_B f$ συνεπάγεται
$$\int_B f = \lim_{n \to +\infty} \int_B \phi_n = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0.$$

Τέλος, έστω μετρήσιμη f στο A. Τότε $\int_B f^+ = 0$ και $\int_B f^- = 0$ και, επειδή και τα δυο αυτά ολοκληρώματα είναι αριθμοί,

$$\int_B f = \int_B f^+ - \int_B f^- = 0 - 0 = 0.$$

$\square$

Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι τα σύνολα μηδενικού μέτρου είναι *αμελητέα* σε σχέση με το ολοκλήρωμα. Η επόμενη πρόταση καταγράφει μερικά χρήσιμα πορίσματα.

Πρόταση 4.7. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$, αριθμός λ και μετρήσιμες f, g, h στο A.*
(i) Αν οι f, g είναι ίσες σχεδόν παντού στο A και η f είναι ολοκληρώσιμη στο A, τότε και η g είναι ολοκληρώσιμη στο A και $\int_A f = \int_A g$.
(ii) Αν $h = \lambda f$ σχεδόν παντού στο A και η f είναι ολοκληρώσιμη στο A, τότε και η h είναι ολοκληρώσιμη στο A και $\int_A h = \lambda \int_A f$.
(iii) Αν $h = f + g$ σχεδόν παντού στο A και οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο A, τότε και η h είναι ολοκληρώσιμη στο A και $\int_A h = \int_A f + \int_A g$.
(iv) Αν $f \leq g$ σχεδόν παντού στο A και οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο A, τότε $\int_A f \leq \int_A g$.

Απόδειξη. (i) Έστω $B = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$, οπότε $m_d(B) = 0$. Επειδή οι f, g είναι μετρήσιμες στο A συνεπάγεται ότι $B \in \mathcal{L}_d$ και, επομένως, $A \setminus B \in \mathcal{L}_d$. Από τις Προτάσεις 4.5 (ή 4.3) και 4.6 και επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο A, συνεπάγεται

$$\int_{A\setminus B} |f| = \int_{A\setminus B} |f| + \int_B |f| = \int_A |f| < +\infty.$$

Όμως είναι $g = f$ και, επομένως, $|g| = |f|$ στο $A \setminus B$, οπότε

$$\int_{A\setminus B} |g| = \int_{A\setminus B} |f| < +\infty.$$

Τέλος, από τις Προτάσεις 4.3 και 4.6 συνεπάγεται

$$\int_A |g| = \int_{A\setminus B} |g| + \int_B |g| = \int_{A\setminus B} |g| < +\infty.$$

Άρα η g είναι ολοκληρώσιμη στο A. Ομοίως:

$$\int_A g = \int_{A\setminus B} g + \int_B g = \int_{A\setminus B} g = \int_{A\setminus B} f = \int_{A\setminus B} f + \int_B f = \int_A f.$$

(ii) Από την Πρόταση 4.4 συνεπάγεται ότι η λf είναι ολοκληρώσιμη στο A και $\int_A (\lambda f) = \lambda \int_A f$. Άρα, από το (i) έχουμε ότι και η h είναι ολοκληρώσιμη στο A και $\int_A h = \int_A (\lambda f) = \lambda \int_A f$.
(iii) Από την Πρόταση 4.4 συνεπάγεται ότι η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο A και $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$. Άρα, από το (i) προκύπτει ότι και η h είναι ολοκληρώσιμη στο A και $\int_A h = \int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$.
(iv) Όπως στο (i) θεωρούμε το $B = \{x \in A : f(x) > g(x)\}$, οπότε $m_d(B) = 0$. Επειδή $f \leq g$ στο $A \setminus B$, συνεπάγεται

$$\int_A g = \int_{A\setminus B} g + \int_B g = \int_{A\setminus B} g \leq \int_{A\setminus B} f = \int_{A\setminus B} f + \int_B f = \int_A f.$$

$\square$

Πρόταση 4.8. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και ολοκληρώσιμη f στο A. Αν $B = \{x \in A : f(x) = \pm\infty\}$, τότε $m_d(B) = 0$.*

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι $B \in \mathcal{L}_d$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση

$$\phi(x) = \begin{cases} n, & \text{αν } x \in B \\ 0, & \text{αν } x \in A \setminus B \end{cases}$$

Τότε ισχύει $\phi \le |f|$ στο A, οπότε

$$n\, m_d(B) = \int_A \phi \le \int_A |f|.$$

Συνεπάγεται

$$0 \le m_d(B) \le \frac{1}{n} \int_A |f|$$

για κάθε n και, παίρνοντας το όριο καθώς $n \to +\infty$, προκύπτει $m_d(B) = 0$. □

Ασκήσεις.

1. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμη $f : A \to [0, +\infty]$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει $\int_A f \ge 0$. Αποδείξτε ότι, αν $\int_A f = 0$, τότε $f = 0$ σχεδόν παντού στο A.
   Υπόδειξη: Έστω, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $E_n = \{x \in A : f(x) \ge \frac{1}{n}\}$. Παρατηρήστε ότι $E_n \in \mathcal{L}_d$ και $\frac{1}{n}\chi_{E_n} \le f$ στο A. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{n} m_d(E_n) \le \int_A f$ και, επομένως, ότι $m_d(E_n) = 0$. Παρατηρήστε ότι $\{x \in A : f(x) > 0\} = \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$.

2. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ με $m_d(A) < +\infty$. Έστω, επίσης, αριθμοί l, u και μετρήσιμη f στο A ώστε να ισχύει $l \le f \le u$ σχεδόν παντού στο A.
   (i) Αποδείξτε ότι $l m_d(A) \le \int_A f \le u m_d(A)$.
   (ii) Αποδείξτε ότι η αριστερή ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν είναι $f = l$ σχεδόν παντού στο A. Ομοίως, για την δεξιά ανισότητα.
   Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.

4.5 Τα οριακά θεωρήματα.

Αυτή η ενότητα είναι ίσως η πιο σημαντική για τη θεωρία των ολοκληρωμάτων Lebesgue. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, τα αποτελέσματα που θα δούμε τώρα διαχωρίζουν τα ολοκληρώματα Lebesgue από τα ολοκληρώματα Riemann που μαθαίνουμε στον Απειροστικό Λογισμό.

Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης (Lebesgue). *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μη αρνητικές μετρήσιμες $f, f_n : A \to [0, +\infty]$ $(n \in \mathbb{N})$ έτσι ώστε να ισχύει $f_n \le f_{n+1}$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A. Τότε*

$$\int_A f_n \to \int_A f.$$

Απόδειξη. Πρώτη περίπτωση. Θεωρούμε την απλούστερη περίπτωση κατά την οποία οι $f_n \le f_{n+1}$ και $f_n \to f$ ισχύουν σε ολόκληρο το A.
Γνωρίζουμε ότι για κάθε n υπάρχουν μη αρνητικές μετρήσιμες απλές συναρτήσεις $\phi_{n,k}$ $(k \in \mathbb{N})$ στο A ώστε να είναι

$$\phi_{n,k} \le \phi_{n,k+1} \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{k \to +\infty} \phi_{n,k} = f_n$$

στο A. Από τον ορισμό του $\int_A f_n$ συνεπάγεται

$$\int_A f_n = \lim_{k\to+\infty} \int_A \phi_{n,k}\,.$$

Τώρα, ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\phi_k = \max\{\phi_{1,k}\,,\,\dots\,,\phi_{k,k}\}.$$

Είναι σαφές ότι οι $\phi_k \quad (k \in \mathbb{N})$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες απλές συναρτήσεις στο A. Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι

$$\phi_k \le \phi_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

στο A. Αυτό είναι απλό:

$$\begin{aligned}\phi_k = \max\{\phi_{1,k}\,,\,\dots\,,\phi_{k,k}\} &\le \max\{\phi_{1,k+1}\,,\,\dots\,,\phi_{k,k+1}\}\\ &\le \max\{\phi_{1,k+1}\,,\,\dots\,,\phi_{k,k+1}\,,\phi_{k+1,k+1}\} = \phi_{k+1}\,.\end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα ισχύει διότι $\phi_{1,k} \le \phi_{1,k+1}\,,\,\dots\,,\phi_{k,k} \le \phi_{k,k+1}$ και η δεύτερη ανισότητα ισχύει διότι υπάρχει μια επιπλέον συνάρτηση στο δεύτερο μέλος της. Κατόπιν, θα αποδείξουμε ότι

$$\phi_k \to f$$

στο A. Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$\phi_k = \max\{\phi_{1,k}\,,\,\dots\,,\phi_{k,k}\} \le \max\{f_1\,,\,\dots\,,f_k\} = f_k \le f$$

στο A. Η πρώτη ανισότητα ισχύει διότι $\phi_{1,k} \le f_1\,,\,\dots\,,\phi_{k,k} \le f_k$ και η δεύτερη ισότητα ισχύει διότι $f_1 \le \cdots \le f_k$. Κατόπιν παρατηρούμε ότι, επειδή ισχύει $\phi_k \le \phi_{k+1}$ για κάθε k, συνεπάγεται ότι το $\lim_{k\to+\infty} \phi_k$ υπάρχει. Συνδυάζοντας με το ότι $\phi_k \le f$ για κάθε k, προκύπτει ότι

$$\lim_{k\to+\infty} \phi_k \le f$$

στο A. Τέλος, παρατηρούμε ότι για κάθε k και n με $n \le k$ ισχύει, προφανώς, $\phi_k \ge \phi_{n,k}$ και, αφήνοντας το k να τείνει στο $+\infty$,

$$\lim_{k\to+\infty} \phi_k \ge \lim_{k\to+\infty} \phi_{n,k} = f_n$$

για κάθε n. Αφήνοντας, τώρα, το n να τείνει στο $+\infty$,

$$\lim_{k\to+\infty} \phi_k \ge \lim_{n\to+\infty} f_n = f$$

στο A. Άρα αποδείχθηκε ότι $\phi_k \to f$ στο A.
Από τις $\phi_k \le \phi_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N})$ και $\phi_k \to f$ στο A, βάσει του ορισμού του $\int_A f$ βρίσκουμε ότι

$$\int_A \phi_k \to \int_A f.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι έχουμε αποδείξει ότι $\phi_k \le f_k \le f$ στο A για κάθε k. Άρα

$$\int_A \phi_k \le \int_A f_k \le \int_A f$$

για κάθε k και, σύμφωνα με την ιδιότητα παρεμβολής, $\int_A f_k \to \int_A f$.
Η γενική περίπτωση. Σύμφωνα με μια γενική αρχή που διατυπώθηκε στην ενότητα 3.2, όλες ταυτόχρονα οι (αριθμήσιμες) ιδιότητες $f_n \leq f_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ και $f_n \to f$ ισχύουν σχεδόν παντού στο A. Δηλαδή, υπάρχει κάποιο $B \subseteq A$ με $m_d(B) = 0$ ώστε όλες οι παραπάνω ιδιότητες να ισχύουν στο $A \setminus B$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της πρώτης περίπτωσης στο $A \setminus B$, βρίσκουμε ότι

$$\int_{A\setminus B} f_n \to \int_{A\setminus B} f.$$

Από τις Προτάσεις 4.3 και 4.6 συνεπάγεται $\int_A f = \int_{A\setminus B} f + \int_B f = \int_{A\setminus B} f$ και, ομοίως, $\int_A f_n = \int_{A\setminus B} f_n$ για κάθε n. Άρα $\int_A f_n \to \int_A f$. □

Λήμμα του Fatou. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μη αρνητικές μετρήσιμες $f_n : A \to [0, +\infty]$ $(n \in \mathbb{N})$. Τότε*

$$\int_A (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n\,.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$g_m = \inf_{n \geq m} f_n$$

για κάθε $m \geq 1$, οπότε $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \lim_{m\to+\infty} g_m$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι ισχύει $0 \leq g_m \leq g_{m+1}$ στο A για κάθε m. Ακόμη, προφανώς, ισχύει $g_m \leq f_m$ στο A και, επομένως, $\int_A g_m \leq \int_A f_m$ για κάθε m. Από αυτό συνεπάγεται ότι $\underline{\lim}_{m\to+\infty} \int_A g_m \leq \underline{\lim}_{m\to+\infty} \int_A f_m$.
Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,

$$\int_A (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) = \lim_{m\to+\infty} \int_A g_m = \underline{\lim}_{m\to+\infty} \int_A g_m \leq \underline{\lim}_{m\to+\infty} \int_A f_m\,.$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει διότι, αν υπάρχει το $\lim_{m\to+\infty}$, τότε υπάρχει και το $\underline{\lim}_{m\to+\infty}$ και είναι ίσο με το $\lim_{n\to+\infty}$. □

Παραδείγματα. (1) Έστω $f_n = \chi_{[n,n+\frac{1}{n}]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Όλες οι f_n είναι μετρήσιμες και ≥ 0 στο $\mathbb{R}$.
Έστω τυχόν $x \in \mathbb{R}$. Αν ο φυσικός n είναι αρκετά μεγάλος (και, συγκεκριμένα, αν $n \geq n_0 = [x] + 1$), τότε $x \notin [n, n + \frac{1}{n}]$, οπότε $f_n(x) = 0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε και τη σταθερή συνάρτηση $f = 0$ στο $\mathbb{R}$, οπότε είναι

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = 0$$

στο $\mathbb{R}$. Από την άλλη μεριά, είναι $\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[n,n+\frac{1}{n}]} = m_1([n, n+\frac{1}{n}]) = \frac{1}{n}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ και, επομένως, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 0$. Επίσης, $\int_{\mathbb{R}} (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$. Επομένως, επιβεβαιώνεται ο κανόνας

$$\int_{\mathbb{R}} (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$$

και, μάλιστα, στην περίπτωση αυτή ισχύει ως ισότητα.
(2) Έστω $f_n = \chi_{[n,n+1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Όλες οι f_n είναι μετρήσιμες και ≥ 0 στο $\mathbb{R}$.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν ο φυσικός n είναι αρκετά μεγάλος, $x \notin [n, n + 1]$, οπότε $f_n(x) = 0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε είναι

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = 0$$

στο $\mathbb{R}$. Τώρα, $\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[n,n+1]} = m_1([n, n+1]) = 1$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$, οπότε $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 1$. Ακόμη, $\int_{\mathbb{R}} (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$. Άρα, και πάλι επιβεβαιώνεται ο κανόνας

$$\int_{\mathbb{R}} (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$$

αλλά στην περίπτωση αυτή ισχύει ως γνήσια ανισότητα.
(3) Έστω $f_{2k-1} = \chi_{[0,1]}$ και $f_{2k} = \chi_{[2,3]}$ (με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$) για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
Αν $x \notin [0,1] \cup [2,3]$, είναι $f_n(x) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ και, επομένως, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Αν $x \in [0,1]$, τότε είναι $f_n(x) = 1$ για κάθε περιττό n και $f_n(x) = 0$ για κάθε άρτιο n. Άρα για κάθε $m \geq 1$ ισχύει $\inf_{n\geq m} f_n(x) = \inf\{0,1\} = 0$, οπότε $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{m\to+\infty} 0 = 0$. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in [2,3]$. Άρα

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = 0$$

στο $\mathbb{R}$. Άρα $\int_{\mathbb{R}} (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$.
Επίσης, είναι $\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]} = m_1([0,1]) = 1$, αν ο n είναι περιττός, και $\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[2,3]} = m_1([2,3]) = 1$, αν ο n είναι άρτιος. Άρα $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ για κάθε n, οπότε $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 1$. Άρα $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 1$, οπότε και πάλι επιβεβαιώνεται ο κανόνας

$$\int_{\mathbb{R}} (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$$

και (πάλι) στην περίπτωση αυτή ισχύει ως γνήσια ανισότητα.

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$, μετρήσιμες $f, f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$ και ολοκληρώσιμη $g : A \to [0, +\infty]$ έτσι ώστε να ισχύει $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A. Τότε*

$$\int_A f_n \to \int_A f.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς βλέπουμε ότι ισχύουν όλες ταυτόχρονα οι (αριθμήσιμες) ιδιότητες $|f_n| \leq g$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A. Επομένως, ισχύει και η $|f| \leq g$ σχεδόν παντού στο A.
Επειδή είναι $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού στο A, συνεπάγεται $\int_A |f_n| \leq \int_A g < +\infty$, οπότε κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη στο A. Ομοίως, και η f είναι ολοκληρώσιμη στο A.
Εύκολα βλέπουμε ότι από την $|f_n| \leq g$ συνεπάγονται οι

$$g + f_n \geq 0, \qquad g - f_n \geq 0$$

σχεδόν παντού στο A. Επίσης, ισχύει

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} (g + f_n) = g + \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = g + f, \qquad \underline{\lim}_{n\to+\infty} (g - f_n) = g - \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = g - f$$

σχεδόν παντού στο A. Από το Λήμμα του Fatou προκύπτει

$$\int_A (g + f) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A (g + f_n), \qquad \int_A (g - f) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A (g - f_n).$$

Άρα, από την Πρόταση 4.4,

$$\int_A g + \int_A f \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \Big(\int_A g + \int_A f_n\Big), \qquad \int_A g - \int_A f \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \Big(\int_A g - \int_A f_n\Big).$$

Επομένως,

$$\int_A g + \int_A f \le \int_A g + \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n\,, \qquad \int_A g - \int_A f \le \int_A g - \overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n\,.$$

Επειδή το $\int_A g$ είναι αριθμός,

$$\int_A f \le \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n\,, \qquad \int_A f \ge \overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n\,.$$

Τέλος, από την στοιχειώδη γενική ανισότητα $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \le \overline{\lim}_{n\to+\infty}$ συνεπάγεται $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n = \int_A f$, οπότε $\int_A f_n \to \int_A f$. □

Θεώρημα 4.1. *Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και $E_n \subseteq A$, $E_n \in \mathcal{L}_d$ $(n \in \mathbb{N})$ ώστε $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n. Επίσης, έστω $E = \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Αν η f είναι μετρήσιμη στο A και ≥ 0 σχεδόν παντού στο A ή αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο A, τότε*

$$\int_{E_n} f \to \int_E f.$$

Απόδειξη. (1) Έστω ότι η $f : A \to [0,+\infty]$ είναι μετρήσιμη στο A. Επειδή $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n και $E = \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$, συνεπάγεται ότι $\chi_{E_n} \le \chi_{E_{n+1}}$ στο A για κάθε n και $\chi_{E_n} \to \chi_E$ στο A. Άρα, προφανώς,

$$0 \le f\chi_{E_n} \le f\chi_{E_{n+1}}\,, \qquad f\chi_{E_n} \to f\chi_E$$

στο A και από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης συνεπάγεται ότι

$$\int_{E_n} f = \int_A (f\chi_{E_n}) \to \int_A (f\chi_E) = \int_E f.$$

(2) Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο A. Όπως στο (1), παρατηρούμε ότι $f\chi_{E_n} \to f\chi_E$ στο A. Επίσης, είναι $|f\chi_{E_n}| \le |f|$ στο A και, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, η απόδειξη τελειώνει όπως και στο (1). □

Παραδείγματα. (1) Έστω $f_n = \sqrt{n}\chi_{(0,\frac{1}{n})} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Κάθε f_n είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\int_{\mathbb{R}} f_n = \sqrt{n}\, m_1((0,\frac{1}{n})) = \sqrt{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Άρα $\int_{\mathbb{R}} f_n \to 0$.
Επίσης, είναι εύκολο να δει κανείς ότι για κάθε x ισχύει $f_n(x) \to 0$. Πράγματι, αν $x \le 0$, τότε είναι $f_n(x) = 0$ για κάθε n και, αν $x > 0$, τότε για αρκετά μεγάλο n ισχύει $x \notin (0,\frac{1}{n})$, οπότε $f_n(x) = 0$. Επομένως, $f_n \to 0$ στο $\mathbb{R}$. Προφανώς, $\int_{\mathbb{R}} 0 = 0$, οπότε

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \to \int_{\mathbb{R}} 0.$$

Αυτό είναι και το συμπέρασμα του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης αλλά για να επιβεβαιωθεί το θεώρημα αυτό, πρέπει να δούμε αν υπάρχει κάποια ολοκληρώσιμη $g : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ με την ιδιότητα:

$$|f_n| \le g$$

σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.
Μια προσεκτική σχεδίαση των γραφημάτων των f_n δείχνει ότι μια τέτοια συνάρτηση g είναι, για παράδειγμα, η

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}\,.$$

Αυτή η g είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$, διότι κάθε $\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}$ είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης, είναι $g \geq 0$ στο $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει το $\int_{\mathbb{R}} g$. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 4.1. Θεωρούμε τα σύνολα $[\frac{1}{n}, 1) \quad (n \in \mathbb{N})$ και παρατηρούμε ότι έχουν τις ιδιότητες: $[\frac{1}{n}, 1) \subseteq [\frac{1}{n+1}, 1)$ για κάθε n και $\cup_{n=1}^{+\infty}[\frac{1}{n}, 1) = (0, 1)$. Άρα, επειδή είναι $g \geq 0$,

$$\int_{[\frac{1}{n},1)} g \to \int_{(0,1)} g.$$

Κατόπιν, βλέπουμε ότι είναι $g = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}\chi_{[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k})}$ στο $[\frac{1}{n}, 1)$, οπότε

$$\int_{[\frac{1}{n},1)} g = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}\, m_1\Big(\Big[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\Big)\Big) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{k(k+1)}.$$

Άρα

$$\int_{(0,1)} g = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{k(k+1)} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} < +\infty.$$

Τέλος, επειδή είναι $g = 0$ στο $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, συνεπάγεται

$$\int_{\mathbb{R}} g = \int_{(-\infty,0]\cup[1,+\infty)} g + \int_{(0,1)} g = 0 + \int_{(0,1)} g < +\infty$$

και, επομένως, η g είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$.

Υπάρχει κι άλλος τρόπος να αποδειχτεί ότι $\int_{(0,1)} g < +\infty$. Μπορούμε να δούμε πολύ εύκολα (παρατηρώντας, για παράδειγμα, το γράφημα της g) ότι

$$g(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

για κάθε $x \in (0, 1)$. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε ως παράδειγμα ότι αν $h : (0, 1) \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, τότε $\int_{(0,1)} h = 2$. Άρα $\int_{(0,1)} g \leq \int_{(0,1)} h = 2$ και, επομένως, $\int_{(0,1)} g < +\infty$.

(2) Έστω $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N})$. Κάθε f_n είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\int_{\mathbb{R}} f_n = n\, m_1((0, \frac{1}{n})) = n\frac{1}{n} = 1$. Άρα $\int_{\mathbb{R}} f_n \to 1$.

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε x ισχύει $f_n(x) \to 0$. Άρα, $f_n \to 0$ στο $\mathbb{R}$. Όμως,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \not\to \int_{\mathbb{R}} 0.$$

Για να δούμε αν αυτό δεν διαφωνεί με το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, πρέπει να αποδείξουμε ότι *δεν* υπάρχει κάποια ολοκληρώσιμη $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ με την ιδιότητα:

$$|f_n| \leq g$$

σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Με άλλα λόγια, πρέπει να αποδείξουμε ότι, αν για οποιαδήποτε μετρήσιμη $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ ισχύει $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε θα ισχύει $\int_{\mathbb{R}} g = +\infty$.

Μια προσεκτική σχεδίαση των γραφημάτων των f_n δείχνει ότι για κάθε g με αυτήν την ιδιότητα (δηλαδή: $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) πρέπει να ισχύει

$$g \geq g_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} n\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}$$

σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.
Αυτό σημαίνει ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι $\int_{\mathbb{R}} g_0 = +\infty$, αφού αυτό συνεπάγεται ότι $\int_{\mathbb{R}} g = +\infty$. Αυτή η g_0 είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$, διότι κάθε $\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}$ είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης, είναι $g_0 \geq 0$ στο $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει το $\int_{\mathbb{R}} g_0$. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το Θεώρημα 4.1. Θεωρούμε τα σύνολα $[\frac{1}{n},1)$ $(n \in \mathbb{N})$ και παρατηρούμε ότι έχουν τις ιδιότητες: $[\frac{1}{n},1) \subseteq [\frac{1}{n+1},1)$ για κάθε n και $\cup_{n=1}^{+\infty}[\frac{1}{n},1) = (0,1)$. Άρα, επειδή είναι $g_0 \geq 0$,

$$\int_{[\frac{1}{n},1)} g_0 \to \int_{(0,1)} g_0 \,.$$

Κατόπιν, βλέπουμε ότι είναι $g_0 = \sum_{k=1}^{n-1} k\chi_{[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k})}$ στο $[\frac{1}{n},1)$, οπότε

$$\int_{[\frac{1}{n},1)} g_0 = \sum_{k=1}^{n-1} k m_1\Big(\Big[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}\Big)\Big) = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}\,.$$

Άρα

$$\int_{(0,1)} g_0 = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k+1} = +\infty.$$

Τέλος, επειδή είναι $g_0 = 0$ στο $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$, συνεπάγεται

$$\int_{\mathbb{R}} g_0 = \int_{(-\infty,0]\cup[1,+\infty)} g_0 + \int_{(0,1)} g_0 = 0 + \int_{(0,1)} g_0 = +\infty.$$

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, υπάρχει κι άλλος τρόπος να αποδειχτεί ότι $\int_{(0,1)} g_0 = +\infty$. Μπορούμε να δούμε πολύ εύκολα ότι

$$g_0(x) \geq \frac{1}{2x}$$

για κάθε $x \in (0,1)$. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε ως παράδειγμα ότι αν $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \frac{1}{x}$, τότε $\int_{(0,1)} h = +\infty$. Άρα $\int_{(0,1)} g_0 \geq \frac{1}{2}\int_{(0,1)} h = +\infty$ και, επομένως, $\int_{(0,1)} g_0 = +\infty$.
(3) Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [1,+\infty)$ με τύπο

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\chi_{[n,n+1)}\,.$$

Η συνάρτηση είναι μετρήσιμη στο $[1,+\infty)$, διότι κάθε $\chi_{[n,n+1)}$ είναι μετρήσιμη στο $[1,+\infty)$. Όμως, η f δεν έχει σταθερό πρόσημο στο $[1,+\infty)$, οπότε δεν είναι βέβαιο ότι υπάρχει το $\int_{[1,+\infty)} f$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$f^+ = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k-1}\chi_{[2k-1,2k)}$$

και

$$f^- = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k}\chi_{[2k,2k+1)}\,.$$

Αν ορίσουμε $g_m = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}\chi_{[2k-1,2k)}$, τότε οι g_m $(m \in \mathbb{N})$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις στο $[1,+\infty)$ με τις ιδιότητες: $g_m \leq g_{m+1}$ στο $[1,+\infty)$ για κάθε m και $g_m \to f^+$ στο

$[1,+\infty)$. Άρα

$$\int_{[1,+\infty)} f^+ = \lim_{m\to+\infty}\int_{[1,+\infty)} g_m = \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1}m_1\big([2k-1,2k)\big)$$
$$= \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k-1} \geq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k} = +\infty.$$

Ορίζοντας τις $h_m = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k}\chi_{[2k,2k+1)}$, με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$\int_{[1,+\infty)} f^- = \lim_{m\to+\infty}\int_{[1,+\infty)} h_m = \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k}m_1\big([2k,2k+1)\big)$$
$$= \lim_{m\to+\infty}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k} = +\infty.$$

Συμπεραίνουμε ότι $\int_{[1,+\infty)} f^+ = \int_{[1,+\infty)} f^- = +\infty$, οπότε το $\int_{[1,+\infty)} f = \int_{[1,+\infty)} f^+ - \int_{[1,+\infty)} f^-$ δεν ορίζεται.
Θα παρατηρήσουμε κάτι ακόμη. Η f είναι ίση με την $\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\chi_{[n,n+1)}$ στο $[1,m)$. Άρα

$$\int_{[1,m)} f = \sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}m_1\big([n,n+1)\big) = \sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Είναι γνωστό ότι το όριο

$$\lim_{m\to+\infty}\int_{[1,m)} f = \lim_{m\to+\infty}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Παρατηρήστε, επίσης, ότι τα σύνολα $[1,m)$ έχουν τις ιδιότητες: $[1,m)\subseteq[1,m+1)$ για κάθε m και $\cup_{m=1}^{+\infty}[1,m) = [1,+\infty)$. Όμως, δεν ισχύει $\int_{[1,m)} f \to \int_{[1,+\infty)} f$. Αυτό δεν αντιφάσκει με το Θεώρημα 4.1, διότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[1,+\infty)$.

Ασκήσεις.

1. Έστω $A\in\mathcal{L}_d$ και μετρήσιμη $f : A\to[0,+\infty]$.
   (1) **Ανισότητα του Chebyshev.** Αποδείξτε ότι για κάθε $\lambda>0$ ισχύει
   $$m_d\big(\{x\in A : f(x)\geq\lambda\}\big) \leq \frac{1}{\lambda}\int_A f.$$
   Υπόδειξη: Αν $B=\{x\in A : f(x)\geq\lambda\}$, τότε $\lambda\chi_B\leq f$ στο A.
   (2) Αν $\int_A f<+\infty$, αποδείξτε ότι $\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda m_d\big(\{x\in A : f(x)\geq\lambda\}\big)=0$.

2. **Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης**. Έστω $A\in\mathcal{L}_d$ με $m_d(A)<+\infty$, αριθμός $M\geq0$ και μετρήσιμες f, f_n $(n\in\mathbb{N})$ στο A ώστε να ισχύει $|f_n|\leq M$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n και $f_n\to f$ σχεδόν παντού στο A. Αποδείξτε ότι $\int_A f_n\to\int_A f$.
   Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης με κατάλληλη g.

3. Έστω $A\in\mathcal{L}_d$ και μετρήσιμες f, f_n $(n\in\mathbb{N})$ στο A ώστε να ισχύει $0\leq f_n\leq f$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n και $f_n\to f$ σχεδόν παντού στο A. Αποδείξτε ότι $\int_A f_n\to\int_A f$.
   Υπόδειξη: Από την $f_n\leq f$ συνεπάγεται $\overline{\lim}_{n\to+\infty}\int_A f_n\leq\int_A f$ και χρησιμοποιήστε και το λήμμα του Fatou.

4. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$, μετρήσιμες $f_n \quad (n \in \mathbb{N})$ στο A και ολοκληρώσιμη h στο A ώστε να ισχύει $h \leq f_n$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n. Αποδείξτε ότι $\int_A (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n$.
Υπόδειξη: Θεωρήστε τις $f_n - h$.

5. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$, μετρήσιμες $f_n \quad (n \in \mathbb{N})$ στο A και ολοκληρώσιμη g στο A ώστε να ισχύει $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n. Αποδείξτε ότι $\int_A (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n$ και $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n \leq \int_A (\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n)$.
Υπόδειξη: Δείτε την απόδειξη του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

6. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ με $m_d(A) < +\infty$ και μετρήσιμες $f, f_n \quad (n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε να ισχύει $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A. Αποδείξτε ότι $\int_A |f_n - f| \to 0$.
Υπόδειξη: Αν $M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\}$, τότε $M_n \to 0$.

7. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμη f στο A ώστε $f \geq 0$ σχεδόν παντού στο A. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $f_n = \min\{f, n\} \quad (n \in \mathbb{N})$ και αποδείξτε ότι $\int_A f_n \to \int_A f$.
Υπόδειξη: Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης.

8. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και ολοκληρώσιμη f στο A. Θεωρήστε τις $f_n = \max\big\{ \min\{f, n\}, -n\big\} \ (n \in \mathbb{N})$ και αποδείξτε ότι $\int_A f_n \to \int_A f$.
Υπόδειξη: Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

9. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμες $f, f_n \quad (n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε $f_n \geq 0$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n, $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A, $\int_A f_n \to \int_A f$ και $\int_A f < +\infty$. Αποδείξτε ότι για κάθε $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{L}_d$, ισχύει $\int_B f_n \to \int_B f$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Λήμμα του Fatou στα B, $A \setminus B$ και αποδείξτε ότι $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_B f_n \leq \int_B f \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_B f_n$.

10. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$, μετρήσιμες $f, f_n \quad (n \in \mathbb{N})$ στο A και ολοκληρώσιμες $g, g_n \quad (n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε $|f_n| \leq g_n$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n, $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A, $g_n \to g$ σχεδόν παντού στο A και $\int_A g_n \to \int_A g$. Αποδείξτε ότι $\int_A f_n \to \int_A f$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Λήμμα του Fatou στις $g_n + f_n$ και $g_n - f_n$.

11. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και ολοκληρώσιμες $f, f_n \quad (n \in \mathbb{N})$. Αποδείξτε ότι, αν $\int_A |f_n - f| \to 0$, τότε $\int_A |f_n| \to \int_A |f|$.
Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\big| \int_A |f_n| - \int_A |f| \big| \leq \int_A |f_n - f|$.

12. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και ολοκληρώσιμες $f, f_n \quad (n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A. Αν $\int_A |f_n| \to \int_A |f|$, τότε αποδείξτε ότι $\int_A |f_n - f| \to 0$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε την προπροηγούμενη άσκηση στις $F_n = |f_n - f|$, $G_n = |f_n| + |f|$, $F = 0$ και $G = 2|f|$.

13. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και $E_n \subseteq A$, $E_n \in \mathcal{L}_d \quad (n \in \mathbb{N})$ ώστε τα E_n να είναι ξένα ανά δύο. Επίσης, έστω $E = \cup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Αν η f είναι μετρήσιμη στο A και ≥ 0 σχεδόν παντού στο A ή αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο A, αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} f = \int_E f.$$

Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα 4.1 στα $F_n = E_1 \cup \cdots \cup E_n$.

14. **Θεώρημα του B. Levi.** Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμες $f_n \ \ (n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε $f_n \geq 0$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n. Αποδείξτε ότι

$$\int_A \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A f_n \,.$$

Υπόδειξη: Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης.

15. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμες $f_n \ \ (n \in \mathbb{N})$ στο A τέτοιες ώστε να είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_A |f_n| < +\infty$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο A. Αν η s είναι μετρήσιμη στο A και ισχύει $s = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ σχεδόν παντού στο A, αποδείξτε ότι

$$\int_A s = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A f_n \,.$$

Υπόδειξη: Από την προηγούμενη άσκηση συνεπάγεται ότι η $S = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$ είναι ολοκληρώσιμη στο A και, επομένως, $S = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| < +\infty$ σχεδόν παντού στο A. Κατόπιν, εφαρμόστε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης στις $s_n = f_1 + \cdots + f_n$, στην s και στην S.

16. Αν $p > -1$, αποδείξτε ότι

$$\int_{(0,n)} \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n x^p \, dx \to \int_{(0,+\infty)} e^{-x} x^p \, dx.$$

17. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1)$, αποδείξτε ότι

$$\lim \int_{(0,1)} x^n f(x) \, dx \to 0.$$

Υπόδειξη: Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.

18. Έστω $f_{2k} = \chi_{[0,1]}$ και $f_{2k-1} = \chi_{[2,3]}$ στο $\mathbb{R} \ \ (k \in \mathbb{N})$. Αποδείξτε ότι για την (f_n) ισχύουν όλες οι υποθέσεις του Λήμματος του Fatou και ότι $\int_{\mathbb{R}} (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) < \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f$.

19. Έστω $E_n \in \mathcal{L}_d$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για οποιονδήποτε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$G = \{x : x \in E_n \text{ για τουλάχιστον } k \text{ διαφορετικές τιμές του } n\}.$$

Αποδείξτε ότι $G \in \mathcal{L}_d$ και ότι

$$m_d(G) \leq \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{+\infty} m_d(E_n).$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε την $\sum_{n=1}^{+\infty} \chi_{E_n}$.

20. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ με $m_d(A) < +\infty$ και μετρήσιμη f στο A. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο A αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{+\infty} m_d\big(\{x \in A : |f(x)| \geq n\}\big) < +\infty.$$

21. Έστω $A \in \mathcal{L}_d$ και μετρήσιμη f στο A ώστε να είναι $f \geq 0$ σχεδόν παντού στο A. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε
$$s_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^n} m_d\Big(\Big\{x \in A : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\Big\}\Big).$$
(1) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο A, αποδείξτε ότι $0 \leq s_n < +\infty$ για κάθε n και
$$s_n \to \int_A f.$$
Υπόδειξη: Έστω $B_n = \{x \in A : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\}$. Θεωρήστε τις $f_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{2^n} \chi_{B_n}$ και αποδείξτε ότι $f_n \leq f_{n+1}$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A.
(2) Έστω, επιπλέον, ότι $m_d(A) < +\infty$ και $f < +\infty$ σχεδόν παντού στο A. Τότε, αντιστρόφως, αν $0 \leq s_n < +\infty$ για έναν τουλάχιστον n, αποδείξτε ότι αυτό ισχύει για κάθε n και ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο A.

4.6 Σχέση ολοκληρωμάτων Lebesgue και Riemann.

Θεώρημα 4.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η f είναι και Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*
$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)\,dx,$$
όπου με $\int_{[a,b]} f$ συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ενώ με $\int_a^b f(x)\,dx$ συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα Riemann.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, οπότε μπορούμε να θέσουμε
$$M = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\} < +\infty, \qquad m = \inf\{f(x) : a \leq x \leq b\} > -\infty.$$
Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας λέει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχη διαμέριση $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ του $[a,b]$ ώστε να είναι
$$\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) < \epsilon,$$
όπου $M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ και $m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$. Επίσης, ισχύει
$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$
Είναι φανερό ότι ισχύει
$$m \leq m_k \qquad \text{και} \qquad M_k \leq M$$
για κάθε k.
Τώρα, ορίζουμε τις συναρτήσεις
$$\psi = m_1\chi_{[x_0,x_1)} + \cdots + m_{n-1}\chi_{[x_{n-2},x_{n-1})} + m_n\chi_{[x_{n-1},x_n]},$$

$$\phi = M_1\chi_{[x_0,x_1)} + \cdots + M_{n-1}\chi_{[x_{n-2},x_{n-1})} + M_n\chi_{[x_{n-1},x_n]}\,.$$

Οι τιμές της ψ είναι οι $m_1,\ldots,m_n$ και οι τιμές της ϕ είναι οι $M_1,\ldots,M_n$, οπότε οι συναρτήσεις αυτές είναι απλές. Επίσης, είναι Lebesgue μετρήσιμες αφού κάθε διάστημα είναι Lebesgue μετρήσιμο και, επομένως, η αντίστοιχη χαρακτηριστική συνάρτηση είναι Lebesgue μετρήσιμη. Επειδή όλες οι τιμές της ψ είναι $\geq m$, ισχύει $m \leq \psi$ στο $[a,b]$. Ομοίως, επειδή όλες οι τιμές της ϕ είναι $\leq M$, ισχύει $\phi \leq M$ στο $[a,b]$. Ακόμη, επειδή σε κάθε $[x_{k-1},x_k]$ ισχύει $m_k \leq f(x) \leq M_k$, συνεπάγεται ότι είναι $\psi \leq f \leq \phi$ στο $[a,b]$. Συνοψίζουμε:

$$m \leq \psi \leq f \leq \phi \leq M$$

στο $[a,b]$. Παρατηρούμε ότι $\int_{[a,b]}\psi = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})$ και $\int_{[a,b]}\phi = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$, οπότε οι αρχικές ανισότητες γράφονται

$$\int_{[a,b]}\phi - \int_{[a,b]}\psi < \epsilon$$

και

$$\int_{[a,b]}\psi \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_{[a,b]}\phi.$$

Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα με $\epsilon = \frac{1}{n}$, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν Lebesgue μετρήσιμες απλές συναρτήσεις ψ_n και ϕ_n στο $[a,b]$ με τις ιδιότητες

$$m \leq \psi_n \leq f \leq \phi_n \leq M$$

στο $[a,b]$,

$$\int_{[a,b]}\phi_n - \int_{[a,b]}\psi_n < \frac{1}{n}$$

και

$$\int_{[a,b]}\psi_n \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_{[a,b]}\phi_n\,.$$

Από τις δυο τελευταίες ιδιότητες είναι φανερό ότι προκύπτει

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]}\psi_n = \lim_{n\to+\infty}\int_{[a,b]}\phi_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Τέλος, ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$g = \overline{\lim_{n\to+\infty}}\,\psi_n\,, \qquad h = \underline{\lim_{n\to+\infty}}\,\phi_n\,,$$

οι οποίες είναι Lebesgue μετρήσιμες και ισχύει

$$g \leq f \leq h$$

στο $[a,b]$.

Τώρα, εφαρμόζουμε το Λήμμα του Fatou στις $\phi_n - m \geq 0$ και βρίσκουμε

$$\int_{[a,b]}\underline{\lim_{n\to+\infty}}\,(\phi_n - m) \leq \underline{\lim_{n\to+\infty}}\int_{[a,b]}(\phi_n - m).$$

Το πρώτο μέλος είναι ίσο με $\int_{[a,b]}(h-m) = \int_{[a,b]} h - m(b-a)$. Το δεύτερο μέλος είναι ίσο με $\underline{\lim}_{n\to+\infty}\big(\int_{[a,b]}\phi_n - m(b-a)\big) = \int_a^b f(x)\,dx - m(b-a)$. Άρα η ανισότητα γίνεται

$$\int_{[a,b]} h \leq \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ομοίως, εφαρμόζουμε το Λήμμα του Fatou στις $M-\psi_n \geq 0$ και βρίσκουμε

$$\int_{[a,b]} \underline{\lim}_{n\to+\infty}(M-\psi_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty}\int_{[a,b]}(M-\psi_n).$$

Το πρώτο μέλος είναι ίσο με $\int_{[a,b]}(M-g) = M(b-a) - \int_{[a,b]} g$. Το δεύτερο μέλος είναι ίσο με $\underline{\lim}_{n\to+\infty}\big(M(b-a) - \int_{[a,b]}\psi_n\big) = M(b-a) - \int_a^b f(x)\,dx$. Άρα η ανισότητα γίνεται

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_{[a,b]} g.$$

Από τις δυο τελευταίες παραγράφους συμπεραίνουμε ότι $\int_{[a,b]} h \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_{[a,b]} g$. Επειδή είναι $g \leq h$ στο $[a,b]$ συνεπάγεται ότι $\int_{[a,b]} g \leq \int_{[a,b]} h$ και, επομένως,

$$\int_{[a,b]} g = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} h.$$

Ειδικώτερα, ισχύει $\int_{[a,b]}(h-g) = 0$. Θεωρούμε τυχόντα $k\in\mathbb{N}$ και το σύνολο $E_k = \{x\in[a,b] : (h-g)(x) \geq \frac{1}{k}\}$. Τότε είναι $h-g \geq \frac{1}{k}\chi_{E_k}$ στο $[a,b]$, οπότε $0 = \int_{[a,b]}(h-g) \geq \frac{1}{k}\int_{[a,b]}\chi_{E_k} = \frac{1}{k}m_1(E_k)$. Άρα είναι $m_1(E_k) = 0$ για κάθε $k \geq 1$. Αν θέσουμε $E = \{x\in[a,b] : (h-g)(x) > 0\}$, τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι ισχύει $E = \cup_{k=1}^{+\infty} E_k$. Άρα $m_1(E) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} m_1(E_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$. Δηλαδή, $m_1(E) = 0$ και, επομένως, ισχύει $h-g=0$ σχεδόν παντού στο $[a,b]$. Άρα

$$g = f = h \qquad \text{σχεδόν παντού στο } [a,b].$$

Η g (και η h) είναι Lebesgue μετρήσιμη στο $[a,b]$, οπότε, βάσει της Πρότασης 3.12, και η f είναι Lebesgue μετρήσιμη στο $[a,b]$. Για τον ίδιο λόγο, βάσει της Πρότασης 4.7, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$. Άρα

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

Παραδείγματα. (1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} : [0,1]\to\mathbb{R}$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **συνάρτηση Dirichlet.** Ο τύπος της είναι, φυσικά,

$$\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0\leq x\leq 1 \text{ και } x \text{ είναι ρητός} \\ 0, & \text{αν } 0\leq x\leq 1 \text{ και } x \text{ είναι άρρητος} \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι το $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ είναι αριθμήσιμο, οπότε $m_1^*(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = 0$ και, επομένως, το $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ είναι Lebesgue μετρήσιμο στο $\mathbb{R}$. Άρα η $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη στο $[0,1]$.
Επειδή είναι $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \geq 0$ στο $[0,1]$, υπάρχει το $\int_{[0,1]}\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ και, μάλιστα,

$$\int_{[0,1]}\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = m_1(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = 0.$$

Άρα η συνάρτηση είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.
Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η ίδια συνάρτηση είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχη διαμέριση $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ του $[0,1]$ ώστε να είναι

$$\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) < \epsilon,$$

όπου $M_k = \sup\{\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ και $m_k = \inf\{\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$. Παρατηρούμε ότι, λόγω της πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ αλλά και του $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$, σε κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχουν τουλάχιστον ένας ρητός και τουλάχιστον ένας άρρητος. Συνεπάγεται ότι $\{\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = \{0,1\}$ και, επομένως, $M_k = 1$ και $m_k = 0$ για κάθε k. Άρα $\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = 1 - 0 = 1$ και $\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0(x_k - x_{k-1}) = 0$. Άρα

$$1 - 0 < \epsilon$$

κάτι το οποίο είναι αδύνατο για οποιονδήποτε $\epsilon \leq 1$. Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε η $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.
Επομένως, δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.2.
(2) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$. Η f είναι συνεχής στο $[1,+\infty)$, οπότε είναι Lebesgue μετρήσιμη στο $[1,+\infty)$. Η συνάρτηση είναι ≥ 0 στο $[1,+\infty)$, οπότε υπάρχει το $\int_{[1,+\infty)} f$. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 4.2 για να αναχθούμε στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων Riemann. Για να γίνει, όμως, αυτό πρέπει πρώτα να αναχθούμε σε φραγμένα κλειστά διαστήματα (στα οποία η συνάρτηση είναι συνεχής) αντί του $[1,+\infty)$. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος 4.1.
Πιο συγκεκριμένα: θεωρούμε τα σύνολα $[1,n]$ $(n \in \mathbb{N})$, τα οποία είναι Lebesgue μετρήσιμα και έχουν τις ιδιότητες: $[1,n] \subseteq [1,n+1]$ για κάθε n και $\cup_{n=1}^{+\infty}[1,n] = [1,+\infty)$. Επειδή η f είναι Lebesgue μετρήσιμη και ≥ 0 στο $[1,+\infty)$, συνεπάγεται ότι

$$\int_{[1,+\infty)} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[1,n]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \log n = +\infty.$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει λόγω του Θεωρήματος 4.1 και η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω του Θεωρήματος 4.2.
Η συνάρτηση έχει Lebesgue ολοκλήρωμα στο $[1,+\infty)$ αλλά δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[1,+\infty)$.
(3) Ακριβώς τα ίδια μπορούμε να πούμε και για τις συναρτήσεις $g, h : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{1}{x^2}$ και με τύπο $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Θα περιοριστούμε στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων Lebesgue:

$$\int_{[1,+\infty)} g = \lim_{n\to+\infty} \int_{[1,n]} g = \lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) = 1,$$

$$\int_{[1,+\infty)} h = \lim_{n\to+\infty} \int_{[1,n]} h = \lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{n\to+\infty} (2\sqrt{n} - 2) = +\infty.$$

Και οι δυο συναρτήσεις έχουν Lebesgue ολοκλήρωμα στο $[1,+\infty)$, όμως η g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[1,+\infty)$ ενώ η h δεν είναι.
(4) Τώρα, θεωρούμε την $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$. Η f είναι συνεχής στο $(0,1]$, οπότε είναι Lebesgue μετρήσιμη στο $(0,1]$. Η συνάρτηση είναι ≥ 0 στο $(0,1]$, οπότε υπάρχει το $\int_{(0,1]} f$. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue θεωρούμε τα σύνολα $[\frac{1}{n}, 1]$ $(n \in \mathbb{N})$, τα οποία είναι

Lebesgue μετρήσιμα και έχουν τις ιδιότητες: $[\frac{1}{n},1] \subseteq [\frac{1}{n+1},1]$ για κάθε n και $\cup_{n=1}^{+\infty}[\frac{1}{n},1] = (0,1]$. Επειδή η f είναι Lebesgue μετρήσιμη και ≥ 0 στο $(0,1]$, συνεπάγεται ότι

$$\int_{(0,1]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[\frac{1}{n},1]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \log n = +\infty.$$

Η συνάρτηση έχει Lebesgue ολοκλήρωμα στο $[1,+\infty)$ αλλά δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[1,+\infty)$.
(5) Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και για τις $g,h:(0,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\frac{1}{x^2}$ και $h(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$. Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων Lebesgue γίνεται ως εξής:

$$\int_{(0,1]} g = \lim_{n\to+\infty} \int_{[\frac{1}{n},1]} g = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty} (n-1) = +\infty,$$

$$\int_{(0,1]} h = \lim_{n\to+\infty} \int_{[\frac{1}{n},1]} h = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{n\to+\infty} \Big(2-\frac{2}{\sqrt{n}}\Big) = 2.$$

Η συναρτήσεις έχουν Lebesgue ολοκλήρωμα στο $[1,+\infty)$, αλλά η g δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[1,+\infty)$ ενώ η h είναι.
(6) Έστω η $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } -1\leq x\leq 1 \text{ και } x\neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0)$ και $(0,1]$ και σταθερή στο $\{0\}$, οπότε είναι Lebesgue μετρήσιμη σε καθένα από αυτά τα τρία σύνολα. Άρα η f είναι Lebesgue μετρήσιμη στην ένωσή τους, το $[-1,1]$. Η f δεν έχει σταθερό πρόσημο στο $[-1,1]$, οπότε δεν είναι προφανές ότι υπάρχει το $\int_{[-1,1]} f$.
Η $f^+:[-1,1]\to[0,+\infty]$ είναι ≥ 0 στο $[-1,1]$, οπότε έχει ολοκλήρωμα Lebesgue στο $[-1,1]$. Η f^+ έχει τύπο

$$f^+(x)=\begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{αν } 0< x\leq 1 \\ 0, & \text{αν } -1\leq x\leq 0 \end{cases}$$

Άρα $\int_{[-1,1]} f^+ = \int_{[-1,0]} 0 + \int_{(0,1]} f^+ = 0 + \int_{(0,1]} f^+$ και, όπως σε ένα από τα προηγούμενα παραδείγματα,

$$\int_{[-1,1]} f^+ = \int_{(0,1]} f^+ = \lim_{n\to+\infty} \int_{[\frac{1}{n},1]} f^+ = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x}\,dx = +\infty.$$

Ομοίως, η $f^-:[-1,1]\to[0,+\infty]$ είναι ≥ 0 στο $[-1,1]$, οπότε έχει ολοκλήρωμα Lebesgue στο $[-1,1]$. Η f^- έχει τύπο

$$f^-(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{αν } -1\leq x< 0 \\ 0, & \text{αν } 0\leq x\leq 1 \end{cases}$$

Άρα $\int_{[-1,1]} f^- = \int_{[-1,0)} f^- + \int_{[0,1]} 0 = \int_{[-1,0)} f^-$ και

$$\int_{[-1,1]} f^- = \int_{[-1,0)} f^- = \lim_{n\to+\infty} \int_{[-1,-\frac{1}{n}]} f^- = \lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{-\frac{1}{n}} \Big(-\frac{1}{x}\Big)\,dx = +\infty.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι $\int_{[-1,1]} f^+ = \int_{[-1,1]} f^- = +\infty$, οπότε το $\int_{[-1,1]} f = \int_{[-1,1]} f^+ - \int_{[-1,1]} f^-$ *δεν υπάρχει*.
(7) Έστω η $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}\,, & \text{αν } -1 \le x \le 1 \text{ και } x \neq 0 \\ +\infty, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0)$ και $(0,1]$ και σταθερή στο $\{0\}$, οπότε είναι Lebesgue μετρήσιμη σε καθένα από αυτά τα τρία σύνολα. Άρα η f είναι Lebesgue μετρήσιμη στο $[-1,1]$. Επειδή είναι $f \ge 0$ στο $[-1,1]$, υπάρχει το $\int_{[-1,1]} f$.
Με τις μεθόδους των προηγούμενων παραδειγμάτων, υπολογίζουμε $\int_{[-1,0)} f = +\infty$ και $\int_{(0,1]} f = +\infty$. Επίσης, είναι $\int_{\{0\}}(+\infty) = 0$, διότι $m_1(\{0\}) = 0$. Άρα, και πάλι επειδή είναι $f \ge 0$ στο $[-1,1]$,

$$\int_{[-1,1]} f = \int_{[-1,0)} f + \int_{\{0\}} f + \int_{(0,1]} f = (+\infty) + 0 + (+\infty) = +\infty.$$

Άρα η f δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[-1,1]$.

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_A f$ (αν υπάρχει) στις παρακάτω περιπτώσεις.

$$f(x) = x^2 \quad A = [0,1], \qquad f(x) = \frac{1}{x} \quad A = (0,1], \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad A = (0,1],$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad A = [1,+\infty), \qquad f(x) = \frac{1}{x^2} \quad A = [1,+\infty), \qquad f(x) = \frac{1}{x^3} \quad A = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

2. Είναι οι παρακάτω συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο $[\pi, +\infty)$;

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}\,, \qquad f(x) = \frac{\sin x}{x}\,.$$

Υπόδειξη: Είναι $|\frac{\sin x}{x^2}| \le \frac{1}{x^2}$ και $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\frac{\sin x}{x}|\, dx \ge \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx = \frac{2}{(n+1)\pi}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Ορίζονται τα αντίστοιχα $\int_{[\pi,+\infty)} f$;

3. (1) Για ποιες τιμές του α είναι ολοκληρώσιμη η συνάρτηση $x^{-\alpha}$ στο $(0,1]$; στο $[1,+\infty)$; στο $(0,+\infty)$;
(2) Αποδείξτε ότι η $f(x) = \frac{d}{dx}\big(x^2 \sin \frac{1}{x^2}\big)$ δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1)$.
(3) Αν $x > 0$, αποδείξτε ότι η $f(t) = t^{x-1}e^{-t}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,+\infty)$.

4. Έστω $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$. Τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[0,+\infty)} f_n \neq \int_{[0,+\infty)} (\sum_{n=1}^{+\infty} f_n)$.

5. Αποδείξτε ότι

$$\int_{(0,1)} \log \frac{1}{1-x}\, dx = \int_{(0,1)} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \Big)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{(0,1)} x^n\, dx = 1.$$

6. Αν $p > 0$, αποδείξτε ότι

$$\int_{(0,1)} \frac{x^{p-1}}{1-x} \log \frac{1}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+p)^2}\,.$$

Υπόδειξη: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.

7. Έστω $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ και αριθμοί $a_n \quad (n \in \mathbb{N})$ ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{|x-r_n|}}$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.