Μιχάλης Παπαδημητράκης

Πραγματική Ανάλυση

Μέτρο και ολοκλήρωμα Lebesgue στο $\mathbb{R}$

Τμήμα Μαθηματικών

Πανεπιστήμιο Κρήτης

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Το μέτρο Lebesgue.

1.1 Μήκη διαστημάτων.

Ορισμός. Το μήκος ενός διαστήματος $I = [a, b]$ είναι ο αριθμός

$$l(I) = b - a.$$

Το ίδιο μήκος έχουν και τα διαστήματα $[a, b)$, $(a, b]$ και (a, b).

Το πρώτο αποτέλεσμα που είναι αρκετά απλό για να καταχωρηθεί ως λήμμα ή πρόταση είναι το εξής. Αν I, I' είναι δυο διαστήματα και $I \subseteq I'$, τότε $l(I) \leq l(I')$.

Δυο διαστήματα I, J θα τα χαρακτηρίζουμε **σχεδόν ξένα** αν δεν έχουν κανένα κοινό εσωτερικό τους σημείο ή, με άλλα λόγια, αν τα μόνα πιθανά κοινά τους σημεία είναι τα άκρα τους. Φυσικά, αν τα I, J είναι ξένα, τότε είναι και σχεδόν ξένα.

Λήμμα 1.1. *Έστω $I = [a, b]$ ένα κλειστό διάστημα. Θεωρούμε διαιρετικά σημεία $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ τα οποία χωρίζουν το $I = [a, b]$ στα n κλειστά υποδιαστήματα $I_1 = [x_0, x_1], \ldots, I_n = [x_{n-1}, x_n]$. Προφανώς, τα διαστήματα αυτά είναι σχεδόν ξένα ανά δύο και η ένωσή τους ισούται με το I. Επίσης,*

$$l(I) = l(I_1) + \cdots + l(I_n).$$

Απόδειξη. $l(I_1) + \cdots + l(I_n) = (x_1 - x_0) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a = l(I)$. □

Λήμμα 1.2. *Έστω κλειστά διαστήματα I και $I_1, \ldots, I_n$ έτσι ώστε $I \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n$. Τότε*

$$l(I) \leq l(I_1) + \cdots + l(I_n).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα κλειστά διαστήματα $J_1 = I_1 \cap I, \ldots, J_n = I_n \cap I$, οπότε $I = J_1 \cup \cdots \cup J_n$.

Θεωρούμε όλα τα άκρα των διαστημάτων $J_1, \ldots, J_n$. Αυτά τα σημεία χωρίζουν το I αλλά και καθένα από τα $J_1, \ldots, J_n$ σε μικρότερα κλειστά υποδιαστήματα. Επειδή τα $J_1, \ldots, J_n$ μπορεί να μην είναι σχεδόν ξένα ανά δύο, μερικά από τα υποδιαστήματα μπορεί να περιέχονται σε *περισσότερα από ένα* από τα $J_1, \ldots, J_n$. Τώρα εφαρμόζουμε το Λήμμα 1.1. Αν θεωρήσουμε το μήκος κάθε υποδιαστήματος ακριβώς μια φορά, τότε το άθροισμα των μηκών αυτών είναι ίσο με $l(I)$ ενώ, αν θεωρήσουμε το μήκος κάθε υποδιαστήματος τόσες φορές όσο είναι το πλήθος των $J_1, \ldots, J_n$ στα οποία αυτό περιέχεται, τότε το άθροισμά τους είναι ίσο με $l(J_1) + \cdots + l(J_n)$. Άρα

$$l(I) \leq l(J_1) + \cdots + l(J_n).$$

Επειδή $J_k \subseteq I_k$ και, επομένως, $l(J_k) \leq l(I_k)$ για κάθε k, συνεπάγεται $l(I) \leq l(I_1) + \cdots + l(I_n)$. □

Θεώρημα 1.1. *Έστω διαστήματα I και $I_1, I_2, \ldots$ έτσι ώστε $I \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \cdots$. Τότε*

$$l(I) \leq l(I_1) + l(I_2) + \cdots .$$

Απόδειξη. Αν $l(I_1) + l(I_2) + \cdots = +\infty$, τότε το αποτέλεσμα είναι προφανές. Επομένως, ας υποθέσουμε ότι $l(I_1) + l(I_2) + \cdots < +\infty$.
Θεωρούμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$. Υπάρχει *κλειστό* διάστημα $I' \subseteq I$ ώστε

$$l(I) - \epsilon < l(I')$$

και, για κάθε n, υπάρχει *ανοικτό* διάστημα $I_n'' \supseteq I_n$ ώστε

$$l(I_n'') < l(I_n) + \tfrac{\epsilon}{2^n} .$$

Από τις σχέσεις $I' \subseteq I$, $I \subseteq I_1 \cup I_2 \cup \cdots$ και $I_n \subseteq I_n''$ για κάθε n, συνεπάγεται

$$I' \subseteq I_1'' \cup I_2'' \cup \cdots .$$

Επειδή το I' είναι κλειστό διάστημα και, επειδή τα I_n'' $(n \in \mathbb{N})$ είναι ανοικτά και καλύπτουν το I', συνεπάγεται ότι υπάρχει κάποιος n ώστε

$$I' \subseteq I_1'' \cup \cdots \cup I_n'' .$$

(Αφού τελειώσει η απόδειξη δείτε το σχόλιο παρακάτω.)
Προσωρινά, θεωρούμε τα αντίστοιχα των $I_1'', \ldots, I_n''$ κλειστά διαστήματα $\overline{I_1''}, \ldots, \overline{I_n''}$. Από το Λήμμα 2.2 εφαρμοσμένο στα κλειστά διαστήματα I' και $\overline{I_1''}, \ldots, \overline{I_n''}$, για τα οποία, προφανώς, ισχύει $I' \subseteq \overline{I_1''} \cup \cdots \cup \overline{I_n''}$, συνεπάγεται

$$l(I') \leq l(\overline{I_1''}) + \cdots + l(\overline{I_n''}) = l(I_1'') + \cdots + l(I_n'').$$

Τώρα, έχουμε

$$l(I) - \epsilon < \big(l(I_1) + \tfrac{\epsilon}{2}\big) + \cdots + \big(l(I_n) + \tfrac{\epsilon}{2^n}\big) < l(I_1) + l(I_2) + \cdots + \epsilon.$$

Θεωρώντας ότι $\epsilon \to 0+$, καταλήγουμε στην $l(I) \leq l(I_1) + l(I_2) + \cdots$. □

Σχόλιο. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.1 χρησιμοποιήθηκε μια τοπολογική ιδιότητα του $\mathbb{R}$, δηλαδή το ότι *κάθε κλειστό και φραγμένο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι συμπαγές*. Σύμφωνα με τον ορισμό της έννοιας της συμπάγειας, αυτό σημαίνει ότι, αν θεωρήσουμε μια οποιαδήποτε οικογένεια ανοικτών συνόλων τα οποία καλύπτουν το E, τότε υπάρχουν πεπερασμένα από αυτά τα ανοικτά σύνολα τα οποία, επίσης, καλύπτουν το E.
Εμείς αυτήν την τοπολογική ιδιότητα τη χρησιμοποιήσαμε σε μια πολύ ειδική κατάσταση, όπου το κλειστό και φραγμένο σύνολο είναι ένα κλειστό διάστημα και τα ανοικτά σύνολα που το καλύπτουν είναι ανοικτά διαστήματα. Επειδή μπορεί να μην αισθανόμαστε άνετα με την έννοια της συμπάγειας, θα κάνουμε μια παράκαμψη για να δούμε μια απόδειξη για την ειδική περίπτωση.

Πρόταση 1.1. *Έστω κλειστό διάστημα I και μια οικογένεια ανοικτών διαστημάτων, τα οποία καλύπτουν το I, δηλαδή των οποίων η ένωση περιέχει ως υποσύνολο το I. Τότε υπάρχουν πεπερασμένα από τα ανοικτά διαστήματα της ίδιας οικογένειας τα οποία, επίσης, καλύπτουν το I.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι *δεν υπάρχουν πεπερασμένα από τα διαστήματα της οικογένειας τα οποία καλύπτουν το I.*
Θεωρώντας το μέσο του I, χωρίζουμε το I σε δύο σχεδόν ξένα κλειστά υποδιαστήματα. Το μήκος καθενός από αυτά τα υποδιαστήματα είναι το μισό του μήκους του I. Αν καθένα από αυτά τα υποδιαστήματα μπορούσε να καλυφτεί από πεπερασμένα από τα διαστήματα της οικογένειας, τότε και

το I θα μπορούσε να καλυφτεί από πεπερασμένα από τα διαστήματα της οικογένειας. Επομένως, υπάρχει κάποιο από τα υποδιαστήματα, ας το συμβολίσουμε I_1 , το οποίο δε μπορεί να καλυφτεί από πεπερασμένα από τα διαστήματα της οικογένειας.
Επαναλαμβάνουμε την ίδια σκέψη με το I_1 . Το χωρίζουμε σε δύο σχεδόν ξένα κλειστά υποδιαστήματα έτσι ώστε το μήκος καθενός από αυτά να είναι το μισό του μήκους του I_1 και παρατηρούμε ότι υπάρχει κάποιο από αυτά, ας το συμβολίσουμε I_2 , το οποίο δε μπορεί να καλυφτεί από πεπερασμένα από τα διαστήματα της οικογένειας.
Συνεχίζουμε επ' άπειρον και δημιουργούμε μια ακολουθία εγκιβωτισμέστο $\mathbb{R}$ και σε σχέση μενων κλειστών διαστημάτων $I, I_1 , I_2 , \ldots$ με τις εξής ιδιότητες:
(i) $l(I_n) = \frac{l(I)}{2^n}$ για κάθε n, οπότε $l(I_n) \to 0$.
(ii) Για κάθε n, το I_n δε μπορεί να καλυφτεί από πεπερασμένα από τα ανοικτά διαστήματα της οικογένειας.
Είναι γνωστό ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός x ο οποίος ανήκει σε όλα τα διαστήματα $I, I_1 , I_2 , \ldots$. Επειδή το I καλύπτεται από τα διαστήματα της οικογένειας, υπάρχει κάποιο από αυτά, ας το συμβολίσουμε J, ώστε $x \in J$. Επειδή το J είναι ανοικτό, υπάρχει $\epsilon > 0$ ώστε

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq J.$$

Τώρα, από την (i) συνεπάγεται ότι υπάρχει n ώστε $l(I_n) < \epsilon$. Αν $y \in I_n$ τότε $|y - x| \leq l(I_n) < \epsilon$, οπότε $y \in (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Επομένως,

$$I_n \subseteq (x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq J.$$

Τώρα, όμως, φτάσαμε σε άτοπο: αφ' ενός το I_n δε μπορεί να καλυφτεί από πεπερασμένα από τα διαστήματα της οικογένειας αφ' ετέρου το I_n καλύπτεται από ένα από τα διαστήματα της οικογένειας, το J. $\square$

Ασκήσεις.

1. Έστω ότι $r_1 , r_2 , \ldots$ είναι μια αρίθμηση του $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Για κάθε n, έστω I_n ένα οποιοδήποτε διάστημα το οποίο περιέχει το r_n και έχει μήκος $l(I_n) \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.
   Περιγράψτε ένα συγκεκριμένο τέτοιο I_n .
   Ισχύει $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$;
   Ισχύει $[0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$;

2. Έστω διαστήματα $I_1 , \ldots , I_n$ με $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq I_1 \cup \cdots \cup I_n$. Αποδείξτε ότι $l(I_1) + \cdots + l(I_n) \geq 1$.
   (Υπόδειξη: Θεωρήστε τα αντίστοιχα κλειστά διαστήματα $\overline{I_1} , \ldots , \overline{I_n}$ και αποδείξτε - με άτοπο - ότι $[0, 1] \subseteq \overline{I_1} \cup \cdots \cup \overline{I_n}$.)

1.2 Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue.

Ορισμός. Έστω τυχόν $E \subseteq \mathbb{R}$. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.
Πρώτη περίπτωση: Έστω ότι για κάθε άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots$ τα οποία καλύπτουν το E, δηλαδή για τα οποία ισχύει $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$, είναι $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) = +\infty$. Με άλλα λόγια, έστω ότι δεν υπάρχει καμιά άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων τα οποία καλύπτουν το E και έχουν άθροισμα μηκών $< +\infty$. Σ' αυτήν την περίπτωση ορίζουμε το σύμβολο $m^*(E)$ να είναι

$$m^*(E) = +\infty.$$

Δεύτερη περίπτωση: Έστω ότι υπάρχει τουλάχιστον μια άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων τα οποία καλύπτουν το E και έχουν άθροισμα μηκών $< +\infty$. Τότε θεωρούμε *όλες* τις άπειρες αριθμήσιμες συλλογές ανοικτών διαστημάτων τα οποία καλύπτουν το E και έχουν άθροισμα μηκών $< +\infty$, για κάθε μια από αυτές υπολογίζουμε το αντίστοιχο άθροισμα μηκών, το οποίο είναι ένας αριθμός, και δημιουργούμε το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με στοιχεία αυτά ακριβώς τα αθροίσματα μηκών. Επειδή, προφανώς, κάθε τέτοιο άθροισμα μηκών είναι αριθμός ≥ 0, το μη κενό σύνολο που δημιουργείται από αυτά τα αθροίσματα μηκών είναι υποσύνολο του $[0, +\infty)$, δηλαδή έχει ως κάτω φράγμα τον 0. Άρα το infimum του συνόλου αυτού είναι αριθμός ≥ 0. Σ' αυτήν την περίπτωση ορίζουμε το σύμβολο $m^*(E)$ να είναι ο μη αρνητικός αριθμός

$$m^*(E) = \inf\big\{ \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) \,:\, \text{τα } I_1, I_2, \ldots \text{ είναι ανοικτά διαστήματα, } E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n \,, \sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) < +\infty \big\}.$$

Και στις δυο περιπτώσεις, το σύμβολο $m^*(E)$ ονομάζεται **εξωτερικό μέτρο Lebesgue** ή, απλούστερα, **εξωτερικό μέτρο** του E.

Σχόλια. (1) Στη δεύτερη περίπτωση, από τη φύση του $m^*(E)$ ως infimum του συγκεκριμένου παραπάνω συνόλου ισχύουν τα εξής.
Κατ' αρχάς $m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n)$ για κάθε άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots$ τα οποία καλύπτουν το E, δηλαδή για τα οποία ισχύει $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$.
Κατόπιν, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει τουλάχιστον μια άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots$ τα οποία καλύπτουν το E ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) < m^*(E) + \epsilon$.
(2) Με απλά λόγια, όλη η ουσία των προηγουμένων είναι η εξής: *προσπαθούμε να καλύψουμε το σύνολο E με άπειρα αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα με τον οικονομικότερο - σε συνολικό μήκος - τρόπο.*
Στην πρώτη περίπτωση, το E είναι τέτοιο που με όποιο τρόπο κι αν το καλύψουμε με άπειρα αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων είναι πάντοτε $+\infty$. Σ' αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το E έχει εξωτερικό μέτρο ίσο με $+\infty$: $m^*(E) = +\infty$.
Στη δεύτερη περίπτωση, το E είναι τέτοιο που μπορούμε να βρούμε τουλάχιστον ένα τρόπο να το καλύψουμε με άπειρα αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα τα οποία έχουν συνολικό μήκος $< +\infty$. Στην περίπτωση αυτή προσπαθούμε να βρούμε άπειρα αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα τα οποία καλύπτουν το E και έχουν συνολικό μήκος *όσο το δυνατό μικρότερο* ή *οικονομικότερο*. Στην περίπτωση αυτή το εξωτερικό μέτρο του E, δηλαδή ο αριθμός $m^*(E)$, εκφράζει *το πόσο μικρό ή πόσο οικονομικό μπορεί να γίνει αυτό το συνολικό μήκος: όσο κοντά θέλουμε (από πάνω) αλλά όχι παρακάτω*. Πιο συγκεκριμένα: (i) με όποιο τρόπο κι αν καλύψουμε το E με άπειρα αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων είναι πάντοτε $\geq m^*(E)$ και (ii) μπορούμε να βρούμε τρόπο να καλύψουμε το E με άπειρα αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα έτσι ώστε το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων να είναι όσο κοντά θέλουμε στο $m^*(E)$ ή, με άλλα λόγια, για κάθε $\epsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε τρόπο να καλύψουμε το E με άπειρα αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα έτσι ώστε το συνολικό μήκος αυτών των διαστημάτων να είναι $< m^*(E) + \epsilon$.

Πρόταση 1.2. (1) $0 \leq m^*(E) \leq +\infty$ *για κάθε* $E \subseteq \mathbb{R}$.
(2) ***Η αυξητικότητα του εξωτερικού μέτρου***. *Αν* $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$, *συνεπάγεται* $m^*(E) \leq m^*(F)$.
(3) $m^*(I) = l(I)$ *για κάθε διάστημα* I.
(4) $m^*(\emptyset) = 0$ *και* $m^*(\mathbb{R}) = +\infty$.
(5) ***Η σ-υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου***. *Αν τα* $E, E_1, E_2, \ldots$ *είναι υποσύνολα του* $\mathbb{R}$ *και* $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, *τότε* $m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(E_n)$.

Απόδειξη. (1) Είναι σαφές από όσα έχουμε πει για το $m^*(E)$.
(2) Έστω $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$. Αν $m^*(F) = +\infty$, τότε η $m^*(E) \leq m^*(F)$ είναι προφανής. Έστω, λοιπόν, ότι $m^*(F) < +\infty$.
Έστω *τυχούσα* άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots$ τα οποία καλύπτουν το F και έχουν συνολικό μήκος $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) < +\infty$. Φυσικά, αυτό το $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n)$ είναι το *τυχόν* στοιχείο του συνόλου του οποίου το infimum έχει οριστεί να είναι το $m^*(F)$. Επειδή $E \subseteq F$, τα ίδια $I_1, I_2, \ldots$ καλύπτουν και το E, οπότε το $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n)$ είναι *και* στοιχείο του συνόλου του οποίου το infimum έχει οριστεί να είναι το $m^*(E)$. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι το τυχόν στοιχείο του

συνόλου με infimum ίσο με $m^*(F)$ είναι και στοιχείο του συνόλου με infimum ίσο με $m^*(E)$. Δηλαδή, το πρώτο σύνολο είναι υποσύνολο του δεύτερου συνόλου και, επομένως, $m^*(E) \leq m^*(F)$.
(3) Έστω διάστημα I. Αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα I_1 ώστε $I \subseteq I_1$ και, επίσης, θεωρήσουμε κενά ανοικτά διαστήματα $I_2 = I_3 = \ldots = \emptyset$, τότε τα $I_1, I_2, \ldots$ καλύπτουν το I και έχουν $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) = l(I_1) < +\infty$. Δηλαδή, έχουμε την περίπτωση $m^*(I) < +\infty$.
Έστω *τυχούσα* άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots$ τα οποία καλύπτουν το I και έχουν $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) < +\infty$. Από το Θεώρημα 1.1 συνεπάγεται $l(I) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n)$. Αυτό σημαίνει ότι ο αριθμός $l(I)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου των $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n)$, δηλαδή του συνόλου του οποίου το infimum έχουμε συμβολίσει $m^*(I)$.
Κατόπιν, έστω οποιοσδήποτε $\epsilon > 0$. Υπάρχει ανοικτό διάστημα I'' ώστε $I \subseteq I''$ και $l(I'') < l(I) + \epsilon$. Θεωρούμε τη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1 = I''$ και $I_2 = I_3 = \ldots = \emptyset$ τα οποία καλύπτουν το I και έχουν $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) = l(I_1) = l(I'') < l(I) + \epsilon$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του συνόλου, του οποίου το infimum έχουμε συμβολίσει $m^*(I)$, το οποίο (στοιχείο) είναι $< l(I) + \epsilon$.
Συνδυάζοντας τα συμπεράσματα των δυο τελευταίων παραγράφων, βλέπουμε ότι $l(I) = m^*(I)$.
(4) Θεωρούμε την άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1 = I_2 = \ldots = \emptyset$. Αυτά καλύπτουν το $\emptyset$, οπότε $m^*(\emptyset) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) = 0$. Άρα $m^*(\emptyset) = 0$.
Θεωρούμε τυχόντα $M > 0$ οσοδήποτε μεγάλο. Θεωρούμε οποιοδήποτε διάστημα I με μήκος M. Τότε, σύμφωνα με τα (2) και (3), είναι $m^*(\mathbb{R}) \geq m^*(I) = l(I) = M$. Επειδή μπορούμε να πάρουμε τον M όσο μεγάλο θέλουμε, συνεπάγεται $m^*(\mathbb{R}) = +\infty$.
(5) Έστω ότι τα $E, E_1, E_2, \ldots$ είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} m^*(E_n) = +\infty$, τότε η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε είναι, προφανώς, σωστή. Έστω, λοιπόν, $\sum_{n=1}^{+\infty} m^*(E_n) < +\infty$. Επομένως, είναι και $m^*(E_n) < +\infty$ για κάθε n.
Θεωρούμε τυχόντα $\epsilon > 0$. Σύμφωνα με τον ορισμό του $m^*(E_n)$, υπάρχει τουλάχιστον μια άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_{n,1}, I_{n,2}, \ldots$ τα οποία καλύπτουν το E_n και με συνολικό μήκος $\sum_{m=1}^{+\infty} l(I_{n,m}) < m^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$.
Κατόπιν, θεωρούμε την άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων που σχηματίζεται από όλα τα διαστήματα $I_{n,m}$ καθώς οι δείκτες n, m διατρέχουν, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, τους φυσικούς αριθμούς. Είναι φανερό ότι τα διαστήματα αυτά καλύπτουν όλα τα σύνολα $E_1, E_2, \ldots$ και, επειδή αυτά τα τελευταία καλύπτουν το E, τα ίδια διαστήματα καλύπτουν και το E. Από τον ορισμό του $m^*(E)$ συνεπάγεται ότι αυτό είναι $\leq$ από το συνολικό μήκος όλων των διαστημάτων $I_{n,m}$ και, επομένως,

$$\begin{aligned} m^*(E) &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \big(\sum_{m=1}^{+\infty} l(I_{n,m}) \big) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \big(m^*(E_n) + \tfrac{\epsilon}{2^n} \big) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(E_n) + \sum_{n=1}^{+\infty} \tfrac{\epsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(E_n) + \epsilon. \end{aligned}$$

Επειδή η $m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(E_n) + \epsilon$ ισχύει για τυχόντα $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(E_n)$. □

Η σ-υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου ισχύει και για πεπερασμένα σύνολα. Πράγματι, έστω $E \subseteq E_1 \cup \cdots \cup E_m$. Θεωρούμε τα $E_{m+1} = E_{m+2} = \ldots = \emptyset$ και έχουμε άπειρα αριθμήσιμα σύνολα $E_1, E_2, \ldots$ με $E \subseteq E_1 \cup \cdots \cup E_m = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Συνεπάγεται $m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(E_n) = m^*(E_1) + \cdots + m^*(E_m)$.

Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται **υποπροσθετικότητα** του εξωτερικού μέτρου και, όπως μόλις είδαμε, συνεπάγεται από την σ-υποπροσθετικότητα.

Πρόταση 1.3. *Είναι $m^*(E) = 0$ για κάθε αριθμήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Έστω οποιοδήποτε μονοσύνολο $\{x\}$ στον $\mathbb{R}$. Θεωρούμε $\epsilon > 0$ και παίρνουμε ένα οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα I το οποίο περιέχει το x και έχει μήκος ίσο με ϵ. Τέλος, θεωρούμε την άπειρη αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών διαστημάτων $I_1 = I$ και $I_2 = I_3 = \ldots = \emptyset$, τα οποία καλύπτουν το $\{x\}$. Συνεπάγεται $m^*(\{x\}) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) = l(I_1) = l(I) = \epsilon$. Επειδή η $m^*(\{x\}) \leq \epsilon$ ισχύει για τυχόντα $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $m^*(\{x\}) = 0$.

Τώρα, έστω αριθμήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$. Αν το E είναι πεπερασμένο, δηλαδή αν $E = \{x_1, \ldots, x_m\}$, τότε είναι $E = \{x_1\} \cup \cdots \cup \{x_m\}$ και, επομένως, $m^*(E) \leq m^*(\{x_1\}) + \cdots + m^*(\{x_m\}) = 0 + \cdots + 0 = 0$. Αν το E είναι άπειρο αριθμήσιμο, τότε έστω $x_1, x_2, \ldots$ μια οποιαδήποτε αρίθμησή του. Δηλαδή, $E = \{x_1, x_2, \ldots\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\{x_n\}$ και, επομένως, $m^*(E) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$.
Σε κάθε περίπτωση είναι $m^*(E) \leq 0$ και, επομένως, $m^*(E) = 0$. □

Παράδειγμα. $m^*(\mathbb{Q}) = 0$.

Πόρισμα: Κανένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ με θετικό μήκος δεν είναι αριθμήσιμο.

Ασκήσεις.

1. Με τον παρακάτω συλλογισμό αποδεικνύεται ότι $m^*(E) = 0$ για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$. Χρησιμοποιούμε την σ-υποπροσθετικότητα του εξωτερικού μέτρου. Ποιό είναι το λάθος;

$$0 \leq m^*(E) = m^*\big(\textstyle\bigcup_{x \in E}\{x\}\big) \leq \sum_{x \in E} m^*(\{x\}) = \sum_{x \in E} 0 = 0.$$

2. Χρησιμοποιώντας απλές ιδιότητες του m^*, αποδείξτε ότι,
(i) αν το $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι φραγμένο, τότε $m^*(E) < +\infty$.
(ii) αν το $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει εσωτερικό σημείο, τότε $m^*(E) > 0$.
(iii) αν $E, F \subseteq \mathbb{R}$ και $m^*(E) = 0$, τότε $m^*(E \cup F) = m^*(F)$.

3. Αποδείξαμε ότι, αν το $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμο, τότε $m^*(E) = 0$, βάσει της σ-υποπροσθετικότητας του m^*. Αποδείξτε το ίδιο με βάση μόνο τον ορισμό του m^*.
(Υπόδειξη: Θεωρήστε μια οποιαδήποτε αρίθμηση $x_1, x_2, \ldots$ του E. Πάρτε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$ και σε κάθε x_n αντιστοιχήστε κάποιο κατάλληλο ανοικτό διάστημα I_n ώστε τα $I_1, I_2, \ldots$ να καλύπτουν το E και να έχουν συνολικό μήκος $< \epsilon$.)

4. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $m^*(A) < +\infty$. Αποδείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A \subseteq U$ και $m^*(U) < m^*(A) + \epsilon$.
(Υπόδειξη: Θεωρήστε αριθμήσιμα ανοικτά διαστήματα που καλύπτουν το A σύμφωνα με τον ορισμό του $m^*(A)$ και πάρτε την ένωσή τους.)
Αποδείξτε ότι για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$

$$m^*(A) = \inf\{m^*(U) : A \subseteq U, U \text{ ανοικτό } \subseteq \mathbb{R}\}.$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ υπάρχει $G \subseteq \mathbb{R}$ το οποίο είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών $\subseteq \mathbb{R}$ ώστε $A \subseteq G$ και $m^*(G) = m^*(A)$.
(Υπόδειξη: Εφαρμόστε το πρώτο μέρος με $\epsilon = \frac{1}{n}$ και θεωρήστε τα αντίστοιχα U_n.)

5. Ποια είναι η τιμή του $m^*(\mathbb{Q} \cap [0,1])$; του $m^*([0,1])$;
Υποθέστε ότι αλλάζουμε τον ορισμό του $m^*(E)$ και θεωρούμε *πεπερασμένες* αντί άπειρες αριθμήσιμες συλλογές ανοικτών διαστημάτων που καλύπτουν το E. Ποιά είναι τώρα η τιμή του $m^*(\mathbb{Q} \cap [0,1])$; του $m^*([0,1])$;
(Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση 2 της ενότητας 1.1.)

6. Αποδείξτε ότι, αν στον ορισμό του $m^*(A)$ επιτρέψουμε τα διαστήματα που καλύπτουν το A να είναι οποιουδήποτε τύπου, τότε η ποσότητα $m^*(A)$ δε θα αλλάξει.

1.3 Το μέτρο Lebesgue.

Ορισμός. Έστω τυχόν $E \subseteq \mathbb{R}$. Το E χαρακτηρίζεται **Lebesgue μετρήσιμο** ή, απλούστερα, **μετρήσιμο** αν έχει την εξής ιδιότητα: για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A).$$

Παρατηρήστε ότι τα σύνολα $A \cap E$ και $A \cap E^c$ είναι ξένα και η ένωσή τους ισούται με το A. Μπορούμε να πούμε ότι τα δυο αυτά σύνολα είναι τα *κομμάτια* στα οποία διαχωρίζεται το A από το E: το πρώτο αποτελείται από τα στοιχεία του A που ανήκουν στο E και το δεύτερο αποτελείται από τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο E. Επομένως, μπορούμε να διατυπώσουμε τον παραπάνω ορισμό ως εξής: *το E χαρακτηρίζεται μετρήσιμο αν τα δυο κομμάτια στα οποία διαχωρίζει κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έχουν συνολικό εξωτερικό μέτρο ίσο με το έξωτερικό μέτρο του υποσυνόλου.*

Παρατηρούμε, επίσης, ότι από την υποπροσθετικότητα του m^* και από το ότι $(A \cap E) \cup (A \cap E^c) = A$ συνεπάγεται $m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \geq m^*(A)$ για κάθε $E, A \subseteq \mathbb{R}$. Επομένως, το να ισχύει η $m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A)$ είναι ισοδύναμο με το να ισχύει η $m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A)$. Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι *το E χαρακτηρίζεται μετρήσιμο αν για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει $m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A)$.*

Παρατηρούμε, τέλος, ότι, αν $m^*(A) = +\infty$, τότε η $m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A)$ ισχύει *αυτομάτως*. Άρα μπορούμε να πούμε ότι *το E χαρακτηρίζεται μετρήσιμο αν για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $m^*(A) < +\infty$ ισχύει $m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq m^*(A)$.*

Αυτές οι δυο παρατηρήσεις ελαφρύνουν κάπως την εργασία μας όταν πρέπει να ελέγξουμε *με βάση τον ορισμό* αν ένα συγκεκριμένο $E \subseteq \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο. Σύμφωνα με την πρώτη παρατήρηση, είναι αρκετό να ελέγξουμε αν ισχύει μια ανισότητα (δηλαδή, κάτι ασθενέστερο) αντί μιας ισότητας. Τέλος, σύμφωνα με τη δεύτερη παρατήρηση, είναι αρκετό να ελέγξουμε την ανισότητα για λιγότερα A αντί για όλα τα $A \subseteq \mathbb{R}$.

Πρόταση 1.4. (1) *Το $\emptyset$ και το $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμα.*
(2) *Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ και $m^*(E) = 0$, τότε το E είναι μετρήσιμο.*
(3) *Αν το E είναι μετρήσιμο, τότε και το E^c είναι μετρήσιμο.*
(4) *Αν τα E, F είναι μετρήσιμα, τότε και το $E \cup F$ είναι μετρήσιμο.*

Απόδειξη. (1) Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$m^*(A \cap \emptyset) + m^*(A \cap \emptyset^c) = m^*(\emptyset) + m^*(A \cap \mathbb{R}) = 0 + m^*(A) = m^*(A).$$

Επίσης,

$$m^*(A \cap \mathbb{R}) + m^*\big(A \cap \mathbb{R}^c\big) = m^*(A) + m^*(A \cap \emptyset) = m^*(A) + m^*(\emptyset) = m^*(A) + 0 = m^*(A).$$

(2) Επειδή $A \cap E \subseteq E$ και $A \cap E^c \subseteq A$ και λόγω της αυξητικότητας του m^*, για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \leq m^*(E) + m^*(A) = 0 + m^*(A) = m^*(A).$$

(3) Επειδή το E είναι μετρήσιμο και επειδή $(E^c)^c = E$, για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap (E^c)^c) = m^*(A \cap E^c) + m^*(A \cap E) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A).$$

Άρα το E^c είναι μετρήσιμο.
(4) Στους παρακάτω υπολογισμούς: η πρώτη ισότητα ισχύει διότι $E \cup F = F \cup (F^c \cap E)$ και $(E \cup F)^c = F^c \cap E^c$, η δεύτερη ισότητα ισχύει διότι $A \cap (K \cup L) = (A \cap K) \cup (A \cap L)$, η ανισότητα ισχύει λόγω της υποπροσθετικότητας του m^*, η τρίτη ισότητα ισχύει διότι το E είναι μετρήσιμο και η τέταρτη ισότητα ισχύει διότι το F είναι μετρήσιμο.

$$\begin{aligned}
m^*\big(A \cap (E \cup F)\big) + m^*\big(A \cap (E \cup F)^c\big) &= m^*\big(A \cap (F \cup (F^c \cap E)\big) + m^*(A \cap F^c \cap E^c) \\
&= m^*\big((A \cap F) \cup (A \cap F^c \cap E)\big) + m^*(A \cap F^c \cap E^c) \\
&\leq m^*(A \cap F) + m^*(A \cap F^c \cap E) + m^*(A \cap F^c \cap E^c) \\
&= m^*(A \cap F) + m^*(A \cap F^c) \\
&= m^*(A).
\end{aligned}$$

Άρα το $E \cup F$ είναι μετρήσιμο. □

Τώρα θα δούμε μερικούς γενικούς ορισμούς.

Ορισμός. Έστω ένα οποιοδήποτε σύνολο X και έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ χαρακτηρίζεται **άλγεβρα υποσυνόλων του** X αν ισχύουν τα παρακάτω:
(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
(ii) αν $E \in \mathcal{A}$, τότε $E^c \in \mathcal{A}$ (όπου $E^c = X \setminus E$) και
(iii) αν $E, F \in \mathcal{A}$, τότε $E \cup F \in \mathcal{A}$.

Πρόταση 1.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του X. Τότε:*
(1) *$X \in \mathcal{A}$,*
(2) *αν $E, F \in \mathcal{A}$, τότε $E \cap F,\ E \setminus F,\ F \setminus E,\ E \triangle F \in \mathcal{A}$.*

Απόδειξη. (1) Από τις ιδιότητες (i) και (ii) της $\mathcal{A}$ συνεπάγεται ότι $X = \emptyset^c \in \mathcal{A}$.
(2) Από τις ιδιότητες (ii) και (iii) της $\mathcal{A}$ συνεπάγεται ότι, αν $E, F \in \mathcal{A}$, τότε $E^c, F^c \in \mathcal{A}$, οπότε $E^c \cup F^c \in \mathcal{A}$ και, επομένως, $E \cap F = (E^c \cup F^c)^c \in \mathcal{A}$.
Αν $E, F \in \mathcal{A}$, τότε $E, F^c \in \mathcal{A}$, οπότε $E \setminus F = E \cap F^c \in \mathcal{A}$. Η απόδειξη για το $F \setminus E$ είναι, φυσικά, ίδια.
Τέλος, αν $E, F \in \mathcal{A}$, τότε $E \setminus F,\ F \setminus E \in \mathcal{A}$ και, επομένως, $E \triangle F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E) \in \mathcal{A}$. □

Είναι φανερό ότι η ιδιότητα (iii) μιας άλγεβρας υποσυνόλων του X αλλά και η ανάλογη ιδιότητα με την τομή που εμφανίζεται στο (2) της Πρότασης 1.5 γενικεύονται με την αρχή της επαγωγής για πεπερασμένες ενώσεις και τομές. Πιο συγκεκριμένα: αν η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του X και αν $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{A}$, τότε

$$E_1 \cup \cdots \cup E_n \in \mathcal{A}, \qquad E_1 \cap \cdots \cap E_n \in \mathcal{A}.$$

Όμως, για άπειρες αριθμήσιμες ενώσεις και τομές χρειαζόμαστε έναν άλλο ορισμό.

Ορισμός. Έστω ένα οποιοδήποτε σύνολο X και έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ χαρακτηρίζεται **σ-άλγεβρα υποσυνόλων του** X αν ισχύουν τα παρακάτω:
(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
(ii) αν $E \in \mathcal{A}$, τότε $E^c \in \mathcal{A}$ (όπου $E^c = X \setminus E$) και
(iii) αν $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A}$, τότε $E_1 \cup E_2 \cup \cdots \in \mathcal{A}$.

Πρόταση 1.6. *Έστω $\mathcal{A}$ μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X. Τότε:*
(1) *η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του X και*
(2) *αν $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A}$, τότε $E_1 \cap E_2 \cap \cdots \in \mathcal{A}$.*

Απόδειξη. (1) Αν $E, F \in \mathcal{A}$, τότε θεωρούμε τα $E_1 = E, E_2 = F, E_3 = E_4 = \ldots = \emptyset$, τα οποία ανήκουν όλα στην $\mathcal{A}$ και από την ιδιότητα (iii) της σ-άλγεβρας συνεπάγεται ότι το $E \cup F = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \cdots$ ανήκει στην $\mathcal{A}$.
(2) Από τις ιδιότητες (ii) και (iii) της σ-άλγεβρας συνεπάγεται ότι, αν $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{A}$, τότε ${E_1}^c, {E_2}^c, \ldots \in \mathcal{A}$, οπότε ${E_1}^c \cup {E_2}^c \cup \cdots \in \mathcal{A}$. Άρα $E_1 \cap E_2 \cap \cdots = \big({E_1}^c \cup {E_2}^c \cup \cdots\big)^c \in \mathcal{A}$. □

Ορισμός. Μετά από αυτούς τους γενικούς ορισμούς, συμβολίζουμε με $\mathcal{M}$ την οικογένεια όλων των μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{M} = \{E : \text{το } E \text{ είναι μετρήσιμο } \subseteq \mathbb{R}\}.$$

Από την Πρόταση 1.4 συνεπάγεται ότι η $\mathcal{M}$ είναι μια άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Αυτό με τη σειρά του, σύμφωνα με τη γενική Πρόταση 1.5, συνεπάγεται ότι, εκτός από την πεπερασμένη ένωση, η πεπερασμένη τομή, η διαφορά και η συμμετρική διαφορά μετρήσιμων συνόλων είναι μετρήσιμα σύνολα.

Πρόταση 1.7. *Έστω ότι τα $E_1, E_2, \ldots$ είναι ξένα ανά δύο μετρήσιμα συνόλα και $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Τότε για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει*

$$m^*(A \cap E) = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A \cap E_n).$$

Απόδειξη. Επειδή $A \cap E = A \cap \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(A \cap E_n)$, από την σ-υποπροσθετικότητα του m^* συνεπάγεται
$$m^*(A \cap E) \leq \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A \cap E_n).$$
Τώρα, συμβολίζουμε $F_n = E_1 \cup \cdots \cup E_n$ για κάθε n και θα αποδείξουμε με την αρχή της επαγωγής ότι
$$m^*(A \cap E_1) + \cdots + m^*(A \cap E_n) = m^*(A \cap F_n)$$
για κάθε n. Η ισότητα αυτή είναι, προφανώς, σωστή αν $n = 1$, διότι $F_1 = E_1$. Υποθέτουμε ότι η ισότητα ισχύει για κάποιον n και, επειδή το E_{n+1} είναι μετρήσιμο, συνεπάγεται
$$m^*(A \cap F_{n+1} \cap E_{n+1}) + m^*(A \cap F_{n+1} \cap {E_{n+1}}^c) = m^*(A \cap F_{n+1}).$$
Όμως, επειδή τα $E_1, E_2, \ldots$ είναι ξένα ανά δύο, συνεπάγεται $F_{n+1} \cap E_{n+1} = E_{n+1}$ και $F_{n+1} \cap {E_{n+1}}^c = F_n$. Άρα η τελευταία ισότητα γίνεται
$$m^*(A \cap E_{n+1}) + m^*(A \cap F_n) = m^*(A \cap F_{n+1}).$$
Από την επαγωγική υπόθεση,
$$m^*(A \cap E_1) + \cdots + m^*(A \cap E_n) + m^*(A \cap E_{n+1}) = m^*(A \cap F_{n+1})$$
και αποδείχτηκε αυτό που θέλαμε για κάθε n.
Τώρα, βλέπουμε ότι $F_n \subseteq E$ για κάθε n και από την αυξητικότητα του m^* έχουμε
$$m^*(A \cap E_1) + \cdots + m^*(A \cap E_n) \leq m^*(A \cap E)$$
για κάθε n. Άρα
$$\textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A \cap E_n) \leq m^*(A \cap E).$$
Η ισότητα που θέλουμε προκύπτει από την τελευταία ανισότητα και από την αντίθετή της στην αρχή της απόδειξης. □

Θεώρημα 1.2. *Η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ήδη ότι η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, οπότε απομένει να αποδείξουμε ότι η $\mathcal{M}$ ικανοποιεί την ιδιότητα (iii) μιας σ-άλγεβρας. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι τα $E_1, E_2, \ldots$ είναι μετρήσιμα και θα αποδείξουμε ότι το $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ είναι μετρήσιμο.
Κατ' αρχάς θεωρούμε την ειδική περίπτωση κατά την οποία τα $E_1, E_2, \ldots$ είναι ξένα ανά δύο. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 1.7, συμβολίζουμε $F_n = E_1 \cup \cdots \cup E_n$ για κάθε n και θα χρησιμοποιήσουμε τις ισότητες $m^*(A \cap E_1) + \cdots + m^*(A \cap E_n) = m^*(A \cap F_n)$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A \cap E_n) = m^*(A \cap E)$. Η δεύτερη είναι το αποτέλεσμα της Πρότασης 1.7 και η πρώτη υπάρχει μέσα στην απόδειξη της Πρότασης 1.7. Επειδή η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι το F_n είναι μετρήσιμο. Άρα
$$\begin{aligned} m^*(A) &= m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap {F_n}^c) \\ &= m^*(A \cap E_1) + \cdots + m^*(A \cap E_n) + m^*(A \cap {F_n}^c). \end{aligned}$$
Επειδή $F_n \subseteq E$ συνεπάγεται $A \cap E^c \subseteq A \cap {F_n}^c$ και, επομένως,
$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E_1) + \cdots + m^*(A \cap E_n) + m^*(A \cap E^c).$$
Τέλος, επειδή αυτό ισχύει για κάθε n, συνεπάγεται
$$m^*(A) \geq \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A \cap E_n) + m^*(A \cap E^c) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι το E είναι μετρήσιμο.
Τώρα, θεωρούμε τη γενική περίπτωση κατά την οποία τα $E_1, E_2, \ldots$ δεν είναι αναγκαστικά ξένα ανά δύο. Ορίζουμε

$$E_1{}' = E_1\,, \qquad E_n{}' = E_n \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1}) \quad \text{για} \quad n \geq 2.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα $E_1{}', E_2{}', \ldots$ είναι ξένα ανά δύο και ότι $E = \bigcup_{n=1} E_n{}'$. Επειδή η $\mathcal{M}$ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, συνεπάγεται ότι τα $E_1{}', E_2{}', \ldots$ είναι μετρήσιμα. Επειδή δε τα σύνολα αυτά είναι ξένα ανά δύο και, επομένως, εμπίπτουν στην ειδική περίπτωση που εξετάσαμε προηγουμένως, συνεπάγεται ότι το E είναι μετρήσιμο. □

Πρόταση 1.8. *Κάθε διάστημα είναι μετρήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω διάστημα I. Θεωρούμε οποιοδήποτε $A \subseteq \mathbb{R}$ με $m^*(A) < +\infty$ και οποιονδήποτε $\epsilon > 0$. Τότε υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) < m^*(A) + \epsilon$.
Θεωρούμε, τώρα, οποιοδήποτε I_n. Το $J_n = I_n \cap I$ είναι διάστημα και είναι υποσύνολο του I_n. Είναι προφανές ότι το I_n χωρίζεται σε το πολύ τρία σχεδόν ξένα ανά δύο υποδιαστήματα, ένα εκ των οποίων είναι το J_n. Ας συμβολίσουμε $J_n, J_n^{(1)}, \ldots, J_n^{(k_n)}$ τα διαστήματα αυτά (όπου $0 \leq k_n \leq 2$). Προφανώς, $I_n \cap I^c \subseteq J_n^{(1)} \cup \cdots \cup J_n^{(k_n)}$ και $I_n = J_n \cup J_n^{(1)}, \ldots, J_n^{(k_n)}$. Από το Λήμμα 1.2 συνεπάγεται $l(I_n) = l(J_n) + l(J_n^{(1)}) + \cdots + l(J_n^{(k_n)})$. Άρα

$$\begin{aligned} m^*(I_n \cap I) + m^*(I_n \cap I^c) &\leq m^*(J_n) + m^*(J_n^{(1)}) + \cdots + m^*(J_n^{(k_n)}) \\ &= l(J_n) + l(J_n^{(1)}) + \cdots + l(J_n^{(k_n)}) = l(I_n). \end{aligned}$$

Επειδή $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$, συνεπάγεται

$$\begin{aligned} m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I^c) &\leq \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} m^*(I_n \cap I) + \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(I_n \cap I^c) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} \big(m^*(I_n \cap I) + m^*(I_n \cap I^c)\big) \\ &\leq \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) \leq m^*(A) + \epsilon. \end{aligned}$$

Τέλος, επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $m^*(A \cap I) + m^*(A \cap I^c) \leq m^*(A)$ και, επομένως, το I είναι μετρήσιμο. □

Πρόταση 1.9. *Κάθε ανοικτό και κάθε κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μετρήσιμο.*

Απόδειξη. Έστω U οποιοδήποτε ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$. Επειδή το U είναι ανοικτό, για κάθε $x \in U$ υπάρχει κάποιο ανοικτό διάστημα J_x το οποίο περιέχει το x και είναι υποσύνολο του U. Μικραίνοντας λίγο το J_x και λόγω της πυκνότητας των ρητών στο σύνολο των πραγματικών, μπορούμε να βρούμε κάποιο ανοικτό διάστημα I_x *με τα δυο του άκρα ρητούς*, το οποίο περιέχει το x και είναι υποσύνολο του J_x και, επομένως, του U.
Θεωρούμε, τώρα, όλα τα παραπάνω διαστήματα I_x που αντιστοιχούν σε όλα τα σημεία $x \in U$. Αυτά έχουν τις εξής ιδιότητες. Κάθε τέτοιο διάστημα είναι υποσύνολο του U, οπότε η ένωσή τους είναι υποσύνολο του U. Κάθε $x \in U$ περιέχεται σε ένα από αυτά τα διαστήματα - στο I_x - και, επομένως το U είναι υποσύνολο της ένωσης των διαστημάτων αυτών. Άρα το U είναι *ίσο* με την ένωση των διαστημάτων αυτών. Τα διαστήματα αυτά είναι *αριθμήσιμα* διότι τα άκρα τους είναι ρητοί αριθμοί.
Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι το U είναι ένωση αριθμήσιμων διαστημάτων και, επειδή κάθε διάστημα ανήκει στην $\mathcal{M}$ και η $\mathcal{M}$ είναι σ-άλγεβρα, συνεπάγεται ότι το U ανήκει στην $\mathcal{M}$.
Τέλος, έστω F οποιοδήποτε κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$. Τότε το $U = F^c$ είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$, οπότε ανήκει στην $\mathcal{M}$ και, επομένως, το $F = U^c$ ανήκει στην $\mathcal{M}$. □

Ορισμός. Για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ το οποίο είναι μετρήσιμο ορίζουμε την ποσότητα $m(E)$ με τον τύπο

$$m(E) = m^*(E)$$

και την ονομάζουμε **μέτρο Lebesgue του** E ή, πιο απλά, **μέτρο του** E.

Πρέπει να τονιστεί ότι το $m^*(E)$ ορίζεται για *κάθε* $E \subseteq \mathbb{R}$ ενώ η ποσότητα $m(E)$ ορίζεται - και είναι ίση με την $m^*(E)$ - *μόνο* για τα $E \subseteq \mathbb{R}$ τα οποία ανήκουν στην $\mathcal{M}$.

Ας δούμε συνοπτικά μερικές ιδιότητες του m, οι οποίες προκύπτουν αμέσως από αντίστοιχες ιδιότητες του m^* και της $\mathcal{M}$.

(1) $0 \le m(E) \le +\infty$ για κάθε $E \in \mathcal{M}$.

(2) $\emptyset, \mathbb{R} \in \mathcal{M}$ και $m(\emptyset) = 0$, $m(\mathbb{R}) = +\infty$.

(3) $I \in \mathcal{M}$ και $m(I) = l(I)$ για κάθε διάστημα I.

(4) Κάθε αριθμήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ ανήκει στην $\mathcal{M}$ και ισχύει $m(E) = 0$.

(5) Αν $E, F \in \mathcal{M}$ και $E \subseteq F$, τότε $m(E) \le m(F)$.

(6) Αν $E, E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{M}$ και $E \subseteq E_1 \cup E_2 \cup \cdots$, τότε $m(E) \le m(E_1) + m(E_2) + \cdots$.

(7) Αν τα $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{M}$ είναι ξένα ανά δύο και $E = E_1 \cup E_2 \cup \cdots$, τότε $m(E) = m(E_1) + m(E_2) + \cdots$.

(8) Αν $F \in \mathcal{M}$ με $m(F) = 0$ και $E \subseteq F$, τότε $E \in \mathcal{M}$ και $m(E) = 0$.

Η (1) προκύπτει από την Πρόταση 1.2(1). Η (2) προκύπτει από τις Προτάσεις 1.2(4) και 1.4(1). Η (3) προκύπτει από τις Προτάσεις 1.2(3) και 1.8. Η (4) προκύπτει από τις Προτάσεις 1.3 και 1.4(2). Η (5) προκύπτει από την Πρόταση 1.2(2). Η (6) προκύπτει από την Πρόταση 1.2(5). Η (7) προκύπτει από την Πρόταση 1.7 με $A = \mathbb{R}$. Τέλος, η (8) προκύπτει από τις Προτάσεις 1.2(2) και 1.4(2).

Πρόταση 1.10. *Έστω ότι τα $E_1, E_2, \ldots$ είναι μετρήσιμα και ισχύει $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n. Αν $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, τότε $m(E_n) \to m(E)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύνολα $F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 \setminus E_1$, $F_3 = E_3 \setminus E_2$ κλπ. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα $F_1, F_2, \ldots$ είναι μετρήσιμα, ότι είναι ξένα ανά δύο, ότι $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} F_k$ και ότι $E_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$. Επομένως,

$$m(E_n) = \textstyle\sum_{k=1}^{n} m(F_k) \to \sum_{k=1}^{+\infty} m(F_k) = m(E).$$

□

Πρόταση 1.11. *Έστω ότι τα $E_1, E_2, \ldots$ είναι μετρήσιμα και ισχύει $E_{n+1} \subseteq E_n$ για κάθε n. Αν $E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n$ και αν $m(E_n) < +\infty$ για έναν τουλάχιστον n, τότε $m(E_n) \to m(E_n)$.*

Απόδειξη. Έστω $m(E_{n_0}) < +\infty$. Τα $E_{n_0} \setminus E_{n_0+1}$, $E_{n_0} \setminus E_{n_0+2}$, $E_{n_0} \setminus E_{n_0+3}$ κλπ είναι μετρήσιμα και $E_{n_0} \setminus E_{n_0+n} \subseteq E_{n_0} \setminus E_{n_0+n+1}$ για κάθε $n \ge 1$. Επίσης, $E_{n_0} \setminus E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (E_{n_0} \setminus E_{n_0+n})$. Από την Πρόταση 1.10 συνεπάγεται

$$m(E_{n_0} \setminus E_{n_0+n}) \to m(E_{n_0} \setminus E).$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι $m(E_{n_0}) = m(E) + m(E_{n_0} \setminus E)$ και $m(E_{n_0}) = m(E_{n_0+n}) + m(E_{n_0} \setminus E_{n_0+n})$. Από την $m(E_{n_0}) < +\infty$ συνεπάγεται $m(E_{n_0} \setminus E) = m(E_{n_0}) - m(E)$ και $m(E_{n_0} \setminus E_{n_0+n}) = m(E_{n_0}) - m(E_{n_0+n})$. Άρα

$$m(E_{n_0}) - m(E_{n_0+n}) \to m(E_{n_0}) - m(E).$$

Πάλι, επειδή $m(E_{n_0}) < +\infty$, συνεπάγεται $m(E_{n_0+n}) \to m(E)$ και, επομένως, $m(E_n) \to m(E)$. $\square$

Σχόλιο. Αν από την Πρόταση 1.11 παραλείψουμε την υπόθεση ότι $m(E_n) < +\infty$ για έναν τουλάχιστον n, τότε το συμπέρασμα μπορεί να μην ισχύει. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε τα σύνολα $E_n = [n, +\infty)$. Τότε $E_{n+1} \subseteq E_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\bigcap_{n=1}^{+\infty} E_n = \emptyset$. Όμως, $m(E_n) = +\infty$ (γιατί;) για κάθε n, αλλά $m(\emptyset) = 0$.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την εξής ακολουθία συνόλων

$$F_0 = [0, 1],$$

$$F_1 = [0, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, 1],$$

$$F_2 = [0, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, 1],$$

$$F_3 = [0, \tfrac{1}{27}] \cup [\tfrac{2}{27}, \tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9}, \tfrac{7}{27}] \cup [\tfrac{8}{27}, \tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3}, \tfrac{19}{27}] \cup [\tfrac{20}{27}, \tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9}, \tfrac{25}{27}] \cup [\tfrac{26}{27}, 1],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Τα σύνολα αυτά δημιουργούνται ως εξής. Ξεκινάμε με το $F_0 = [0, 1]$. Χωρίζουμε το $[0, 1]$ σε τρία ισομήκη κλειστά διαστήματα και κρατάμε τα δυο ακριανά: η ένωσή τους είναι το F_1 . Σε καθένα από τα δυο κλειστά διαστήματα που αποτελούν το F_1 επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία, δηλαδή το χωρίζουμε σε τρία ισομήκη κλειστά διαστήματα και κρατάμε τα δυο ακριανά: η ένωση των τεσσάρων διαστημάτων που προκύπτουν είναι το F_2 . Συνεχίζουμε επ' άπειρον.

Είναι φανερό ότι για κάθε n το σύνολο F_n είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Άρα κάθε F_n είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με μέτρο $m(F_n) = 2^n \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Είναι, επίσης, φανερό ότι $F_{n+1} \subseteq F_n$ για κάθε n.

Ορισμός. Ορίζουμε το σύνολο $C = \bigcap_{n=0}^{+\infty} F_n$. Το C ονομάζεται **σύνολο του Cantor**.

Το C είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ως τομή κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 1.11,

$$m(C) = \lim_{n \to +\infty} m(F_n) = \lim_{n \to +\infty} (\tfrac{2}{3})^n = 0.$$

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι το C δεν είναι αριθμήσιμο σύνολο. Ας υποθέσουμε, για να καταλήξουμε σε άτοπο, ότι το C είναι αριθμήσιμο και έστω $C = \{x_1, x_2, \ldots\} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ένα από τα δυο διαστήματα που αποτελούν το F_1 *δεν* περιέχει τον x_1 . Ονομάζουμε I_1 αυτό το διάστημα. Το I_1 γεννά δυο διαστήματα από αυτά που αποτελούν το F_2 : τουλάχιστον ένα από αυτά τα δυο διαστήματα *δεν* περιέχει τον x_2 . Ονομάζουμε I_2 αυτό το διάστημα. Το I_2 γεννά δυο διαστήματα από αυτά που αποτελούν το F_3 : τουλάχιστον ένα από αυτά τα δυο διαστήματα *δεν* περιέχει τον x_3 . Ονομάζουμε I_3 αυτό το διάστημα. Συνεχίζουμε επ' άπειρον. Με αυτόν τον τρόπο σχηματίζεται μια ακολουθία εγκιβωτισμένων κλειστών διαστημάτων $I_1, I_2, I_3, \ldots$ με τις εξής ιδιότητες:
(i) $I_n \subseteq F_n$ για κάθε n και
(ii) $x_n \notin I_n$ για κάθε n.
Γνωρίζουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός x ο οποίος ανήκει σε κάθε I_n . Σύμφωνα με την (i), ο x ανήκει σε κάθε F_n και, επομένως, ο x ανήκει στο C. Από την άλλη μεριά, βλέπουμε ότι για κάθε n ισχύει $x \in I_n$ και, βάσει της (ii), $x_n \notin I_n$. Επομένως, $x \neq x_n$ για κάθε n. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο: $x \in C$ και $x \notin \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Το C αποτελεί παράδειγμα υποσυνόλου του $\mathbb{R}$ το οποίο είναι υπεραριθμήσιμο και έχει μέτρο $m(C) = 0$.

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι το $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ είναι μετρήσιμο και ότι $m([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 1$.

Σχόλιο. Το $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ είναι χαρακτηριστικό παράδειγμα συνόλου με θετικό μέτρο, το οποίο δεν περιέχει κανένα ανοικτό διάστημα.

2. Αν $E, F \in \mathcal{M}$, αποδείξτε ότι $m(E \cup F) + m(E \cap F) = m(E) + m(F)$.

3. Αν $E, F \in \mathcal{M}$, $E \subseteq F$ και $m(E) < +\infty$, αποδείξτε ότι $m(F \setminus E) = m(F) - m(E)$.
Τι μπορείτε να πείτε αν $m(E) = +\infty$;

4. Έστω A_n $(n \in \mathbb{N})$ υποσύνολα ενός συνόλου X. Το $\bigcap_{m=1}^{+\infty}\big(\bigcup_{n=m}^{+\infty} A_n\big)$ ονομάζεται **ανώτατο όριο** και το $\bigcup_{m=1}^{+\infty}\big(\bigcap_{n=m}^{+\infty} A_n\big)$ ονομάζεται **κατώτατο όριο** της ακολουθίας συνόλων (A_n). Συμβολίζουμε

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{+\infty}\Big(\bigcup_{n=m}^{+\infty} A_n\Big), \qquad \underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{m=1}^{+\infty}\Big(\bigcap_{n=m}^{+\infty} A_n\Big).$$

Αποδείξτε ότι $\underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n \subseteq \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$.
Αποδείξτε ότι το $\underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$ έχει στοιχεία του ακριβώς εκείνα τα $x \in X$ τα οποία ανήκουν σε όλα τα A_n από έναν δείκτη και πέρα. Επίσης, αποδείξτε ότι το $\overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$ έχει στοιχεία του ακριβώς εκείνα τα $x \in X$ τα οποία ανήκουν σε άπειρα A_n .
Έστω $E_n \in \mathcal{M}$ για κάθε n.
(i) Αν $\sum_{n=1}^{+\infty} m(E_n) < +\infty$, αποδείξτε ότι $m(\overline{\lim}_{n\to+\infty} E_n) = 0$.
(Υπόδειξη: Για κάθε m ισχύει $\overline{\lim}_{n\to+\infty} E_n \subseteq \bigcup_{n=m}^{+\infty} E_n$.)
(ii) Αποδείξτε ότι $m(\underline{\lim}_{n\to+\infty} E_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} m(E_n)$.
(Υπόδειξη: Γράψτε $F_m = \bigcap_{n=m}^{+\infty} E_n$ και παρατηρήστε ότι $F_m \subseteq E_m$ και $F_m \subseteq F_{m+1}$ για κάθε m.)
(iii) Αν $m(\bigcup_{n=n_0}^{+\infty} E_n) < +\infty$ για έναν n_0 , αποδείξτε ότι $\overline{\lim}_{n\to+\infty} m(E_n) \leq m(\overline{\lim}_{n\to+\infty} E_n)$.
(Υπόδειξη: Γράψτε $F_m = \bigcup_{n=m}^{+\infty} E_n$ και παρατηρήστε ότι $E_m \subseteq F_m$ και $F_{m+1} \subseteq F_m$ για κάθε m.)

5. Αν $A \subseteq \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}$, $E \subseteq A$ και $m(E) < +\infty$, τότε αποδείξτε ότι $m^*(A \setminus E) = m^*(A) - m(E)$.
(Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον ορισμό του ότι $E \in \mathcal{M}$.)

6. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $E \in \mathcal{M}$. Αν $m^*(A \triangle E) = 0$, αποδείξτε ότι $A \in \mathcal{M}$.
(Υπόδειξη: Αποδείξτε πρώτα ότι $m^*(A \setminus E) = 0$, $m^*(E \setminus A) = 0$.)

7. Αναδιατυπώστε τα αποτελέσματα της άσκησης 4 της ενότητας 1.2 ως εξής.
Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $m^*(A) < +\infty$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq U$ και $m(U) < m^*(A) + \epsilon$.
Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$m^*(A) = \inf\{m(U) : A \subseteq U, U \text{ ανοικτό } \subseteq \mathbb{R}\}.$$

Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ υπάρχει $G \subseteq \mathbb{R}$ το οποίο είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών $\subseteq \mathbb{R}$ και, επομένως, $G \in \mathcal{M}$ ώστε $A \subseteq G$ και $m(G) = m^*(A)$.

8. Έστω $A_n \subseteq \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ με $A_n \subseteq A_{n+1}$ για κάθε n. Αποδείξτε ότι $m^*(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} m^*(A_n)$.
(Υπόδειξη: Σύμφωνα με την άσκηση 7, υπάρχει $G_n \in \mathcal{M}$ με $A_n \subseteq G_n$ και $m(G_n) = m^*(A_n)$. Θεωρήστε τα $F_n = G_1 \cup \cdots \cup G_n$ και αποδείξτε ότι $A \subseteq F_n \subseteq F_{n+1}$ και $m(F_n) = m^*(A_n)$.)

9. Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) \leq m^*(A) + m^*(B)$.
(Υπόδειξη: Βάσει της άσκησης 7, υπάρχουν $G, H \in \mathcal{M}$ με $A \subseteq G$, $B \subseteq H$ και $m(G) = m^*(A)$, $m(H) = m^*(B)$. Χρησιμοποιήστε την άσκηση 2.)

10. Έστω $E \subseteq [0,1]$ και $F = \{x^2 : x \in E\}$. Αν $m(E) = 0$, αποδείξτε ότι $m(F) = 0$.
(Υπόδειξη: Έστω $\epsilon > 0$ και ανοικτά διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ ώστε $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) < \epsilon$. Θεωρήστε τα διαστήματα ${I_n}' = I_n \cap [0,1]$, οπότε $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} {I_n}'$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} l({I_n}') < \epsilon$. Για κάθε ${I_n}'$ θεωρήστε το αντίστοιχο διάστημα J_n με άκρα τα τετράγωνα των άκρων του ${I_n}'$. Αποδείξτε ότι $F \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} J_n$, οπότε $m^*(F) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} l(J_n) < 2\epsilon$.)

11. Έστω $E \in \mathcal{M}$. Ορίζουμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = m\big(E \cap (-\infty, x]\big)$ και υποθέτουμε ότι το E είναι τέτοιο ώστε η f να μην είναι ταυτοτικά $+\infty$. Για παράδειγμα, το E θα μπορούσε να είναι κάτω φραγμένο. Αποδείξτε ότι
(i) η f είναι αύξουσα, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = m(E)$ και $f(x) < +\infty$ για κάθε x και
(ii) η f είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1, δηλαδή ισχύει $|f(x_2) - f(x_1)| \leq |x_2 - x_1|$ για κάθε x_1, x_2. Επομένως, η f είναι συνεχής.

12. Έστω $E \in \mathcal{M}$. Αποδείξτε ότι για κάθε y με $0 \leq y \leq m(E)$ υπάρχει $F \in \mathcal{M}$ με $F \subseteq E$ και $m(F) = y$.
(Υπόδειξη: Εφαρμόστε το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής στη συνάρτηση f της άσκησης 11.)

13. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $m^*(A) > 0$ και $0 < \lambda < 1$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ανοικτό διάστημα I ώστε $m^*(A \cap I) > \lambda l(I)$.
(Υπόδειξη: Κατ' αρχάς, έστω $0 < m^*(A) < +\infty$. Υπάρχουν ανοικτά διαστήματα I_n ($n \in \mathbb{N}$) έτσι ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) < \frac{1}{\lambda} m^*(A)$. Παρατηρήστε ότι $m^*(A) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} m^*(A \cap I_n)$. Άρα $m^*(A \cap I_n) > \lambda l(I_n)$ για έναν τουλάχιστον n. Τέλος, έστω $m^*(A) = +\infty$. Αποδείξτε ότι υπάρχει διάστημα J ώστε $0 < m^*(A \cap J) < +\infty$. Γράψτε $B = A \cap J$ και εφαρμόστε το αποτέλεσμα της πρώτης περίπτωσης στο B.)

14. Έστω $E \in \mathcal{M}$ και $0 < \delta < 1$ με την ιδιότητα: $m(E \cap I) > \delta l(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα I. Αποδείξτε ότι $m(E^c) = 0$.
(Υπόδειξη: Είναι $m(E^c \cap I) < (1-\delta) l(I)$ για κάθε ανοικτό διάστημα I. Υποθέστε $m(E^c) > 0$ και καταλήξτε σε άτοπο χρησιμοποιώντας την άσκηση 13.)

15. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Ένα $E \subseteq \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **μετρήσιμο κάλυμμα του** A αν $E \in \mathcal{M}$, $A \subseteq E$ και, δεν υπάρχει $F \subseteq E \setminus A$ με $F \in \mathcal{M}$ και $m(F) > 0$. Αποδείξτε ότι
(i) αν τα E_1, E_2 είναι μετρήσιμα καλύμματα του A, τότε $m(E_1 \triangle E_2) = 0$ και $m(E_1) = m(E_2)$,
(Υπόδειξη: Δείτε ότι $E_1 \setminus E_2 \subseteq E_1 \setminus A$ και $E_2 \setminus E_1 \subseteq E_2 \setminus A$.)
(ii) αν το E_1 είναι μετρήσιμο κάλυμμα του A, $E_2 \in \mathcal{M}$, $A \subseteq E_2$ και $m(E_1 \triangle E_2) = 0$, τότε το E_2 είναι μετρήσιμο κάλυμμα του A.
(iii) για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ υπάρχει μετρήσιμο κάλυμμα G του A με $m(G) = m^*(A)$.
(Υπόδειξη: Αν $m^*(A) < +\infty$, αποδείξτε ότι το G που εμφανίζεται στην άσκηση 7 είναι μετρήσιμο κάλυμμα του A. Έστω $m^*(A) = +\infty$. Πάρτε τα $I_n = [-n, n]$ και τα $A_n = A \cap I_n$, για τα οποία ισχύει $m^*(A_n) < +\infty$ και $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Θεωρήστε μετρήσιμο κάλυμμα G_n του A_n και το $G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$. Έστω $F \in \mathcal{M}$ και $F \subseteq G \setminus A$. Θεωρήστε τα $F_n = F \cap G_n$, οπότε $F = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ και $F_n \subseteq G_n \setminus A_n$.)

16. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Ορίζουμε το **εσωτερικό μέτρο** του A ως

$$m_*(A) = \sup\{m(F) : F \text{ κλειστό } \subseteq A\}.$$

Αποδείξτε ότι
(i) $m_*(A) \leq m^*(A)$,
(ii) $m_*(\emptyset) = 0$, $m_*(\mathbb{R}) = +\infty$ και
(iii) υπάρχει H το οποίο είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών $\subseteq \mathbb{R}$ και, επομένως, $H \in \mathcal{M}$ ώστε $H \subseteq A$ και $m(H) = m_*(A)$.
(Υπόδειξη: Πάρτε κλειστά $F_n \subseteq A$ ώστε $m(F_n) \to m_*(A)$.)

17. (Συνέχεια της 16.) Αν $A \in \mathcal{M}$, αποδείξτε ότι $m_*(A) = m^*(A) = m(A)$.
(Υπόδειξη: Το $m^*(A) = m(A)$ είναι προφανές. Έστω A φραγμένο και πάρτε ένα οποιοδήποτε κλειστό διάστημα $I \supseteq A$. Βάσει της άσκησης 7, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}$ ώστε $I \setminus A \subseteq U$ και $m(U) < m(I \setminus A) + \epsilon$. Τότε το $F = I \setminus U$ είναι κλειστό $\subseteq A$ και $m(F) > m(A) - \epsilon$. Άρα $m_*(A) = m(A)$. Τέλος, έστω μη φραγμένο A. Θεωρήστε τα φραγμένα $A_n = A \cap [-n, n]$ για τα οποία ισχύει $A_n \subseteq A_{n+1}$ και $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ και, επομένως, $m(A_n) \to m(A)$. Βάσει του πρώτου μέρος, υπάρχουν κλειστά $F_n \subseteq A_n$ ώστε $m(F_n) > m(A_n) - \frac{1}{n}$. Άρα $m(F_n) \to m(A)$ και, επομένως, $m_*(A) = m(A)$.)
Αν $m_*(A) = m^*(A) < +\infty$, αποδείξτε ότι $A \in \mathcal{M}$.
(Υπόδειξη: Βάσει των ασκήσεων 7 και 16, υπάρχουν $H, G \in \mathcal{M}$ ώστε $H \subseteq A \subseteq G$ και $m(H) = m_*(A)$, $m(G) = m^*(A)$, οπότε $m(H) = m(G) < +\infty$. Άρα $m(G \setminus H) = 0$ και, επειδή, $A \setminus H \subseteq G \setminus H$, ισχύει $(A \setminus H) \in \mathcal{M}$.)

18. Ένα $E \subseteq \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **μετρήσιμος πυρήνας του** A αν $E \in \mathcal{M}$, $E \subseteq A$ και δεν υπάρχει $F \subseteq A \setminus E$ με $F \in \mathcal{M}$ και $m(F) > 0$. Αποδείξτε ότι
(i) το E είναι μετρήσιμος πυρήνας του A αν και μόνο αν το E^c είναι μετρήσιμο κάλυμμα του A^c (δείτε την άσκηση 15),
(ii) αν τα E_1 και E_2 είναι μετρήσιμοι πυρήνες του A, τότε $m(E_1 \triangle E_2) = 0$ και $m(E_1) = m(E_2)$,
(iii) για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ υπάρχει μετρήσιμος πυρήνας H του A με $m(H) = m_*(A)$.
(Υπόδειξη: Έστω $m_*(A) < +\infty$. Αποδείξτε ότι το H που εμφανίζεται στην άσκηση 16 είναι μετρήσιμος πυρήνας του A. Γι αυτό πάρτε $F \subseteq A \setminus H$ με $F \in \mathcal{M}$ και υποθέστε ότι $m(F) > 0$. Βάσει της άσκησης 17, υπάρχει κλειστό $F' \subseteq F$ ώστε $m(F') > 0$. Θεωρήστε τα κλειστά F_n στην υπόδειξη της άσκησης 17 και τα κλειστά $F_n \cup F' \subseteq A$ και παρατηρήστε ότι $m(F_n \cup F') > m_*(A)$ για αρκετά μεγάλο n. Τέλος, έστω $m_*(A) = +\infty$. Θεωρήστε τα $A_n = A \cap [-n, n]$ για τα οποία ισχύει $m_*(A_n) < +\infty$ και $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Πάρτε μετρήσιμο πυρήνα H_n του A_n και αποδείξτε ότι το $H = \bigcup_{n=1}^{+\infty} H_n$ είναι μετρήσιμος πυρήνας του A με $m(H) = +\infty$.)

19. (Συνέχεια της 16.) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $E \in \mathcal{M}$ και $A \subseteq E$. Αποδείξτε ότι $m^*(A) + m_*(E \setminus A) = m(E)$.

20. Έστω σύνολο X. Αποδείξτε ότι οποιαδήποτε τομή σ-αλγεβρών υποσυνόλων του X είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X.

21. (Συνέχεια της 20.) Έστω $\mathcal{C}$ μια οποιαδήποτε οικογένεια υποσυνόλων του X. Συμβολίζουμε $\sigma(\mathcal{C})$ την τομή όλων των σ-αλγεβρών υποσυνόλων του X οι οποίες περιέχουν την $\mathcal{C}$. Αποδείξτε ότι η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X η οποία περιέχει την $\mathcal{C}$. Δηλαδή
(i) $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$,
(ii) η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X και
(Υπόδειξη: Δείτε την άσκηση 20.)
(iii) για κάθε $\mathcal{A}$ η οποία είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X με $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ συνεπάγεται $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$.
Αν η $\mathcal{C}$ είναι σ-άλγεβρα υποσυνόλων του X, αποδείξτε ότι $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.
Έστω $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ δυο οικογένειες υποσυνόλων του X. Αποδείξτε ότι $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2)$ αν και μόνο αν $\mathcal{C}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_2)$ και $\mathcal{C}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{C}_1)$.

22. (Συνέχεια της 21.) Συμβολίζουμε $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{U})$, όπου $\mathcal{U}$ είναι η οικογένεια όλων των ανοικτών $\subseteq \mathbb{R}$. Δηλαδή, η $\mathcal{B}$ είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ η οποία περιέχει όλα τα ανοικτά $\subseteq \mathbb{R}$. Η $\mathcal{B}$ ονομάζεται **Borel σ-άλγεβρα** (υποσυνόλων του $\mathbb{R}$) και τα στοιχεία της χαρακτηρίζονται ως **Borel σύνολα** (στο $\mathbb{R}$).
Αποδείξτε ότι κάθε ανοικτό, κάθε κλειστό, κάθε αριθμήσιμη τομή ανοικτών και κάθε αριθμήσιμη ένωση κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ είναι Borel σύνολο. Επίσης, κάθε διάστημα

είναι Borel σύνολο.
Αποδείξτε ότι $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$, δηλαδή κάθε Borel σύνολο είναι μετρήσιμο.
Αποδείξτε ότι $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{F})$ και $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{I})$, όπου $\mathcal{F}$ είναι η οικογένεια όλων των κλειστών $\subseteq \mathbb{R}$ και $\mathcal{I}$ είναι η οικογένεια όλων των διαστημάτων ή όλων των ανοικτών διαστημάτων ή όλων των κλειστών διαστημάτων.
(Υπόδειξη: Δείτε το τελευταίο μέρος της άσκησης 21.)

23. (Συνέχεια της 22.) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι $A \in \mathcal{M}$ αν και μόνο αν υπάρχει Borel σύνολο G ώστε $A \subseteq G$ και $m^*(G \setminus A) = 0$.
(Υπόδειξη: Το G που περιγράφεται στην άσκηση 15 είναι Borel σύνολο. Πιο συγκεκριμένα, αν $m^*(A) < +\infty$, τότε το G είναι αριθμήσιμη τομή ανοικτών και, αν $m^*(A) = +\infty$, τότε το G είναι αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων τομών ανοικτών. Τώρα, αν $A \in \mathcal{M}$, από τον ορισμό του μετρήσιμου καλύμματος συνεπάγεται $m(G \setminus A) = 0$. Αντιστρόφως, αν $m^*(G \setminus A) = 0$, τότε $(G \setminus A) \in \mathcal{M}$.)
Αποδείξτε ότι $A \in \mathcal{M}$ αν και μόνο αν υπάρχει Borel σύνολο H ώστε $H \subseteq A$ και $m^*(A \setminus H) = 0$.
(Υπόδειξη: Προκύπτει από το προηγούμενο, γράφοντας $A \setminus H = H^c \setminus A^c$.)
Έστω $m^*(A) < +\infty$. Αποδείξτε ότι $A \in \mathcal{M}$ αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει B το οποίο είναι πεπερασμένη ένωση διαστημάτων ώστε $m^*(A \triangle B) < \epsilon$.
(Υπόδειξη: Υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) < m^*(A) + \frac{\epsilon}{2}$. Επίσης, υπάρχει N ώστε $\sum_{n=N+1}^{+\infty} l(I_n) < \frac{\epsilon}{2}$. Αν $B = \bigcup_{n=1}^{N} I_n$, τότε $A \setminus B \subseteq \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} I_n$ και $B \setminus A \subseteq (\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n) \setminus A$. Τώρα, αν $A \in \mathcal{M}$, συνεπάγεται $m(A \setminus B) \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} l(I_n) < \frac{\epsilon}{2}$ και $m(B \setminus A) \leq m(\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n) - m(A) < \frac{\epsilon}{2}$ και, επομένως, $m(A \triangle B) < \epsilon$. Αντιστρόφως, έστω ότι για κάθε n υπάρχει B_n το οποίο είναι πεπερασμένη ένωση διαστημάτων και, επομένως, $B_n \in \mathcal{M}$ ώστε $m^*(A \triangle B_n) < \frac{1}{2^n}$. Γράφουμε $F = \bigcap_{m=1}^{+\infty} \big(\bigcup_{n=m}^{+\infty} B_n\big)$ και τότε $F \in \mathcal{M}$. Είναι $F \setminus A = \bigcap_{m=1}^{+\infty} \big(\bigcup_{n=m}^{+\infty} (B_n \setminus A)\big)$. Άρα για κάθε m ισχύει $F \setminus A \subseteq \bigcup_{n=m}^{+\infty} (B_n \setminus A)$, οπότε $m^*(F \setminus A) \leq \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{m-1}}$ και, επομένως, $m^*(F \setminus A) = 0$. Επίσης, $A \setminus F = \bigcup_{m=1}^{+\infty} \big(\bigcap_{n=m}^{+\infty} (A \setminus B_n)\big) = \bigcup_{m=M}^{+\infty} \big(\bigcap_{n=m}^{+\infty} (A \setminus B_n)\big) \subseteq \bigcup_{m=M}^{+\infty} (A \setminus B_m)$ για κάθε M. Άρα $m^*(A \setminus F) \leq \sum_{m=M}^{+\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{M-1}}$ για κάθε M, οπότε $m^*(A \setminus F) = 0$. Συμπεραίνουμε ότι $m^*(A \triangle F) = 0$ και, βάσει της άσκησης 6, ότι $A \in \mathcal{M}$.)

24. Αποδείξτε ότι τα στοιχεία του συνόλου του Cantor είναι ακριβώς όλοι οι αριθμοί στο $[0,1]$ οι οποίοι έχουν τριαδικό ανάπτυγμα από το οποίο λείπει τελείως το τριαδικό ψηφίο 1.

25. Έστω A το σύνολο των $x \in [0,1]$ από τη δεκαδική παράσταση των οποίων λείπει τελείως ένα συγκεκριμένο δεκαδικό ψηφίο - το 6 για παράδειγμα. Ακολουθήστε την επαγωγική διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor, χωρίζοντας κάθε φορά σε δέκα (αντί τρία) υποδιαστήματα, για να απεικονίσετε το σύνολο A στην πραγματική ευθεία και για να γράψετε το A ως $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$, όπου τα F_n είναι συγκεκριμένα κλειστά σύνολα. Τέλος, αποδείξτε ότι
(i) το A είναι κλειστό σύνολο και δεν περιέχει ανοικτά διαστήματα,
(ii) το A είναι υπεραριθμήσιμο και
(iii) $m(A) = 0$.

26. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor με τη διαφορά ότι στο n-οστό βήμα αφαιρούμε κεντρικό ανοικτό διάστημα μήκους $\frac{\theta}{3^n}$ από κάθε διάστημα που έχει απομείνει στο $(n-1)$-οστό βήμα. Ο θ είναι ένας προεπιλεγμένος αριθμός με $0 < \theta < 1$. Καταλήγουμε σε ένα σύνολο C_θ *τύπου Cantor*. (Το σύνολο του Cantor αντιστοιχεί στον $\theta = 1$.) Αποδείξτε ότι
(i) το C_θ είναι κλειστό σύνολο και δεν περιέχει ανοικτά διαστήματα,
(ii) το C_θ είναι υπεραριθμήσιμο και
(iii) $m(C_\theta) = 1 - \theta > 0$.

27. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι κατασκευής συνόλων *τύπου Cantor*. Ένας σχετικά απλός τρόπος είναι ο εξής.
Έστω αριθμός λ με $0 < \lambda < 1$. Ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$ (με $a < b$) γεννά δυο ισομήκη κλειστά υποδιαστήματά του απορρίπτοντας το ανοικτό υποδιάστημα του που είναι συμμετρικό ως προς το μέσο $\frac{a+b}{2}$ και έχει μήκος $\lambda(b-a)$. Προφανώς, τα δυο διαστήματα που γεννιούνται έχουν συνολικό μήκος $(1-\lambda)(b-a)$.
Θεωρούμε αριθμούς $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ με την ιδιότητα $0 < \lambda_n < 1$ για κάθε n. Παίρνουμε $F_0 = [0, 1]$. Το $[0, 1]$ γεννά δυο κλειστά διαστήματα με τη μέθοδο της προηγούμενης παραγράφου με $\lambda = \lambda_1$. Το F_1 είναι η ένωση των δυο αυτών κλειστών διαστημάτων. Κατόπιν, καθένα από τα δυο κλειστά διαστήματα που αποτελούν το F_1 γεννά δυο κλειστά διαστήματα με την ίδια μέθοδο με $\lambda = \lambda_2$. Το F_2 είναι η ένωση των τεσσάρων κλειστών διαστημάτων που μόλις γεννήθηκαν. Συνεχίζουμε τη διαδικασία επ' άπειρον. Καθένα από τα 2^{n-1} κλειστά διαστήματα που αποτελούν το F_{n-1} γεννά δυο κλειστά διαστήματα με την ίδια μέθοδο με $\lambda = \lambda_n$. Το F_n είναι η ένωση των 2^n κλειστών διαστημάτων που μόλις γεννήθηκαν. Τέλος, ορίζουμε το $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n$. (Το σύνολο του Cantor αντιστοιχεί σε $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \frac{1}{3}$.)
Η ακολουθία με n-οστό όρο $(1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_n) > 0$ είναι, προφανώς, γνησίως φθίνουσα και κάτω φραγμένη, οπότε συγκλίνει σε αριθμό ≥ 0. Αποδείξτε ότι $(1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_n) \to m(A)$.
Αποδείξτε ότι $m(A) > 0$ αν και μόνο αν $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n < +\infty$.
(Υπόδειξη: Έστω $m(A) > 0$. Από την ανισότητα $1 + x \leq e^x$ προκύπτει $m(A) \leq (1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_n) \leq e^{-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}$ και, επομένως, $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \leq \log\frac{1}{m(A)}$ για κάθε n. Άρα $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \leq \log\frac{1}{m(A)} < +\infty$. Αντιστρόφως, έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n < +\infty$. Υπάρχει n_0 ώστε $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \lambda_n < \frac{1}{2}$. Άρα $(1-\lambda_{n_0})\cdots(1-\lambda_n) \geq 1-(\lambda_{n_0}+\cdots+\lambda_n) > 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ για κάθε $n \geq n_0$, οπότε $m(A) \geq (1-\lambda_1)\cdots(1-\lambda_{n_0-1})\frac{1}{2} > 0$.)

1.4 Μέτρο Lebesgue και μεταφορές και ομοιοθεσίες.

Σ' αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του μέτρου σε σχέση με τις μεταφορές και τις ομοιοθεσίες του $\mathbb{R}$.

Ορισμός. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Ονομάζουμε **μεταφορά κατά** x_0 τη συνάρτηση $T_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$T_{x_0}(x) = x + x_0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το $T_{x_0}(x) = x + x_0$ το ονομάζουμε **μεταφορά του** x **κατά** x_0. Για $A \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζουμε **μεταφορά του** A **κατά** x_0 την εικόνα του A μέσω της T_{x_0}, δηλαδή το $T_{x_0}(A) = \{T_{x_0}(a) : a \in A\} = \{a + x_0 : a \in A\} \subseteq \mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε και $A + x_0$. Δηλαδή,

$$A + x_0 = \{a + x_0 : a \in A\}.$$

Φυσικά, γράφουμε $x - x_0$ αντί $x + (-x_0)$ και $A - x_0$ αντί $A + (-x_0)$. Επομένως, $A - x_0 = \{a - x_0 : a \in A\}$. Οι παρακάτω σχέσεις αποδεικνύονται πολύ εύκολα και θα τις χρησιμοποιήσουμε σε λίγο.

$$(A + x_0) - x_0 = A, \qquad \text{αν } A \subseteq B \text{ τότε } A + x_0 \subseteq B + x_0,$$

$$\left(\bigcup A\right) + x_0 = \bigcup(A + x_0), \quad \left(\bigcap A\right) + x_0 = \bigcap(A + x_0), \quad (A + x_0)^c = A^c + x_0.$$

Είναι προφανές ότι, για κάθε ανοικτό διάστημα $I = (a, b)$ και κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, το $I + x_0$ είναι το ανοικτό διάστημα $(a + x_0, b + x_0)$ και, φυσικά, ότι $l(I + x_0) = (b + x_0) - (a + x_0) = b - a = l(I)$.

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι η μεταφορά κατά x_0 κάθε ανοικτού διαστήματος I είναι ανοικτό διάστημα με μήκος ίσο με το μήκος του I.

Πρόταση 1.12. *Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει*

$$m^*(A + x_0) = m^*(A).$$

Επίσης, για κάθε $E \in \mathcal{M}$ συνεπάγεται $E + x_0 \in \mathcal{M}$ και

$$m(E + x_0) = m(E).$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι $m^*(A+x_0) \leq m^*(A)$. Αν $m^*(A) = +\infty$, η ανισότητα είναι προφανής. Έστω $m^*(A) < +\infty$. Θεωρούμε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) < m^*(A)+\epsilon$. Συνεπάγεται $A+x_0 \subseteq \big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n\big)+x_0 = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(I_n + x_0)$, οπότε

$$\begin{aligned} m^*(A + x_0) &\leq \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} m^*(I_n + x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n + x_0) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) < m^*(A) + \epsilon. \end{aligned}$$

Αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, οπότε $m^*(A+x_0) \leq m^*(A)$. Αφού αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ και κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$, την εφαρμόζουμε στο $A + x_0$ και στο $-x_0$ και βρίσκουμε $m^*(A) = m^*\big((A+x_0)-x_0\big) \leq m^*(A+x_0)$. Συνδυάζοντας με την αντίθετη ανισότητα συμπεραίνουμε ότι $m^*(A + x_0) = m^*(A)$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $A \subseteq \mathbb{R}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} & m^*\big(A \cap (E + x_0)\big) + m^*\big(A \cap (E + x_0)^c\big) \\ &\quad = m^*\big(\big((A - x_0) + x_0\big) \cap (E + x_0)\big) + m^*\big(\big((A - x_0) + x_0\big) \cap (E^c + x_0)\big) \\ &\quad = m^*\big(\big((A - x_0) \cap E\big) + x_0\big) + m^*\big(\big((A - x_0) \cap E^c\big) + x_0\big) \\ &\quad = m^*\big((A - x_0) \cap E\big) + m^*\big((A - x_0) \cap E^c\big) \\ &\quad = m^*(A - x_0) = m^*(A), \end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ισότητα ισχύει διότι $E \in \mathcal{M}$. Άρα $E + x_0 \in \mathcal{M}$.
Τέλος, επειδή $E \in \mathcal{M}$ και $E + x_0 \in \mathcal{M}$, συνεπάγεται $m(E + x_0) = m^*(E + x_0) = m^*(E) = m(E)$. □

Η Πρόταση 1.12 λέει ότι, *αν μεταφέρουμε ένα μετρήσιμο σύνολο, τότε το σύνολο στην νέα του θέση είναι και πάλι μετρήσιμο και το μέτρο του παραμένει αμετάβλητο*.

Θα δούμε, τώρα, τι γίνεται αν εφαρμόσουμε ομοιοθεσίες σε μετρήσιμα σύνολα.

Ορισμός. Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Ονομάζουμε **ομοιοθεσία κατά** λ τη συνάρτηση $H_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$H_\lambda(x) = \lambda x$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το $H_\lambda(x) = \lambda x$ το ονομάζουμε **ομοιόθετο του** x **κατά** λ. Για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ ονομάζουμε **ομοιόθετο του** A **κατά** λ την εικόνα του A μέσω της H_λ, δηλαδή το σύνολο $H_\lambda(A) = \{H_\lambda(a) : a \in A\} = \{\lambda a : a \in A\} \subseteq \mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό το συμβολίζουμε και λA. Δηλαδή,

$$\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

Έχουμε τις παρακάτω σχέσεις για $\lambda \neq 0$.

$$\tfrac{1}{\lambda}(\lambda A) = A, \qquad \text{αν } A \subseteq B \text{ τότε } \lambda A \subseteq \lambda B,$$

$$\lambda(\textstyle\bigcup A) = \bigcup(\lambda A), \quad \lambda(\bigcap A) = \bigcap(\lambda A), \quad (\lambda A)^c = \lambda A^c.$$

Έστω οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα $I = (a, b)$. Είναι φανερό ότι, αν $\lambda > 0$, τότε $\lambda I = (\lambda a, \lambda b)$ και, επομένως, $l(\lambda I) = \lambda b - \lambda a = \lambda(b - a) = \lambda l(I)$. Ομοίως, αν $\lambda < 0$, τότε $\lambda I = (\lambda b, \lambda a)$ και, επομένως, $l(\lambda I) = \lambda a - \lambda b = \lambda(a - b) = -\lambda l(I)$. Και στις δυο περιπτώσεις ισχύει $l(\lambda I) = |\lambda| l(I)$.

Άρα το ομοιόθετο ενός ανοικτού διαστήματος I κατά $\lambda \neq 0$ είναι ένα ανοικτό διάστημα με μήκος ίσο με $|\lambda|$ φορές το μήκος του I.

Πρόταση 1.13. *Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Τότε για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει*

$$m^*(\lambda A) = |\lambda| m^*(A).$$

Επίσης, για κάθε $E \in \mathcal{M}$ συνεπάγεται $\lambda E \in \mathcal{M}$ και

$$m(\lambda E) = |\lambda| m(E).$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε πρώτα ότι $m^*(\lambda A) \leq |\lambda| m^*(A)$. Αν $m^*(A) = +\infty$, η ανισότητα είναι προφανής. Έστω $m^*(A) < +\infty$. Παίρνουμε οποιονδήποτε $\epsilon > 0$, οπότε υπάρχουν ανοικτά διαστήματα $I_1, I_2, \ldots$ ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$ και $\sum_{n=1}^{+\infty} l(I_n) < m^*(A) + \frac{\epsilon}{|\lambda|}$. Συνεπάγεται $\lambda A \subseteq \lambda\big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n\big) = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(\lambda I_n)$, οπότε

$$\begin{aligned} m^*(\lambda A) &\leq \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} m^*(\lambda I_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} l(\lambda I_n) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda| l(I_n) < |\lambda| m^*(A) + \epsilon. \end{aligned}$$

Επειδή αυτό ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$, συνεπάγεται $m^*(\lambda A) \leq |\lambda| m^*(A)$. Αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}$ και κάθε $\lambda \neq 0$, οπότε την εφαρμόζουμε στο λA και στο $\frac{1}{\lambda}$ και βρίσκουμε $m^*(A) = m^*\big(\frac{1}{\lambda}(\lambda A)\big) \leq \frac{1}{|\lambda|} m^*(\lambda A)$, οπότε $|\lambda| m^*(A) \leq m^*(\lambda A)$. Συνδυάζοντας με την αντίθετη ανισότητα συμπεραίνουμε ότι $m^*(\lambda A) = |\lambda| m^*(A)$.
Παίρνουμε οποιοδήποτε $A \subseteq \mathbb{R}$ και έχουμε

$$\begin{aligned} m^*\big(A \cap (\lambda E)\big) + m^*\big(A \cap (\lambda E)^c\big) &= m^*\big(\big(\lambda(\tfrac{1}{\lambda}A)\big) \cap (\lambda E)\big) + m^*\big(\big(\lambda(\tfrac{1}{\lambda}A)\big) \cap (\lambda E^c)\big) \\ &= m^*\big(\lambda(\tfrac{1}{\lambda}A \cap E)\big) + m^*\big(\lambda(\tfrac{1}{\lambda}A \cap E^c)\big) \\ &= |\lambda| m^*\big(\tfrac{1}{\lambda}A \cap E\big) + |\lambda| m^*\big(\tfrac{1}{\lambda}A \cap E^c\big) \\ &= |\lambda| m^*(\tfrac{1}{\lambda}A) = m^*(A), \end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ισότητα ισχύει διότι $E \in \mathcal{M}$. Άρα $\lambda E \in \mathcal{M}$.
Τέλος, επειδή $E \in \mathcal{M}$ και $\lambda E \in \mathcal{M}$, συνεπάγεται $m(\lambda E) = m^*(\lambda E) = |\lambda| m^*(E) = |\lambda| m(E)$. □

Ασκήσεις.

1. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$. Ορίζουμε το **σύνολο διαφορών του** E ως εξής:

   $$E - E = \{x' - x'' : x', x'' \in E\}.$$

   Αποδείξτε ότι, αν $E \in \mathcal{M}$ και $m(E) > 0$, τότε το $E - E$ περιέχει κάποιο ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το 0.
   (Υπόδειξη: Έστω $0 < \delta < 1$ και $\lambda = \frac{1+\delta}{2}$, οπότε είναι $0 < \lambda < 1$. Σύμφωνα με την άσκηση 13 της ενότητας 1.3, υπάρχει ανοικτό διάστημα I ώστε $m(E \cap I) > \lambda l(I)$. Θεωρήστε ένα ανοικτό διάστημα I_0 κέντρου 0 και μήκους $l(I_0) = \delta l(I)$. Αποδείξτε ότι $I_0 \subseteq (E \cap I) - (E \cap I) \subseteq E - E$. Αν αυτό δεν ισχύει, υπάρχει $x \in I_0$ ώστε $x \notin (E \cap I) - (E \cap I)$, οπότε $\big((E \cap I) + x\big) \cap (E \cap I) = \emptyset$. Τα $(E \cap I) + x$, $E \cap I$ περιέχονται σε διάστημα J ίδιου κέντρου με το I και μήκους $l(J) = (1+\delta) l(I)$. Άρα $(1+\delta) l(I) = l(J) \geq m\big((E \cap I) + x\big) + m(E \cap I) = 2m(E \cap I) > 2\lambda l(I)$.)

1.5 Μη μετρησιμότητα.

Πρόταση 1.14. *Υπάρχει υποσύνολο N του $[0, 1]$ με τις εξής δυο ιδιότητες:*
(i) για κάθε $x, y \in N$, $x \neq y$ ο αριθμός $x - y$ είναι άρρητος.
(ii) για κάθε $z \in [0, 1]$ υπάρχει $x \in N$ ώστε ο $z - x$ να είναι ρητός.

Απόδειξη. Θεωρούμε την εξής σχέση στο σύνολο $[0,1]$:

$$x \sim y \qquad \text{αν και μόνο αν} \qquad \text{ο } x-y \text{ είναι ρητός.}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η σχέση αυτή είναι *σχέση ισοδυναμίας* στο $[0,1]$. Πράγματι για κάθε $x \in [0,1]$ ο $x - x = 0$ είναι ρητός, οπότε $x \sim x$. Κατόπιν, αν $x \sim y$, τότε ο $x - y$ είναι ρητός, οπότε ο $y - x = -(x-y)$ είναι ρητός και, επομένως, $y \sim x$. Τέλος, αν $x \sim y$ και $y \sim z$, τότε οι $x - y$ και $y - z$ είναι ρητοί, οπότε ο $x - z = (x-y) + (y-z)$ είναι ρητός και, επομένως, $x \sim z$.
Για κάθε $x \in [0,1]$ θεωρούμε την *κλάση ισοδυναμίας* του x, δηλαδή το υποσύνολο $[x]_\sim = \{y \in [0,1] : y \sim x\}$ του $[0,1]$. Επειδή $x \sim x$, συνεπάγεται $x \in [x]_\sim$. Άρα κάθε στοιχείο του $[0,1]$ ανήκει σε κάποια από τις κλάσεις ισοδυναμίας και, επομένως,
• *το $[0,1]$ είναι ίσο με την ένωση όλων των κλάσεων ισοδυναμίας.*
Κατόπιν, παρατηρούμε ότι
• *δυο οποιεσδήποτε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας είναι ξένες.*
Πράγματι, έστω ότι οι $[x]_\sim$ και $[y]_\sim$ δεν είναι ξένες, δηλαδή ότι υπάρχει $z \in [x]_\sim \cap [y]_\sim$. Θα αποδείξουμε ότι οι $[x]_\sim$ και $[y]_\sim$ είναι ίδιες. Είναι $z \sim x$ και $z \sim y$, οπότε $x \sim z$ και $z \sim y$ και, επομένως, $x \sim y$. Τώρα, αν $w \in [x]_\sim$, συνεπάγεται $w \sim x$, οπότε $w \sim y$ και, επομένως, $w \in [y]_\sim$. Άρα $[x]_\sim \subseteq [y]_\sim$. Με συμμετρικό τρόπο αποδεικνύεται ότι $[y]_\sim \subseteq [x]_\sim$ και καταλήγουμε στο ότι $[x]_\sim = [y]_\sim$.
Συνδυάζοντας τα δυο προηγούμενα αποτελέσματα για τις κλάσεις ισοδυναμίας, συμπεραίνουμε ότι το $[0,1]$ χωρίζεται ολόκληρο σε ξένα ανά δύο σύνολα: τις διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας.
Ορίζουμε, τέλος, ένα σύνολο N παίρνοντας ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε μια από τις παραπάνω ξένες ανά δύο κλάσεις ισοδυναμίας. (Μετά την απόδειξη δείτε το σχόλιο παρακάτω.) Θα ελέγξουμε ότι το N έχει τις ιδιότητες (i) και (ii).
(i) Αν $x, y \in N$, $x \neq y$, τότε οι x, y ανήκουν σε διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας, οπότε η σχέση $x \sim y$ δεν ισχύει και, επομένως, ο $x - y$ είναι άρρητος. Διότι, αν ίσχυε η $x \sim y$, τότε $x \in [y]_\sim$ και, επειδή, προφανώς, $y \in [y]_\sim$, συνεπάγεται ότι οι x, y ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας.
(ii) Έστω $z \in [0,1]$. Επειδή το N έχει ένα στοιχείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας, υπάρχει κάποιος $x \in N$ ο οποίος περιέχεται στην $[z]_\sim$. Συνεπάγεται $x \sim z$, δηλαδή $z \sim x$, οπότε ο $z - x$ είναι ρητός. □

Σχόλιο. Στην απόδειξη της Πρότασης 1.14 χρησιμοποιήθηκε το **Αξίωμα Επιλογής** από τη Θεωρία Συνόλων: *Αν έχουμε μια οικογένεια συνόλων, τότε μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο παίρνοντας ως στοιχεία του ακριβώς ένα στοιχείο από κάθε σύνολο που ανήκει στην οικογένεια αυτή.*

Πρόταση 1.15. *Το σύνολο N της Πρότασης 1.14 δεν είναι μετρήσιμο.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε - για να καταλήξουμε σε άτοπο - ότι το N είναι μετρήσιμο.
Θεωρούμε μια οποιαδήποτε αρίθμηση $r_1, r_2, \ldots$ του συνόλου των ρητών στο διάστημα $[-1,1]$, δηλαδή του συνόλου $\mathbb{Q} \cap [-1,1]$. Κατόπιν, για κάθε τέτοιο ρητό r_n θεωρούμε τη *μεταφορά* του N κατά r_n, δηλαδή το $N + r_n = \{x + r_n : x \in N\}$.
Παρατηρούμε ότι
(a) $N + r_n \subseteq [-1,2]$ για κάθε n, οπότε $(N + r_1) \cup (N + r_2) \cup \cdots \subseteq [-1,2]$.
(b) Τα σύνολα $N + r_n$ $(n \in \mathbb{N})$ είναι ξένα ανά δύο.
(c) $[0,1] \subseteq (N + r_1) \cup (N + r_2) \cup \cdots$.
Η ιδιότητα (a) ισχύει διότι για κάθε $x \in N$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ είναι $x + r_n \leq 1 + 1 = 2$ και $x + r_n \geq 0 + (-1) = -1$. Για την (b) ας υποθέσουμε ότι για κάποιους $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$ τα σύνολα $N + r_n$ και $N + r_m$ έχουν κοινό στοιχείο. Αυτό το στοιχείο θα είναι της μορφής $x + r_n$ για κάποιον $x \in N$ και της μορφής $y + r_m$ για κάποιον $y \in N$. Τότε $x + r_n = y + r_m$, οπότε ο $x - y = r_m - r_n$ είναι ρητός $\neq 0$ και αυτό αντιφάσκει με την ιδιότητα (i) του N. Για την (c) θεωρούμε $z \in [0,1]$. Από την ιδιότητα (ii) του N συνεπάγεται ότι υπάρχει $x \in N$ ώστε ο $z - x$ να είναι ρητός. Όμως, $z - x \leq 1 - 0 = 1$ και $z - x \geq 0 - 1 = -1$. Άρα ο ρητός $z - x$ ανήκει στο $[-1,1]$ και, επομένως, είναι ένας από τους ρητούς που έχουμε αριθμήσει. Δηλαδή, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$

ώστε $z - x = r_n$ ή, ισοδύναμα, $z = x + r_n$. Άρα ο z ανήκει στο $N + r_n$, οπότε ανήκει στην ένωση $(N + r_1) \cup (N + r_2) \cup \cdots$.
Ισχύει $m(N + r_n) = m(N)$ για κάθε n. Επίσης, από την (b) συνεπάγεται

$$m\big((N + r_1) \cup (N + r_2) \cup \cdots\big) = m(N + r_1) + m(N + r_2) + \cdots = m(N) + m(N) + \cdots .$$

Τώρα, από την (a) συνεπάγεται

$$m\big((N + r_1) \cup (N + r_2) \cup \cdots\big) \le m([-1, 2]) = 3.$$

Επίσης, από την (c) συνεπάγεται

$$1 = m([0, 1]) \le m\big((N + r_1) \cup (N + r_2) \cup \cdots\big).$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα, βρίσκουμε

$$1 \le m(N) + m(N) + \cdots \le 3.$$

Όμως, όταν προσθέτουμε τον *ίδιο* μη αρνητικό αριθμό *άπειρες* φορές το αποτέλεσμα είναι είτε 0 είτε $+\infty$, ανάλογα με το αν ο αριθμός είναι 0 ή θετικός, αντιστοίχως. Άρα η τελευταία διπλή ανισότητα σημαίνει ότι καταλήξαμε σε άτοπο. $\square$

Ασκήσεις.

1. Έστω N ένα οποιοδήποτε σύνολο με τις ιδιότητες (i) και (ii) της Πρότασης 1.14. Είναι δυνατό να υπάρχουν, για τον ίδιο $z \in [0, 1]$, δυο διαφορετικοί $x \in N$ ώστε ο $z - x$ να είναι ρητός;
Μπορεί ένα σύνολο N με τις ιδιότητες (i) και (ii) της Πρότασης 1.14 να είναι αριθμήσιμο; (Υπόδειξη: Υποθέστε ότι είναι δυνατό, θεωρήστε μια αρίθμηση του N και, βάσει του (ii) και του πρώτου μέρους της άσκησης, βρείτε μια αρίθμηση του $[0, 1]$.)

2. Αποδείξτε ότι υπάρχει $N \subseteq \mathbb{R}$ με τις εξής δυο ιδιότητες:
(i) για κάθε $x, y \in N$, $x \ne y$ ο αριθμός $x - y$ είναι άρρητος.
(ii) για κάθε $z \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in N$ ώστε ο $z - x$ να είναι ρητός.
(Υπόδειξη: Μιμηθείτε την κατασκευή του N που κάναμε χωρίς να περιοριστείτε στο $[0, 1]$.)

Κεφάλαιο 2

Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις.

2.1 Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις.

Ορισμός. Έστω μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}$, δηλαδή $A \in \mathcal{M}$, και $f : A \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Η f χαρακτηρίζεται **Lebesgue μετρήσιμη** ή, πιο απλά, **μετρήσιμη** αν

$$\{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Το $\{x \in A : f(x) > a\}$ γράφεται και $\{x \in A : f(x) \in (a, +\infty]\} = f^{-1}\big((a, +\infty]\big)$. Θα χρησιμοποιούμε συχνά τον γνωστό συμβολισμό $f^{-1}(K) = \{x \in A : f(x) \in K\}$ και ειδικά σε σχέση με ανισότητες ή ισότητες που ικανοποιούν οι τιμές μιας συνάρτησης.

Παραδείγματα. (1) $\{x \in A : f(x) \geq a\} = f^{-1}\big([a, +\infty]\big)$.
(2) $\{x \in A : f(x) < a\} = f^{-1}\big([-\infty, a)\big)$.
(3) $\{x \in A : a < f(x) \leq b\} = f^{-1}\big((a, b]\big)$.
(4) $\{x \in A : f(x) = a\} = f^{-1}\big([a, a]\big) = f^{-1}\big(\{a\}\big)$.
(5) $\{x \in A : f(x) = -\infty\} = f^{-1}\big([-\infty, -\infty]\big) = f^{-1}\big(\{-\infty\}\big)$.
(6) $\{x \in A : a \leq f(x) \leq b$ ή $c < f(x)\} = f^{-1}\big([a, b] \cup (c, +\infty]\big)$.

Θα χρησιμοποιούμε, επίσης, συχνά τις γνωστές σχέσεις

$$f^{-1}(\bigcup K) = \bigcup f^{-1}(K), \quad f^{-1}(\bigcap K) = \bigcap f^{-1}(K),$$

$$f^{-1}(K \setminus L) = f^{-1}(K) \setminus f^{-1}(L), \quad f^{-1}(K^c) = A \setminus f^{-1}(K).$$

Λήμμα 2.1. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$.*
(1) Αν $K, L \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ και $f^{-1}(K), f^{-1}(L) \in \mathcal{M}$, τότε $f^{-1}(K^c), f^{-1}(K \setminus L) \in \mathcal{M}$.
(2) Αν $K_n \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ και $f^{-1}(K_n) \in \mathcal{M}$ για κάθε n, τότε $f^{-1}\big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n\big) \in \mathcal{M}$ και $f^{-1}\big(\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n\big) \in \mathcal{M}$.

Απόδειξη. (1) $f^{-1}(K^c) = A \setminus f^{-1}(K) \in \mathcal{M}$, διότι $A \in \mathcal{M}$ και $f^{-1}(K) \in \mathcal{M}$. Ομοίως, $f^{-1}(K \setminus L) = f^{-1}(K) \setminus f^{-1}(L) \in \mathcal{M}$, διότι $f^{-1}(K) \in \mathcal{M}$ και $f^{-1}(L) \in \mathcal{M}$.
(2) $f^{-1}\big(\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n\big) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(K_n) \in \mathcal{M}$, διότι $f^{-1}(K_n) \in \mathcal{M}$ για κάθε n. Ομοίως $f^{-1}\big(\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n\big) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} f^{-1}(K_n) \in \mathcal{M}$. □

Ορισμός. Έχουμε χαρακτηρίσει *διάστημα* στο $\mathbb{R}$ κάθε $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ και (a, b). Θα χαρακτηρίζουμε **γενικευμένα διαστήματα** στο $\mathbb{R}$ όλα τα προηγούμενα καθώς και τα $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, b)$ και $(-\infty, +\infty)$. Τέλος, θα χαρακτηρίζουμε **γενικευμένα διαστήματα** στο $\overline{\mathbb{R}}$ όλα τα προηγούμενα καθώς και τα $[a, +\infty]$, $(a, +\infty]$, $[-\infty, b]$, $[-\infty, b)$, $(-\infty, +\infty]$, $[-\infty, +\infty)$, $[-\infty, +\infty]$, $[-\infty, -\infty]$, και $[+\infty, +\infty]$.

Πρόταση 2.1. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε $f^{-1}(K) = \{x \in A : f(x) \in K\} \in \mathcal{M}$ για κάθε K το οποίο είναι είτε γενικευμένο διάστημα είτε αριθμήσιμη ένωση γενικευμένων διαστημάτων στο $\overline{\mathbb{R}}$ είτε ανοικτό είτε κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$ είτε αριθμήσιμη τομή ανοικτών είτε αριθμήσιμη ένωση κλειστών $\subseteq \mathbb{R}$.*

Απόδειξη. Ισχύει $[a, +\infty] = \bigcap_{n=1}^{+\infty}(a - \frac{1}{n}, +\infty]$ και $[-\infty, b] = (b, +\infty]^c$. Από τον ορισμό και το Λήμμα 2.1 συνεπάγεται $f^{-1}\big([a, +\infty]\big) \in \mathcal{M}$ και $f^{-1}\big([-\infty, b]\big) \in \mathcal{M}$. Επίσης, $[a, b] = [-\infty, b] \cap [a, +\infty]$, οπότε πάλι από το Λήμμα 2.1 συνεπάγεται $f^{-1}\big([a, b]\big) \in \mathcal{M}$.
Τώρα, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι κάθε άλλο γενικευμένο διάστημα K στο $\overline{\mathbb{R}}$, εκτός των $\{-\infty\}$, $\{+\infty\}$, είναι αριθμήσιμη ένωση διαστημάτων τύπου $[a, b]$, $[-\infty, b]$ και $[a, +\infty]$. Ειδικά τα $K = \{-\infty\}$, $K = \{+\infty\}$ είναι αριθμήσιμες τομές διαστημάτων τύπου $[-\infty, b]$, το πρώτο, και $[a, +\infty]$, το δεύτερο. Άρα από το Λήμμα 2.1 συνεπάγεται $f^{-1}(K) \in \mathcal{M}$ για κάθε γενικευμένο διάστημα K στο $\overline{\mathbb{R}}$.
Αν $K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$ και κάθε K_n είναι γενικευμένο διάστημα στο $\overline{\mathbb{R}}$, τότε από τα προηγούμενα και το Λήμμα 2.1 συνεπάγεται $f^{-1}(K) \in \mathcal{M}$.
Αν το K είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$, έχουμε αποδείξει ότι υπάρχουν διαστήματα K_n στο $\mathbb{R}$ ώστε $K = \bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$. Άρα $f^{-1}(K) \in \mathcal{M}$. Τέλος, αν το K είναι κλειστό $\subseteq \mathbb{R}$, τότε το $U = K^c$ είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$, οπότε $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}$. Επειδή $K = U^c$, συνεπάγεται $f^{-1}(K) \in \mathcal{M}$. □

Θα δούμε τώρα τρία σημαντικά παραδείγματα.

Παραδείγματα. (1) Έστω $A \in \mathcal{M}$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ η οποία είναι σταθερή στο A. Δηλαδή, υπάρχει $c \in \overline{\mathbb{R}}$ ώστε $f(x) = c$ για κάθε $x \in A$. Τότε η f είναι μετρήσιμη.
Πράγματι, έστω $c \in \mathbb{R}$. Τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\{x \in A : f(x) > a\} = \begin{cases} A, & \text{αν } a < c \\ \emptyset, & \text{αν } a \geq c \end{cases}$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση, $\{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$, οπότε η f είναι μετρήσιμη.
Έστω $c = +\infty$. Τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\{x \in A : f(x) > a\} = A \in \mathcal{M}$, οπότε η f είναι μετρήσιμη.
Έστω $c = -\infty$. Τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\{x \in A : f(x) > a\} = \emptyset \in \mathcal{M}$, οπότε η f είναι μετρήσιμη.
(2) Έστω $A \in \mathcal{M}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ συνεχής στο A. Τότε η f είναι μετρήσιμη.
Πράγματι, έστω $a \in \mathbb{R}$. Θα αποδείξουμε ότι $f^{-1}\big((a, +\infty]\big) = \{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$.
Θεωρούμε οποιοδήποτε $x \in f^{-1}\big((a, +\infty]\big)$, δηλαδή $x \in A$ με $f(x) > a$. Επειδή η f είναι συνεχής στο x, για κάθε $\epsilon > 0$ και, επομένως, και για $\epsilon = f(x) - a > 0$ υπάρχει $\delta_x > 0$ ώστε για κάθε $y \in A$ με $|y - x| < \delta_x$ να ισχύει $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Δηλαδή, για κάθε $y \in A \cap (x - \delta_x, x + \delta_x)$ ισχύει $f(y) > f(x) - \epsilon = a$. Άρα $A \cap (x - \delta_x, x + \delta_x) \subseteq f^{-1}\big((a, +\infty]\big)$.
Ορίζουμε το $U = \bigcup_{x \in f^{-1}((a,+\infty])}(x - \delta_x, x + \delta_x)$. Το U είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$ ως ένωση ανοικτών διαστημάτων. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, φαίνεται εύκολα ότι $f^{-1}\big((a, +\infty]\big) = A \cap U$. Επειδή $A \in \mathcal{M}$ και $U \in \mathcal{M}$, συνεπάγεται $f^{-1}\big((a, +\infty]\big) \in \mathcal{M}$.
(3) Θεωρούμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός. Έστω $B \subseteq A$. Η συνάρτηση $\chi_B : A \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in B \\ 0, & \text{αν } x \in A \setminus B \end{cases}$$

ονομάζεται **χαρακτηριστική συνάρτηση του** B (στο A).

Υποθέτουμε ότι $A \in \mathcal{M}$ και θα αποδείξουμε ότι η χ_B είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $B \in \mathcal{M}$. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι $B = \{x \in A : \chi_B(x) > \frac{1}{2}\}$. Άρα, αν η χ_B είναι μετρήσιμη, τότε

$B \in \mathcal{M}$. Αντιστρόφως, έστω ότι $B \in \mathcal{M}$. Τότε για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\{x \in A : \chi_B(x) > a\} = \begin{cases} A, & \text{αν } a < 0 \\ B, & \text{αν } 0 \leq a < 1 \\ \emptyset, & \text{αν } a \geq 1 \end{cases}$$

Σε κάθε περίπτωση, $\{x \in A : \chi_B(x) > a\} \in \mathcal{M}$. Άρα η χ_B είναι μετρήσιμη.

Ορισμός. Αν $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ και $B \subseteq A$, τότε η συνάρτηση $f\big|_B : B \to \overline{\mathbb{R}}$ με τύπο

$$f\big|_B(x) = f(x)$$

για κάθε $x \in B$ ονομάζεται **περιορισμός της** f **στο** B.

Πρόταση 2.2. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Αν $B \subseteq A$ και $B \in \mathcal{M}$ τότε η $f\big|_B$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\{x \in B : f\big|_B(x) > a\} = \{x \in B : f(x) > a\} = \{x \in A : f(x) > a\} \cap B.$$

Ισχύει $\{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$ και $B \in \mathcal{M}$, οπότε $\{x \in B : f\big|_B(x) > a\} \in \mathcal{M}$ και, επομένως, η $f\big|_B$ είναι μετρήσιμη. □

Πρόταση 2.3. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Έστω, επίσης, $A_n \in \mathcal{M}$ $(n \in \mathbb{N})$ ώστε τα A_n να είναι ανά δύο ξένα και $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A$. Αν για κάθε n η $f\big|_{A_n} : A_n \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη, τότε και η $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ είναι

$$\{x \in A : f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\{x \in A_n : f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\{x \in A_n : f\big|_{A_n}(x) > a\}.$$

Κάθε $f\big|_{A_n}$ είναι μετρήσιμη, οπότε $\{x \in A_n : f\big|_{A_n}(x) > a\} \in \mathcal{M}$ για κάθε n, οπότε $\{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$. Άρα η f είναι μετρήσιμη. □

Σχόλιο. Η Πρόταση 2.2 λέει ότι, αν μια μετρήσιμη συνάρτηση περιοριστεί σε μικρότερο μετρήσιμο πεδίο ορισμού, τότε η συνάρτηση που προκύπτει είναι κι αυτή μετρήσιμη. Η Πρόταση 2.3 λέει ότι, αν συγκολλήσουμε αριθμήσιμου πλήθους μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε η συνάρτηση που προκύπτει είναι μετρήσιμη.
Με αυτές τις δυο μεθόδους μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα μεγάλο απόθεμα μετρήσιμων συναρτήσεων. Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση στον $\mathbb{R}$ και πάρουμε τον περιορισμό της σε οποιοδήποτε διάστημα στον $\mathbb{R}$, τότε αυτός ο περιορισμός είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το συγκεκριμένο διάστημα. Κατόπιν, αν θεωρήσουμε αριθμήσιμου πλήθους τέτοιες συναρτήσεις, δηλαδή περιορισμούς συνεχών συναρτήσεων σε αριθμήσιμου πλήθους διαστήματα τα οποία είναι ξένα ανά δύο και αν συγκολλήσουμε αυτές τις συναρτήσεις, τότε προκύπτει συνάρτηση που, όπως είναι γνωστό, την χαρακτηρίζουμε **κατά τμήματα συνεχή**. Άρα, *κάθε κατά τμήματα συνεχής συνάρτηση είναι μετρήσιμη*. Μπορούμε, πιο γενικά, να συγκολλήσουμε αριθμήσιμου πλήθους συνεχείς συναρτήσεις αφού πρώτα τις περιορίσουμε σε ξένα ανά δύο μετρήσιμα σύνολα. Η συνάρτηση που προκύπτει είναι κι αυτή μετρήσιμη.

Ορισμός. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\lambda f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ με τύπο

$$(\lambda f)(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \lambda = 0 \text{ και } f(x) = \pm\infty \\ \lambda f(x), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Πρόταση 2.4. *Έστω $A \in \mathcal{M}$, μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε η $\lambda f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda = 0$. Τότε η λf είναι σταθερή 0 στο A, οπότε είναι μετρήσιμη.
Έστω $\lambda > 0$. Τότε, για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in A : (\lambda f)(x) > a\} = \{x \in A : \lambda f(x) > a\} = \left\{x \in A : f(x) > \tfrac{a}{\lambda}\right\} \in \mathcal{M}.$$

Άρα η λf είναι μετρήσιμη.
Έστω $\lambda < 0$. Τότε, για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$\{x \in A : (\lambda f)(x) > a\} = \{x \in A : \lambda f(x) > a\} = \left\{x \in A : f(x) < \tfrac{a}{\lambda}\right\} \in \mathcal{M}.$$

Άρα η λf είναι μετρήσιμη. □

Ορισμός. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f + g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ με τύπο

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } f(x) = \pm\infty \text{ και } g(x) = \mp\infty \\ f(x) + g(x), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Πρόταση 2.5. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμες $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε η $f + g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Χωρίζουμε το A στα εξής τέσσερα υποσύνολά του.

$$\begin{aligned}
B &= \{x \in A : -\infty < f(x) < +\infty, -\infty < g(x) < +\infty\},\\
C &= \{x \in A : f(x) = +\infty, g(x) > -\infty\} \cup \{x \in A : g(x) = +\infty, f(x) > -\infty\},\\
D &= \{x \in A : f(x) = -\infty, g(x) < +\infty\} \cup \{x \in A : g(x) = -\infty, f(x) < +\infty\},\\
E &= \{x \in A : f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\} \cup \{x \in A : f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\}.
\end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα B, C, D, E είναι ανά δύο ξένα καθώς και ότι $B \cup C \cup D \cup E = A$. Επίσης, τα τέσσερα σύνολα είναι μετρήσιμα. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
B &= f^{-1}\big((-\infty, +\infty)\big) \cap g^{-1}\big((-\infty, +\infty)\big) \in \mathcal{M},\\
C &= \big(f^{-1}(\{+\infty\}) \cap g^{-1}((-\infty, +\infty])\big) \cup \big(g^{-1}(\{+\infty\}) \cap f^{-1}((-\infty, +\infty])\big) \in \mathcal{M},\\
D &= \big(f^{-1}(\{-\infty\}) \cap g^{-1}([-\infty, +\infty))\big) \cup \big(g^{-1}(\{-\infty\}) \cap f^{-1}([-\infty, +\infty))\big) \in \mathcal{M},\\
E &= \big(f^{-1}(\{+\infty\}) \cap g^{-1}(\{-\infty\})\big) \cup \big(f^{-1}(\{-\infty\}) \cap g^{-1}(\{+\infty\})\big) \in \mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Κατόπιν, παρατηρούμε ότι $(f+g)(x) = +\infty$ για κάθε $x \in C$. Άρα η $(f+g)\big|_C$ είναι σταθερή $+\infty$ στο πεδίο ορισμού της, το C, και, επομένως, είναι μετρήσιμη. Ομοίως, $(f+g)(x) = -\infty$ για κάθε $x \in D$. Άρα η $(f+g)\big|_D$ είναι σταθερή $-\infty$ στο πεδίο ορισμού της, το D, και, επομένως, είναι μετρήσιμη. Τέλος, $(f+g)(x) = 0$ για κάθε $x \in E$. Άρα η $(f+g)\big|_E$ είναι σταθερή 0 στο πεδίο ορισμού της, το E, και, επομένως, είναι μετρήσιμη.
Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 2.3, για να αποδείξουμε ότι η $f + g$ είναι μετρήσιμη, αρκεί να αποδείξουμε ότι η $(f+g)\big|_B$ είναι μετρήσιμη.
Θεωρούμε μια οποιαδήποτε αρίθμηση του $\mathbb{Q}$: $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, r_3, \dots\}$. Τότε, για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\{x \in B : (f+g)\big|_B(x) > a\} &= \{x \in B : (f+g)(x) > a\} = \{x \in B : f(x) + g(x) > a\}\\
&= \textstyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}\{x \in B : f(x) > r_n, g(x) > a - r_n\}.
\end{aligned}$$

Ας αποδείξουμε την τελευταία ισότητα. Έστω $y \in \bigcup_{n=1}^{+\infty}\{x \in B : f(x) > r_n, g(x) > a - r_n\}$. Τότε υπάρχει n ώστε $y \in \{x \in B : f(x) > r_n, g(x) > a - r_n\}$ και, επομένως, $y \in B$, $f(y) > r_n$ και $g(y) > a - r_n$. Συνεπάγεται $y \in B$ και $f(y) + g(y) > r_n + (a - r_n) = a$, οπότε

$y \in \{x \in B : f(x)+g(x) > a\}$. Αντιστρόφως, έστω $y \in \{x \in B : f(x)+g(x) > a\}$. Τότε $y \in B$ και $f(y)+g(y) > a$, οπότε $f(y) > a - g(y)$. Λόγω της πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$, υπάρχει ρητός ανάμεσα στους $f(y)$ και $a - g(y)$. Δηλαδή, υπάρχει n ώστε $y \in B$ και $f(y) > r_n > a - g(y)$. Άρα υπάρχει n ώστε $y \in B$, $f(y) > r_n$ και $g(y) > a - r_n$ και, επομένως, $y \in \{x \in B : f(x) > r_n\,, g(x) > a - r_n\}$. Άρα $y \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x \in B : f(x) > r_n\,, g(x) > a - r_n\}$.
Τώρα,

$$\{x \in B : f(x) > r_n\,, g(x) > a - r_n\} = B \cap \{x \in A : f(x) > r_n\} \cap \{x \in A : g(x) > a - r_n\} \in \mathcal{M}$$

για κάθε n και, επομένως, $\{x \in B : (f+g)\big|_B(x) > a\} \in \mathcal{M}$. Άρα η $(f+g)\big|_B$ είναι μετρήσιμη. □

Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 2.4 και 2.5, βλέπουμε ότι αν $A \in \mathcal{M}$ και οι $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμες, τότε και η

$$f - g = f + (-1)g : A \to \overline{\mathbb{R}}$$

είναι μετρήσιμη.

Λήμμα 2.2. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε η $f^2 : A \to \overline{\mathbb{R}}$ με τύπο $(f^2)(x) = f(x)^2$ για κάθε $x \in A$ είναι κι αυτή μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Αν $a \leq 0$, τότε

$$\{x \in A : (f^2)(x) > a\} = \{x \in A : f(x)^2 > a\} = A \in \mathcal{M}.$$

Αν $a > 0$, τότε

$$\begin{aligned}\{x \in A : (f^2)(x) > a\} &= \{x \in A : f(x)^2 > a\} \\ &= \{x \in A : f(x) > \sqrt{a}\} \cup \{x \in A : f(x) < -\sqrt{a}\} \in \mathcal{M}.\end{aligned}$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση, $\{x \in A : (f^2)(x) > a\} \in \mathcal{M}$ και, επομένως, η f^2 είναι μετρήσιμη. □

Ορισμός. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Ορίζουμε τη συνάρτηση $fg : A \to \overline{\mathbb{R}}$ με τύπο

$$(fg)(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } f(x) = \pm\infty,\ g(x) = 0 \text{ ή αν } f(x) = 0,\ g(x) = \pm\infty \\ f(x)g(x), & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Πρόταση 2.6. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμες $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε η $fg : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Χωρίζουμε το A στα εξής τέσσερα υποσύνολά του.

$$\begin{aligned} B &= \{x \in A : -\infty < f(x) < +\infty, -\infty < g(x) < +\infty\}, \\ C &= \{x \in A : f(x) = +\infty, g(x) > 0\} \cup \{x \in A : f(x) = -\infty, g(x) < 0\} \\ &\quad \cup \{x \in A : f(x) > 0, g(x) = +\infty\} \cup \{x \in A : f(x) < 0, g(x) = -\infty\}, \\ D &= \{x \in A : f(x) = -\infty, g(x) > 0\} \cup \{x \in A : f(x) = +\infty, g(x) < 0\} \\ &\quad \cup \{x \in A : f(x) > 0, g(x) = -\infty\} \cup \{x \in A : f(x) < 0, g(x) = +\infty\}, \\ E &= \{x \in A : f(x) = 0, g(x) = +\infty\} \cup \{x \in A : f(x) = 0, g(x) = -\infty\} \\ &\quad \cup \{x \in A : f(x) = +\infty, g(x) = 0\} \cup \{x \in A : f(x) = -\infty, g(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 2.5, εύκολα αποδεικνύεται ότι τα σύνολα B, C, D, E είναι μετρήσιμα, ξένα ανά δύο και ότι $B \cup C \cup D \cup E = A$. Κατόπιν, παρατηρούμε ότι η fg είναι σταθερή $+\infty$ στο C, σταθερή $-\infty$ στο D και σταθερή 0 στο E. Άρα οι περιορισμοί $(fg)\big|_C$, $(fg)\big|_D$ και $(fg)\big|_E$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις. Επομένως, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο περιορισμός $(fg)\big|_B$

είναι μετρήσιμη συνάρτηση.
Για κάθε $x \in B$ οι $f(x), g(x)$ είναι πραγματικοί αριθμοί και, επομένως,

$$f(x)g(x) = \tfrac{1}{4}\big(f(x)+g(x)\big)^2 - \tfrac{1}{4}\big(f(x)-g(x)\big)^2 .$$

Άρα για τους περιορισμούς $f\big|_B$, $g\big|_B$ και $(fg)\big|_B$ ισχύει

$$(fg)\big|_B = \tfrac{1}{4}\big(f\big|_B + g\big|_B\big)^2 - \tfrac{1}{4}\big(f\big|_B - g\big|_B\big)^2 .$$

Επειδή $B \in \mathcal{M}$, οι $f\big|_B$ και $g\big|_B$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις. Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση 2.5, οι $f\big|_B + g\big|_B$ και $f\big|_B - g\big|_B$ είναι μετρήσιμες και, σύμφωνα με το Λήμμα 2.2, οι $\big(f\big|_B + g\big|_B\big)^2$ και $\big(f\big|_B - g\big|_B\big)^2$ είναι μετρήσιμες. Άρα η $(fg)\big|_B$ είναι μετρήσιμη. □

Πρόταση 2.7. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμες $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε $\{x \in A : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{M}$.*

Απόδειξη. Ισχύει $\{x \in A : f(x) = g(x)\} = \{x \in A : (f-g)(x) = 0\} = (f-g)^{-1}\big(\{0\}\big) \in \mathcal{M}$, διότι η $f - g$ είναι μετρήσιμη. □

Πρόταση 2.8. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμες $f, g : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε οι $\max\{f, g\}, \min\{f, g\} : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι κι αυτές μετρήσιμες.*

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι για οποιουσδήποτε $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ ισχύει: $\max\{b, c\} > a$ αν και μόνο αν είτε $b > a$ είτε $c > a$. Άρα, για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\{x \in A : \max\{f,g\}(x) > a\} &= \{x \in A : \max\{f(x), g(x)\} > a\} = \{x \in A : f(x) > a \text{ ή } g(x) > a\} \\ &= \{x \in A : f(x) > a\} \cup \{x \in A : g(x) > a\}.\end{aligned}$$

Ισχύει $\{x \in A : f(x) > a\}, \{x \in A : g(x) > a\} \in \mathcal{M}$ και, επομένως, $\{x \in A : \max\{f,g\}(x) > a\} \in \mathcal{M}$. Άρα η $\max\{f, g\}$ είναι μετρήσιμη.
Επειδή οι f, g είναι μετρήσιμες, συνεπάγεται ότι οι $-f, -g$ είναι μετρήσιμες, οπότε η $\max\{-f, -g\}$ είναι μετρήσιμη. Άρα και η $\min\{f, g\} = -\max\{-f, -g\}$ είναι μετρήσιμη. □

Ορισμός. Για κάθε $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ορίζουμε

$$a^+ = \max\{a, 0\} = \begin{cases} a, & \text{αν } a \geq 0 \\ 0, & \text{αν } a \leq 0 \end{cases} \qquad a^- = -\min\{a, 0\} = \begin{cases} 0, & \text{αν } a \geq 0 \\ -a, & \text{αν } a \leq 0 \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι ισχύει

$$a^+ \geq 0, \quad a^- \geq 0, \quad a^+ - a^- = a, \quad a^+ + a^- = |a|.$$

Ορισμός. Τώρα, για κάθε $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ορίζουμε τις συναρτήσεις $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = -\min\{f, 0\}$, όπου 0 είναι η μηδενική συνάρτηση στο A.

Φυσικά, για τις τιμές των συναρτήσεων αυτών ισχύει $f^+(x) = \max\{f, 0\}(x) = \max\{f(x), 0\} = f(x)^+$ και, ομοίως, $f^-(x) = -\min\{f, 0\}(x) = -\min\{f(x), 0\} = f(x)^-$. Επίσης,

$$f^+ \geq 0, \quad f^- \geq 0, \quad f^+ - f^- = f, \quad f^+ + f^- = |f|.$$

Πρόταση 2.9. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε οι f^+ , f^- , $|f| : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι κι αυτές μετρήσιμες.*

Απόδειξη. Άμεση εφαρμογή των προηγούμενων προτάσεων και ειδικώτερα της Πρότασης 2.8. □

Ορισμός. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και συναρτήσεις $f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\sup_{n\geq 1} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}\,, \qquad \inf_{n\geq 1} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$$

με τους τύπους

$$\big(\sup_{n\geq 1} f_n\big)(x) = \sup\{f_n(x) : n \geq 1\}, \quad \big(\inf_{n\geq 1} f_n\big)(x) = \inf\{f_n(x) : n \geq 1\}$$

για κάθε $x \in A$.
Φυσικά, με εντελώς ανάλογο τρόπο ορίζονται, για κάθε $m \in \mathbb{N}$, και οι

$$\sup_{n\geq m} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}\,, \qquad \inf_{n\geq m} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Αν, για συντομία, συμβολίσουμε $g_m = \sup_{n\geq m} f_n$, τότε παρατηρούμε ότι ισχύει $g_{m+1} \leq g_m$ στο κοινό πεδίο ορισμού A και, επομένως, $\lim_{m\to+\infty} g_m = \inf_{m\geq 1} g_m$ στο A. Ομοίως, αν συμβολίσουμε $h_m = \inf_{n\geq m} f_n$, τότε $h_{m+1} \geq h_m$ στο A και, επομένως, $\lim_{m\to+\infty} h_m = \sup_{m\geq 1} h_m$ στο A. Ορίζουμε, τώρα, τις συναρτήσεις

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}\,, \qquad \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$$

με τους τύπους

$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \inf_{m\geq 1}\big(\sup_{n\geq m} f_n\big) = \lim_{m\to+\infty}\big(\sup_{n\geq m} f_n\big),$$

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \sup_{m\geq 1}\big(\inf_{n\geq m} f_n\big) = \lim_{m\to+\infty}\big(\inf_{n\geq m} f_n\big).$$

Εύκολα βλέπουμε, τώρα, ότι για κάθε $x \in A$

$$\big(\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n\big)(x) = \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x), \qquad \big(\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n\big)(x) = \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Γνωρίζουμε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύουν τα εξής:
(i) $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x)$ και
(ii) $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x)$ αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ και, στην περίπτωση αυτή, ισχύει

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Μπορούμε, λοιπόν, να ορίσουμε το σύνολο

$$B = \{x \in A : \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x)\} = \{x \in A : \text{το } \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \text{ υπάρχει}\}$$

οπότε ακριβώς στο σύνολο B μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση

$$\lim_{n\to+\infty} f_n : B \to \overline{\mathbb{R}}$$

με τύπο

$$\big(\lim_{n\to+\infty} f_n\big)(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Πρόταση 2.10. *Εστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμες $f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$.*
(1) *Οι $\sup_{n\geq 1} f_n$, $\inf_{n\geq 1} f_n$, $\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμες.*
(2) *Για το σύνολο $B = \{x \in A :$ το $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ υπάρχει$\}$ ισχύει $B \in \mathcal{M}$ και η $\lim_{n\to+\infty} f_n : B \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. (1) Αν $P \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ και $a \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει το εξής: $a < \sup P$ αν και μόνο αν ο a δεν είναι άνω φράγμα του P αν και μόνο αν υπάρχει $p \in P$ ώστε $p > a$. Αυτό θα το χρησιμοποιήσουμε στη δεύτερη ισότητα παρακάτω:

$$\begin{aligned}\big\{x \in A : \big(\sup_{n\geq 1} f_n\big)(x) > a\big\} &= \big\{x \in A : \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} > a\big\} \\ &= \{x \in A : \text{υπάρχει } n \in \mathbb{N} \text{ ώστε } f_n(x) > a\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{+\infty}\{x \in A : f_n(x) > a\}.\end{aligned}$$

Κάθε f_n είναι μετρήσιμη, οπότε $\{x \in A : f_n(x) > a\} \in \mathcal{M}$ για κάθε n και, επομένως, $\big\{x \in A : \big(\sup_{n\geq 1} f_n\big)(x) > a\big\} \in \mathcal{M}$. Άρα η $\sup_{n\geq 1} f_n$ είναι μετρήσιμη.
Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $\inf_{n\geq 1} f_n = -\sup_{n\geq 1}(-f_n)$. Επειδή κάθε f_n είναι μετρήσιμη, συνεπάγεται ότι κάθε $-f_n$ είναι μετρήσιμη, οπότε από τα προηγούμενα συνεπάγεται ότι η $\sup_{n\geq 1}(-f_n)$ είναι μετρήσιμη και άρα η $\inf_{n\geq 1} f_n$ είναι μετρήσιμη.
Τέλος, με διαδοχική εφαρμογή των προηγουμένων, έχουμε ότι κάθε $g_m = \sup_{n\geq m} f_n$ είναι μετρήσιμη και ότι η $\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \inf_{m\geq 1} g_m$ είναι μετρήσιμη. Ομοίως, κάθε $h_m = \inf_{n\geq m} f_n$ είναι μετρήσιμη και η $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \sup_{m\geq 1} h_m$ είναι μετρήσιμη.
(2) Επειδή οι $\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμες, σύμφωνα με την Πρόταση 2.7 το

$$B = \{x \in A : \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x)\}$$

είναι μετρήσιμο. Επομένως και οι περιορισμοί $\big(\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n\big)\big|_B$ και $\big(\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n\big)\big|_B$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις. Όμως,

$$\big(\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n\big)\big|_B = \big(\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n\big)\big|_B = \lim_{n\to+\infty} f_n$$

και, επομένως, η $\lim_{n\to+\infty} f_n$ είναι μετρήσιμη. □

Ασκήσεις.

1. Εφαρμόζοντας τον ορισμό, αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι μετρήσιμες.

$$f(x) = \frac{1}{x}\ (0 < x < 1), \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in [0,1]\cap\mathbb{Q} \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{αν } -1 < x \leq 0 \\ -4, & \text{αν } 0 < x \leq 2 \\ 3, & \text{αν } 2 < x \leq 3 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \tan x, & \text{αν } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ +\infty, & \text{αν } x = \frac{\pi}{2} \\ -\infty, & \text{αν } x = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x < 1 \\ 2, & \text{αν } x = 1 \\ 2-x, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

(Υπόδειξη: Βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων και αποδείξτε ότι είναι μετρήσιμα. Επίσης, για κάθε f και κάθε $a \in \mathbb{R}$ βρείτε το σύνολο $\{x : f(x) > a\}$.)

2. Έστω $A \in \mathcal{M}$, $N \subseteq A$ και $N \notin \mathcal{M}$. Θεωρήστε τη συνάρτηση $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in N \\ -1, & \text{αν } x \in A\setminus N \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι η f δεν είναι μετρήσιμη στο A ενώ η $|f|$ είναι μετρήσιμη στο A.
(Υπόδειξη: Βρείτε κάποιο $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $\{x \in A : f(x) > a\} \notin \mathcal{M}$.)

3. Έστω $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Αποδείξτε ότι $f^+f^- = 0$ και $f^n = (f^+)^n + (f^-)^n$ στο A για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
Επίσης, αν $f = g - h$ και $g, h \geq 0$ στο A, αποδείξτε ότι $f^+ \leq g$ και $f^- \leq h$ στο A.

4. Έστω $0 < p < +\infty$, $A \in \mathcal{M}$ και $f : A \to [0, +\infty]$. Αν η f είναι μετρήσιμη, αποδείξτε ότι και η $f^p : A \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμη.
(Υπόδειξη: Εφαρμόστε τον ορισμό.)

5. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Αν $B = \{x \in A : f(x) \neq 0\}$, αποδείξτε ότι η $\frac{1}{g} : B \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.
(Υπόδειξη: Αποδείξτε πρώτα ότι $B \in \mathcal{M}$ και εφαρμόστε τον ορισμό.)

6. Αν η $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μονότονη, αποδείξτε ότι είναι μετρήσιμη.
(Υπόδειξη: Πάρτε οποιοδήποτε $a \in \mathbb{R}$. Τί είδους σύνολο είναι το $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > a\}$;)

7. Βρείτε τις συναρτήσεις $\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n$, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n$ και $\lim_{n\to+\infty} f_n$ καθώς και τα πεδία ορισμού τους για τις παρακάτω ακολουθίες συναρτήσεων.
(i) $f_n(x) = x^n$ $(0 \leq x \leq 1)$,
(ii) $f_{2n}(x) = (1 + \frac{x}{2n})^{2n}$, $f_{2n-1}(x) = (1 - \frac{x}{2n-1})^{2n-1}$ $(0 \leq x < +\infty)$,
(iii) $f_{2n}(x) = x - x^{2n}$, $f_{2n-1}(x) = x^{2n-1}$ $(0 \leq x \leq 1)$,
(iv) $f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \in \{r_1, \ldots, r_n\} \\ 1, & \text{αν } x \in [0, 1] \setminus \{r_1, \ldots, r_n\} \end{cases}$ όπου $Q \cap [0, 1] = \{r_1, r_2, \ldots\}$ είναι οποιαδήποτε αρίθμηση του $Q \cap [0, 1]$.

8. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμη $f : A \to \mathbb{R}$. Επίσης, έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη.
(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\{x \in A : (g \circ f)(x) > a\} = f^{-1}\big(\{y \in \mathbb{R} : g(y) > a\}\big)$. Κατόπιν, παρατηρήστε ότι το $\{y \in \mathbb{R} : g(y) > a\}$ είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$. Χρησιμοποιήστε ότι κάθε ανοικτό $\subseteq \mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων.)

9. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Αποδείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $\{x \in A : f(x) \geq a\} \in \mathcal{M}$.
(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\{x \in A : f(x) \geq a\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty}\{x \in A : f(x) > a - \frac{1}{n}\}$. Επίσης, $\{x \in A : f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\{x \in A : f(x) \geq a + \frac{1}{n}\}$.)
Κάντε το ίδιο, αντικαθιστώντας το $\geq$ στο $\{x \in A : f(x) \geq a\}$ με το $<$ καθώς και με το $\leq$.

10. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Έστω, επίσης, και ένα $D \subseteq \mathbb{R}$ το οποίο είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ (για παράδειγμα, το $D = \mathbb{Q}$). Αποδείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $r \in D$ ισχύει $\{x \in A : f(x) > r\} \in \mathcal{M}$.
(Υπόδειξη: Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ υπάρχει (γιατί;) ακολουθία (r_n) έτσι ώστε $r_n \in D$ και $r_n > a$ για κάθε n και $r_n \to a$. Παρατηρήστε ότι $\{x \in A : f(x) > a\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty}\{x \in A : f(x) > r_n\}$.)

11. Έστω οποιοδήποτε $E \subseteq \mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι μετρήσιμο. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} -e^x , & \text{αν } x \notin E \\ e^x , & \text{αν } x \in E \end{cases}$ Αποδείξτε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = a\}$ είναι είτε μονοσύνολο είτε κενό. Επομένως το σύνολο αυτό είναι μετρήσιμο για κάθε a. Όμως, αποδείξτε ότι η f δεν είναι μετρήσιμη.

12. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Ορίζουμε

$$\mu_f(a) = m\big(\{x \in A : f(x) < a\}\big)$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι:
(i) η μ_f είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $\mu_f \geq 0$ στο $\mathbb{R}$,
(ii) η μ_f είναι συνεχής από αριστερά σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$, δηλαδή ότι $\lim_{a'\to a-} \mu_f(a') = \mu_f(a)$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$,
(iii) $\lim_{a'\to+\infty} \mu_f(a') + m(\{x \in A : f(x) = +\infty\}) = m(A)$.
Θεωρούμε και το $M = \{a \in \mathbb{R} : \mu_f(a) = +\infty\}$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση: $M = \mathbb{R}$. Τότε αποδείξτε ότι $\mu_f = +\infty$ στο $\mathbb{R}$.

Δεύτερη περίπτωση: $M = \emptyset$. Τότε αποδείξτε ότι $0 \leq \mu_f < +\infty$ στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε, επίσης, ότι $\lim_{a' \to a+} \mu_f(a') = \mu_f(a) + m(\{x \in A : f(x) = a\})$. Αυτό σημαίνει ότι η μ_f είναι συνεχής στο a αν και μόνο αν $m(\{x \in A : f(x) = a\}) = 0$. Επίσης, αυτό σημαίνει ότι το άλμα της μ_f στο a, δηλαδή το $\lim_{a' \to a+} \mu_f(a') - \lim_{a' \to a-} \mu_f(a')$, είναι ίσο με $m(\{x \in A : f(x) = a\})$.

Τρίτη περίπτωση: $M \neq \emptyset$ και $M \neq \mathbb{R}$. Τότε το M είναι κάτω φραγμένο και, επομένως, έχει infimum. Έστω $a_0 = \inf M$. Αποδείξτε ότι $0 \leq \mu_f(a) < +\infty$ για κάθε $a < a_0$ και $\mu_f(a) = +\infty$ για κάθε $a > a_0$. Αποδείξτε, επίσης, ότι όλα τα συμπεράσματα της δεύτερης περίπτωσης ισχύουν για $a < a_0$.

2.2 Σχεδόν παντού.

Ορισμός. Έστω κάποια ιδιότητα $P = P(x)$ η οποία αναφέρεται σε κάποια μεταβλητή x και η οποία ισχύει ή δεν ισχύει ανάλογα με τις τιμές που παίρνει η μεταβλητή x. Αν, λοιπόν, έχουμε μια τέτοια ιδιότητα και η μεταβλητή x παίρνει τιμές μέσα από το σύνολο $A \in \mathcal{M}$, τότε λέμε ότι **η** $P(x)$ **ισχύει για σχεδόν κάθε** $x \in A$ ή **η** P **ισχύει σχεδόν παντού στο** A αν το σύνολο των $x \in A$ για τα οποία δεν ισχύει η $P(x)$ έχει μέτρο ίσο με 0 :

$$m\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\}\big) = 0.$$

Αν η P ισχύει σχεδόν παντού στο $A \in \mathcal{M}$, τότε, εξ ορισμού, $\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\} \in \mathcal{M}$ και, επομένως,

$$\{x \in A : \text{ ισχύει η } P(x)\} = A \setminus \{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\} \in \mathcal{M}.$$

Μάλιστα, είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned} m(A) &= m\big(\{x \in A : \text{ ισχύει η } P(x)\}\big) + m\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\}\big) \\ &= m\big(\{x \in A : \text{ ισχύει η } P(x)\}\big). \end{aligned}$$

Έστω ότι έχουμε δυο ιδιότητες $P = P(x)$ και $Q = Q(x)$ με μεταβλητή x στο $A \in \mathcal{M}$. Ας υποθέσουμε ότι η P συνεπάγεται την Q, δηλαδή ότι για κάθε x: *αν ισχύει η $P(x)$, τότε ισχύει και η $Q(x)$*. Τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: *αν η P ισχύει σχεδόν παντού στο A, τότε και η Q ισχύει σχεδόν παντού στο A*. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής. Βάσει της υπόθεσης, $\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } Q(x)\} \subseteq \{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\}$, οπότε

$$\begin{aligned} m^*\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } Q(x)\}\big) &\leq m^*\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\}\big) \\ &= m\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\}\big) = 0. \end{aligned}$$

Άρα $\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } Q(x)\} \in \mathcal{M}$ και $m\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } Q(x)\}\big) = 0$.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι έχουμε ιδιότητες $P_n = P_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ με μεταβλητή x στο $A \in \mathcal{M}$. Τότε σχηματίζεται η **σύζευξη** P των P_n , η οποία συμβολίζεται και $\wedge_{n=1}^{+\infty} P_n$. Αυτή είναι μια νέα πρόταση η οποία ισχύει αν και μόνο αν ισχύει κάθε P_n . Πιο συγκεκριμένα, για κάθε $x \in A$: *ισχύει η $P(x)$ αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η $P_n(x)$*. Τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι: *αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η P_n ισχύει σχεδόν παντού στο A, τότε και η P ισχύει σχεδόν παντού στο A*. Κι αυτό αποδεικνύεται εύκολα, όπως το προηγούμενο. Βάσει της υπόθεσης, $\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P_n(x)\}$, οπότε

$$\begin{aligned} m^*\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\}\big) &\leq \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} m^*\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P_n(x)\}\big) \\ &= \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} m\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P_n(x)\}\big) = \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα $\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\} \in \mathcal{M}$ και $m\big(\{x \in A : \text{ δεν ισχύει η } P(x)\}\big) = 0$.

Πολλές φορές τον τελευταίο κανόνα τον διατυπώνουμε ως εξής: *αν για κάθε n η P_n ισχύει σχεδόν παντού στο A, τότε όλες ταυτόχρονα οι P_n ισχύουν σχεδόν παντού στο A.*

Πρόταση 2.11. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Αν $B \subseteq A$ με $m(A \setminus B) = 0$ και η $f\big|_B$ είναι μετρήσιμη, τότε και η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\{x \in A : f(x) > a\} = \{x \in B : f(x) > a\} \cup \{x \in A \setminus B : f(x) > a\}.$$

Τώρα, $\{x \in B : f(x) > a\} = \{x \in B : f\big|_B(x) > a\} \in \mathcal{M}$ διότι η $f\big|_B$ είναι μετρήσιμη. Επίσης, $\{x \in A \setminus B : f(x) > a\} \subseteq A \setminus B$. Επειδή $m(A \setminus B) = 0$, συνεπάγεται $m^*\big(\{x \in A \setminus B : f(x) > a\}\big) = 0$ και, επομένως, $\{x \in A \setminus B : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$. Άρα $\{x \in A : f(x) > a\} \in \mathcal{M}$, οπότε η f είναι μετρήσιμη. $\square$

Πρόταση 2.12. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Έστω και μια $g : A \to \overline{\mathbb{R}}$ τέτοια ώστε να ισχύει $g = f$ σχεδόν παντού στο A. Τότε η g είναι κι αυτή μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $B = \{x \in A : g(x) = f(x)\}$. Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι $m(A \setminus B) = 0$, οπότε $A \setminus B \in \mathcal{M}$ και, επομένως, $B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{M}$. Άρα η $f\big|_B$ είναι μετρήσιμη και, επειδή, $g\big|_B = f\big|_B$, συνεπάγεται ότι και η $g\big|_B$ είναι μετρήσιμη. Από την Πρόταση 2.11 συνεπάγεται ότι η g είναι μετρήσιμη. $\square$

Πρόταση 2.13. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμες $f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Έστω και μια $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Αν ισχύει $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A, τότε και η f είναι μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $B = \{x \in A :$ το $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ υπάρχει$\}$ και $C = \{x \in A : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)\}$.
Σύμφωνα με την Πρόταση 2.10, ισχύει $B \in \mathcal{M}$ και η $\lim_{n\to+\infty} f_n : B \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη. Επίσης, $C \subseteq B \subseteq A$ και από την υπόθεση συνεπάγεται ότι $m(A \setminus C) = 0$. Άρα $C \in \mathcal{M}$. Επομένως, η $f\big|_C = \big(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\big)\big|_C$ είναι μετρήσιμη και, από την Πρόταση 2.11, η f είναι μετρήσιμη. $\square$

Ασκήσεις.

1. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και $\mathcal{M}_A$ το σύνολο όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Για κάθε $f, g \in \mathcal{M}_A$ ορίζουμε $f \sim g$ αν $f = g$ σχεδόν παντού στο A. Αποδείξτε ότι η σχέση $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο $\mathcal{M}_A$.
(Υπόδειξη: $\{x \in A : f(x) \neq h(x)\} \subseteq \{x \in A : f(x) \neq g(x)\} \cup \{x \in A : g(x) \neq h(x)\}$.)

2. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και $f_1, f_2, g_1, g_2 : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Υποθέστε ότι $f_1 = g_1$ σχεδόν παντού στο A και $f_2 = g_2$ σχεδόν παντού στο A.
Αποδείξτε ότι καθένα από τα παρακάτω ισχύει σχεδόν παντού στο A:
$$f_1 + f_2 = g_1 + g_2\,, \qquad f_1 f_2 = g_1 g_2\,, \qquad \lambda f_1 = \lambda f_2\,,$$
$$\max\{f_1, f_2\} = \max\{g_1, g_2\}, \qquad \min\{f_1, f_2\} = \min\{g_1, g_2\}.$$
Αποδείξτε ότι, αν $f_1 \leq f_2$ σχεδόν παντού στο A, τότε $g_1 \leq g_2$ σχεδόν παντού στο A.

3. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και $f_n, g_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$. Υποθέστε ότι για κάθε n ισχύει $f_n = g_n$ σχεδόν παντού στο A.
Αποδείξτε ότι καθένα από τα παρακάτω ισχύει σχεδόν παντού στο A:
$$\sup_{n\geq 1} f_n = \sup_{n\geq 1} g_n\,, \quad \inf_{n\geq 1} f_n = \inf_{n\geq 1} g_n\,,$$
$$\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} g_n\,, \quad \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \underline{\lim}_{n\to+\infty} g_n\,.$$

(Υπόδειξη: $\{x \in A : \sup_{n\geq 1} f_n(x) \neq \sup_{n\geq 1} g_n(x)\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty}\{x \in A : f_n(x) \neq g_n(x)\}$.)
Επίσης, αν $B \subseteq A$ είναι το πεδίο ορισμού της $\lim_{n\to+\infty} f_n$ και $C \subseteq A$ είναι το πεδίο ορισμού της $\lim_{n\to+\infty} g_n$, αποδείξτε ότι $m(B\triangle C) = 0$ και ότι

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = \lim_{n\to+\infty} g_n$$

σχεδόν παντού στο $B \cap C$.

4. Έστω ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}$ και $f, g : U \to \mathbb{R}$ συνεχείς στο U. Αν $f = g$ σχεδόν παντού στο U, αποδείξτε ότι $f = g$ στο U.
(Υπόδειξη: Έστω $f(x_0) \neq g(x_0)$ για κάποιο $x_0 \in U$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subseteq U$ και $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Όμως, $m\big((x_0 - \delta, x_0 + \delta)\big) > 0$.)

5. **Θεώρημα του Egoroff**. Έστω $f, f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$, όπου $A \in \mathcal{M}$, $m(A) < +\infty$, κάθε f_n είναι μετρήσιμη και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A. Αποδείξτε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $E \subseteq A$, ώστε $E \in \mathcal{M}$, $m(A \setminus E) < \delta$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E.
(Υπόδειξη: Έστω $B = \{x \in A : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)\}$. Τότε $m(A \setminus B) = 0$. Για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $B_{n,m} = \{x \in B : |f_k(x) - f(x)| < \frac{1}{n}$ για κάθε $k \geq m\}$. Τότε $\bigcup_{m=1}^{+\infty} B_{n,m} = B$ και $B_{n,m} \subseteq B_{n,m+1}$ για κάθε n, m. Άρα $\lim_{m\to+\infty} m(B_{n,m}) = m(B)$. Άρα $\lim_{m\to+\infty} m(B \setminus B_{n,m}) = 0$. Άρα για κάθε n υπάρχει m_n ώστε $m(B \setminus B_{n,m_n}) < \frac{\delta}{2^n}$. Ορίζουμε $E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_{n,m_n}$. Τότε $m(A \setminus E) = m(B \setminus E) < \delta$. Επίσης, για κάθε n ισχύει $E \subseteq B_{n,m_n}$, οπότε $|f_k(x)-f(x)| < \frac{1}{n}$ για κάθε $x \in E$ και κάθε $k \geq m_n$. Άρα $\sup\{x \in E : |f_k(x) - f(x)|\} \leq \frac{1}{n}$ για κάθε $k \geq m_n$. Άρα $\lim_{k\to+\infty} \sup\{x \in E : |f_k(x) - f(x)|\} = 0$.)

6. Έστω ότι η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.
Αποδείξτε ότι η f είναι μετρήσιμη.
Αποδείξτε ότι η f' είναι μετρήσιμη.

2.3 Απλές συναρτήσεις.

Ορισμός. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$. Μια συνάρτηση $\phi : A \to \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται **απλή συνάρτηση** στο A αν το σύνολο τιμών της είναι *πεπερασμένο*. Πρέπει να τονιστεί ότι, εξ ορισμού, οι τιμές μιας απλής συνάρτησης είναι όλες *πραγματικοί αριθμοί*.

Έστω, λοιπόν, $\phi : A \to \mathbb{R}$ μια οποιαδήποτε απλή συνάρτηση στο A και έστω $\lambda_1 , \ldots , \lambda_n$ όλες οι (διαφορετικές ανά δύο) τιμές της. Ορίζουμε

$$A_k = \{x \in A : \phi(x) = \lambda_k\} = \phi^{-1}\big(\{\lambda_k\}\big),$$

για $1 \leq k \leq n$, το σύνολο στο οποίο η ϕ παίρνει την τιμή λ_k . Είναι φανερό ότι τα $A_1 , \ldots , A_n$ είναι ξένα ανά δύο και ότι $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$.

Συγκρίνουμε την ϕ με την $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\chi_{A_k}$, όπου (υπενθυμίζουμε) με χ_B συμβολίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου B. Θεωρούμε οποιοδήποτε $x \in A$. Το x ανήκει σε ακριβώς ένα από τα $A_1 , \ldots , A_n$, και έστω $x \in A_{k_0}$. Συνεπάγεται $\chi_{A_{k_0}}(x) = 1$ και $\chi_{A_k}(x) = 0$ για κάθε $k \neq k_0$ και, επομένως, $\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\chi_{A_k}\big)(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\chi_{A_k}(x) = \lambda_{k_0}$. Από την άλλη μεριά, επειδή $x \in A_{k_0}$, συνεπάγεται $\phi(x) = \lambda_{k_0}$. Άρα $\big(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\chi_{A_k}\big)(x) = \phi(x)$ για κάθε $x \in A$. Δηλαδή

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\chi_{A_k} .$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι κάθε απλή συνάρτηση γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων.

Ορισμός. Η συγκεκριμένη γραφή $\phi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\chi_{A_k}$, όπου οι αριθμοί $\lambda_1 , \ldots , \lambda_n$ είναι διαφορετικοί ανά δύο, τα $A_1 , \ldots , A_n$ είναι ξένα ανά δύο και $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ ονομάζεται **κανονική αναπαράσταση** της ϕ.

Λήμμα 2.3. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και απλή συνάρτηση ϕ στο A. Αν $\phi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}$ είναι η κανονική αναπαράσταση της ϕ, τότε: η ϕ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν $A_k \in \mathcal{M}$ για κάθε k.*

Απόδειξη. Αν η ϕ είναι μετρήσιμη, τότε $A_k = \phi^{-1}(\{\lambda_k\}) \in \mathcal{M}$.
Αντιστρόφως, αν $A_k \in \mathcal{M}$ για κάθε k, τότε κάθε χ_{A_k} είναι μετρήσιμη, οπότε και ο γραμμικός συνδυασμός $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \chi_{A_k}$, δηλαδή η ϕ, είναι μετρήσιμη συνάρτηση. □

Πρόταση 2.14. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.*
(1) Αν οι ϕ, ψ είναι απλές συναρτήσεις στο A και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε και οι $\lambda\phi$, $\phi + \psi$, $\phi - \psi$, $\phi\psi$, $\max\{\phi, \psi\}$, $\min\{\phi, \psi\}$, ϕ^+, ϕ^- και $|\phi|$ είναι απλές συναρτήσεις στο A. Αν, επιπλέον, οι ϕ, ψ είναι μετρήσιμες, τότε και οι υπόλοιπες συναρτήσεις είναι μετρήσιμες.
(2) Αν η ϕ είναι απλή συνάρτηση στο A και $B \subseteq A$, τότε η $\phi\big|_B$ είναι απλή συνάρτηση στο B. Αν, επιπλέον, η ϕ είναι μετρήσιμη και $B \in \mathcal{M}$, τότε και η $\phi\big|_B$ είναι μετρήσιμη.

Απόδειξη. (1) Έστω λ_k $(1 \le k \le n)$ όλες οι (διαφορετικές ανά δύο) τιμές της ϕ και μ_l $(1 \le l \le m)$ όλες οι (διαφορετικές ανά δύο) τιμές της ψ.
Είναι φανερό ότι οι τιμές της $\lambda\phi$ είναι η 0, αν $\lambda = 0$, ή οι $\lambda\lambda_k$ $(1 \le k \le n)$, αν $\lambda \neq 0$.
Ομοίως, οι τιμές της $\phi \pm \psi$ είναι κάποιες από τις $\lambda_k \pm \mu_l$ $(1 \le k \le n, 1 \le l \le m)$ και οι τιμές της $\phi\psi$ είναι κάποιες από τις $\lambda_k\mu_l$ $(1 \le k \le n, 1 \le l \le m)$. Επίσης, οι τιμές της $\max\{\phi, \psi\}$ είναι κάποιες από τις $\max\{\lambda_k, \mu_l\}$ $(1 \le k \le n, 1 \le l \le m)$ και οι τιμές της $\min\{\phi, \psi\}$ είναι κάποιες από τις $\min\{\lambda_k, \mu_l\}$ $(1 \le k \le n, 1 \le l \le m)$.
Άρα όλες αυτές οι συναρτήσεις έχουν πεπερασμένο σύνολο (πραγματικών) τιμών και επομένως είναι απλές συναρτήσεις στο A. Προφανώς, τότε και οι $\phi^+ = \max\{\phi, 0\}$, $\phi^- = -\min\{\phi, 0\}$ και $|\phi| = \phi^+ + \phi^-$ είναι απλές συναρτήσεις στο A.
Το συμπέρασμα για τη μετρησιμότητα είναι στοιχειώδες.
(2) Αν λ_k $(1 \le k \le n)$ είναι όλες οι (διαφορετικές ανά δύο) τιμές της ϕ, τότε οι τιμές της $\phi\big|_B$ είναι κάποιες από τις λ_k $(1 \le k \le n)$. Άρα η $\phi\big|_B$ έχει πεπερασμένο σύνολο (πραγματικών) τιμών και επομένως είναι απλή συνάρτηση στο B.
Το συμπέρασμα για τη μετρησιμότητα είναι και πάλι στοιχειώδες. □

Η επόμενη Πρόταση 2.15 θα φανεί αρκετά χρήσιμη στο επόμενο κεφάλαιο.

Πρόταση 2.15. *Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ ώστε $f \ge 0$ στο A. Τότε υπάρχουν απλές συναρτήσεις ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A με τις ιδιότητες:*
(i) $0 \le \phi_n \le \phi_{n+1}$ για κάθε n,
(ii) $\phi_n \to f$ στο A και
(iii) αν η f είναι μετρήσιμη, τότε όλες οι ϕ_n είναι κι αυτές μετρήσιμες.

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιονδήποτε n και ορίζουμε τα εξής σύνολα:

$$E_{n,k} = \left\{x \in A : \tfrac{k}{2^n} \le f(x) < \tfrac{k+1}{2^n}\right\} \quad (0 \le k \le 2^{2n} - 1)$$

και

$$F_n = \{x \in A : 2^n \le f(x)\}.$$

Είναι σαφές ότι τα $E_{n,0}, E_{n,1}, \dots, E_{n,2^{2n}-1}, F_n$ είναι ξένα ανά δύο και ότι

$$E_{n,0} \cup E_{n,1} \cup \cdots \cup E_{n,2^{2n}-1} \cup F_n = A.$$

Είναι, επίσης, σαφές ότι, αν η f είναι μετρήσιμη, τότε όλα τα παραπάνω σύνολα είναι μετρήσιμα.
Τώρα, σχηματίζουμε τη συνάρτηση $\phi_n : A \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\phi_n = \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \tfrac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}} + 2^n \chi_{F_n} = \tfrac{0}{2^n} \chi_{E_{n,0}} + \tfrac{1}{2^n} \chi_{E_{n,1}} + \cdots + \tfrac{2^{2n}-1}{2^n} \chi_{E_{n,2^{2n}-1}} + 2^n \chi_{F_n}.$$

Παρατηρούμε ότι $\phi_n \geq 0$ στο A και ότι, αν η f είναι μετρήσιμη, τότε, επειδή όλα τα παραπάνω σύνολα είναι μετρήσιμα, συνεπάγεται ότι όλες οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις που εμφανίζονται στον τύπο της ϕ_n είναι μετρήσιμες και, επομένως, η ϕ_n είναι κι αυτή μετρήσιμη.
Για να συγκρίνουμε τις ϕ_n και ϕ_{n+1} , θεωρούμε και το σύνολο

$$G_n = \{x \in A : 2^n \leq f(x) < 2^{n+1}\}$$

και βλέπουμε τις εξής σχέσεις:

$$E_{n,k} = E_{n+1,2k} \cup E_{n+1,2k+1} \ (0 \leq k \leq 2^{2n} - 1), \quad F_n = G_n \cup F_{n+1} \,,$$

$$E_{n+1,2^{2n+1}} \cup \cdots \cup E_{n+1,2^{2n+2}-1} = G_n \,.$$

Επίσης, τα G_n , F_{n+1} είναι ξένα. Άρα

$$\begin{aligned}
\phi_n &= \textstyle\sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n}\chi_{E_{n,k}} + 2^n\chi_{F_n} \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{2k}{2^{n+1}}\big(\chi_{E_{n+1,2k}} + \chi_{E_{n+1,2k+1}}\big) + 2^n\big(\chi_{G_n} + \chi_{F_{n+1}}\big) \\
&\leq \textstyle\sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \big(\frac{2k}{2^{n+1}}\chi_{E_{n+1,2k}} + \frac{2k+1}{2^{n+1}}\chi_{E_{n+1,2k+1}}\big) + 2^n\chi_{G_n} + 2^{n+1}\chi_{F_{n+1}} \\
&= \textstyle\sum_{l=0}^{2^{2n+1}-1} \frac{l}{2^{n+1}}\chi_{E_{n+1,l}} + 2^n\chi_{G_n} + 2^{n+1}\chi_{F_{n+1}} \\
&= \textstyle\sum_{l=0}^{2^{2n+1}-1} \frac{l}{2^{n+1}}\chi_{E_{n+1,l}} + 2^n\big(\chi_{E_{n+1,2^{2n+1}}} + \cdots + \chi_{E_{n+1,2^{2n+2}-1}}\big) + 2^{n+1}\chi_{F_{n+1}} \\
&\leq \textstyle\sum_{l=0}^{2^{2n+1}-1} \frac{l}{2^{n+1}}\chi_{E_{n+1,l}} + \sum_{l=2^{2n+1}}^{2^{2n+2}-1} \frac{l}{2^{n+1}}\chi_{E_{n+1,l}} + 2^{n+1}\chi_{F_{n+1}} \\
&= \textstyle\sum_{l=0}^{2^{2n+2}-1} \frac{l}{2^{n+1}}\chi_{E_{n+1,l}} + 2^{n+1}\chi_{F_{n+1}} \\
&= \phi_{n+1} \,.
\end{aligned}$$

Τέλος, μένει να αποδείξουμε ότι $\phi_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in A$, οπότε έστω οποιοδήποτε $x \in A$. Αν $0 \leq f(x) < +\infty$, τότε υπάρχει n_0 ώστε $f(x) < 2^n$ για κάθε $n \geq n_0$. Θεωρούμε οποιονδήποτε $n \geq n_0$ και, επειδή $0 \leq 2^n f(x) < 2^{2n}$, υπάρχει k ώστε $0 \leq k \leq 2^{2n} - 1$ και $k \leq 2^n f(x) < k+1$. Αυτό σημαίνει ότι $x \in E_{n,k}$ και, επομένως, $\phi_n(x) = \frac{k}{2^n}$. Άρα

$$\phi_n(x) \leq f(x) < \phi_n(x) + \tfrac{1}{2^n}$$

για κάθε $n \geq n_0$ και, επομένως,

$$\phi_n(x) \to f(x).$$

Αν $f(x) = +\infty$, τότε για κάθε n είναι $2^n \leq f(x)$. Δηλαδή, $x \in F_n$, οπότε $\phi_n(x) = 2^n$. Άρα

$$\phi_n(x) \to +\infty = f(x).$$

□

Ασκήσεις.

1. Αποδείξτε ότι

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A\chi_B \,, \quad \chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B \,, \quad \chi_{A^c} = 1 - \chi_A \,.$$

2. Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι απλές και ποιες είναι οι κανονικές τους αναπαραστάσεις;

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \\ 0, & \text{αν } x \notin \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \end{cases}, \qquad \phi(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

$$\phi(x) = [x] \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad \phi(x) = [x] \quad (-3 \leq x \leq 4).$$

3. Δείτε την άσκηση 4 της ενότητας 1.3.
Έστω $A = \overline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$. Αποδείξτε ότι $\chi_A = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \chi_{A_n}$.
Έστω $A = \underline{\lim}_{n\to+\infty} A_n$. Αποδείξτε ότι $\chi_A = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \chi_{A_n}$.

Κεφάλαιο 3

Το ολοκλήρωμα Lebesgue.

3.1 Απλές μη αρνητικές Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις.

Ορισμός. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και $\phi : \ \to [0, +\infty)$ οποιαδήποτε μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση στο A και έστω

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$$

η κανονική αναπαράστασή της. Αυτό σημαίνει ότι τα σύνολα $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}$ είναι μη κενά και ανά δύο ξένα, ότι $A_1 \cup \dots \cup A_n = A$, ότι σε κάθε A_k η ϕ έχει σταθερή τιμή $a_k \geq 0$ και ότι οι $a_1, \dots, a_n$ είναι όλες οι διαφορετικές ανά δύο τιμές της ϕ. Ορίζουμε το **ολοκλήρωμα Lebesgue** ή, πιο απλά, **ολοκλήρωμα** της ϕ στο A, και το συμβολίζουμε $\int_A \phi$, να είναι ο αριθμός

$$\textstyle\int_A \phi = \sum_{k=1}^{n} a_k m(A_k).$$

Αν $a_k = 0$ και $m(A_k) = +\infty$ συγχρόνως για κάποιο k, τότε συμβατικά δεχόμαστε ότι $a_k m(A_k) = 0$.

Λήμμα 3.1. *Έστω $A, B_1, \dots, B_m \in \mathcal{M}$, $A = B_1 \cup \dots \cup B_m$ και τα $B_1, \dots, B_m$ είναι ανά δύο ξένα. Έστω, επίσης, αριθμοί $b_1, \dots, b_m \geq 0$ και η συνάρτηση $\phi = \sum_{l=1}^{m} b_l \chi_{B_l} : A \to \mathbb{R}$. Τότε η ϕ είναι μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση στο A και ισχύει*

$$\textstyle\int_A \phi = \sum_{l=1}^{m} b_l m(B_l).$$

Απόδειξη. Επειδή κάθε B_l είναι μετρήσιμο, κάθε χ_{B_l} είναι μετρήσιμη. Άρα και ο γραμμικός συνδυασμός $\phi = \sum_{l=1}^{m} b_l \chi_{B_l}$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση στο A. Τα $B_1, \dots, B_m$ είναι ανά δύο ξένα, οπότε η ϕ είναι σταθερή $= b_l$ σε κάθε B_l και, επειδή $A = B_1 \cup \dots \cup B_m$, οι $b_1, \dots, b_m$ είναι όλες οι τιμές της ϕ στο A. Οι τιμές αυτές είναι πεπερασμένες, οπότε η ϕ είναι απλή και επειδή $b_1, \dots, b_m \geq 0$, η ϕ είναι μη αρνητική.
Αν είχαμε υποθέσει ότι οι $b_1, \dots, b_m$ είναι ανά δύο διαφορετικοί και ότι τα $B_1, \dots, B_m$ είναι μη κενά, τότε η $\phi = \sum_{l=1}^{m} b_l \chi_{B_l}$ θα ήταν η κανονική αναπαράσταση της ϕ. Για να υπολογίσουμε το $\int_A \phi$ πρέπει να βρούμε την κανονική αναπαράσταση της ϕ.
Αν κάποιο B_{l_0} είναι $= \emptyset$, τότε μπορούμε να το αγνοήσουμε. Πράγματι, δεν επηρεάζεται η ισότητα $A = B_1 \cup \dots \cup B_m$, ούτε η ισότητα $\phi = \sum_{l=1}^{m} b_l \chi_{B_l}$ (διότι η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_{B_{l_0}}$ είναι ταυτοτικά μηδέν στο A), ούτε η ισότητα $\int_A \phi = \sum_{l=1}^{m} b_l m(B_l)$ (διότι $m(B_{l_0}) = m(\emptyset) = 0$). Επομένως, αγνοούμε όλα τα B_l τα οποία είναι κενά και, αφού αλλάξουμε την αρίθμηση και ξανασυμβολίσουμε m το πλήθος των B_l που απομένουν, *μπορούμε να υποθέσουμε στη συνέχεια ότι όλα τα $B_1, \dots, B_m$ είναι μη κενά.*
Κατόπιν, ομαδοποιούμε τους $b_1, \dots, b_m$, βάζοντας όλους όσοι είναι ίσοι μεταξύ τους στην ίδια ομάδα. Αλλάζοντας, αν χρειάζεται, την αρίθμηση των $b_1, \dots, b_m$, ας υποθέσουμε ότι δημιουργούνται n ομάδες:

$\{b_1 = \dots = b_{l_1}\}, \{b_{l_1+1} = \dots = b_{l_2}\}, \dots\dots, \{b_{l_{n-2}+1} = \dots = b_{l_{n-1}}\},\ \{b_{l_{n-1}+1} = \dots = b_{l_n}\},$

όπου (όπως δηλώνεται) σε κάθε ομάδα οι αριθμοί είναι ίσοι μεταξύ τους, όπου αριθμοί από διαφορετικές ομάδες είναι άνισοι και όπου, φυσικά, $l_n = m$. Τώρα, συμβολίζουμε a_1 την κοινή τιμή των αριθμών της πρώτης ομάδας, a_2 την κοινή τιμή των αριθμών της δεύτερης ομάδας, $\dots, a_{n-1}$ την κοινή τιμή των αριθμών της $(n-1)$-οστής ομάδας και a_n την κοινή τιμή των αριθμών της n-οστής ομάδας. Επομένως, οι αριθμοί $a_1, \dots, a_n$ είναι όλες οι διαφορετικές ανά δύο τιμές της ϕ. Συμβολίζουμε, επίσης,

$$\begin{aligned} &A_1 = B_1 \cup \cdots \cup B_{l_1}\,,\ A_2 = B_{l_1+1} \cup \cdots \cup B_{l_2}\,, \dots \\ &\qquad \dots, A_{n-1} = B_{l_{n-2}+1} \cup \cdots \cup B_{l_{n-1}}\,,\ A_n = B_{l_{n-1}+1} \cup \cdots \cup B_{l_n}\,. \end{aligned}$$

Συνεπάγεται ότι η ϕ είναι σταθερή $= a_k$ σε κάθε A_k, ότι τα $A_1, \dots, A_n$ είναι μη κενά, ανά δύο ξένα και ότι $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$. Άρα ισχύει

$$\phi = \textstyle\sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}$$

και *αυτή είναι η κανονική αναπαράσταση της* ϕ. Άρα

$$\begin{aligned} \textstyle\int_A \phi &= a_1 m(A_1) + \cdots + a_n m(A_n) \\ &= a_1\big(m(B_1) + \cdots + m(B_{l_1})\big) + \cdots + a_n\big(m(B_{l_{n-1}+1}) + \cdots + m(B_{l_n})\big) \\ &= \big(b_1 m(B_1) + \cdots + b_{l_1} m(B_{l_1})\big) + \cdots + \big(b_{l_{n-1}+1} m(B_{l_{n-1}+1}) + \cdots + b_{l_n} m(B_{l_n})\big) \\ &= b_1 m(B_1) + \cdots + b_m m(B_m). \end{aligned}$$

□

Πρόταση 3.1. *Έστω $A \in \mathcal{M}$, αριθμός $\lambda \geq 0$ και μη αρνητικές μετρήσιμες απλές συναρτήσεις ϕ, ψ στο A. Τότε:*
(i) $\int_A \phi \geq 0$,
(ii) $\int_A (\lambda\phi) = \lambda \int_A \phi$,
(iii) $\int_A (\phi + \psi) = \int_A \phi + \int_A \psi$ και,
(iv) αν $\phi \leq \psi$ στο A, τότε $\int_A \phi \leq \int_A \psi$.

Απόδειξη. Έστω $\phi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}$ και $\psi = \sum_{l=1}^m b_l \chi_{B_l}$ οι κανονικές αναπαραστάσεις των ϕ, ψ.
(i) Επειδή κάθε a_k και κάθε $m(A_k)$ είναι ≥ 0, ισχύει $\int_A \phi = \sum_{k=1}^n a_k m_d(A_k) \geq 0$.
(ii) Από $\lambda\phi = \sum_{k=1}^n (\lambda a_k)\chi_{A_k}$ και από το Λήμμα 3.1, $\int_A (\lambda\phi) = \sum_{k=1}^n (\lambda a_k) m(A_k) = \lambda \sum_{k=1}^n a_k m(A_k) = \lambda \int_A \phi$.
(iii) Θεωρούμε τα σύνολα $C_{k,l} = A_k \cap B_l \in \mathcal{M}$ για κάθε $k = 1, \dots, n$ και $l = 1, \dots, m$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι τα σύνολα αυτά είναι ανά δύο ξένα και ότι η ένωσή τους είναι $= A$. Επίσης, η συνάρτηση $\phi + \psi$ είναι σταθερή $= a_k + b_l$ σε κάθε $C_{k,l}$. Δηλαδή, $\phi + \psi = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m (a_k + b_l)\chi_{C_{k,l}}$ στο A. Από το Λήμμα 4.1 συνεπάγεται $\int_A (\phi + \psi) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m (a_k + b_l) m(C_{k,l})$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι για κάθε k η ένωση των $C_{k,l}$ $(1 \leq l \leq m)$ είναι $= A_k$ και, ομοίως, για κάθε l η ένωση των $C_{k,l}$ $(1 \leq k \leq n)$ είναι $= B_l$. Άρα $\sum_{l=1}^m m(C_{k,l}) = m(A_k)$ και $\sum_{k=1}^n m(C_{k,l}) = m(B_l)$. Συνδυάζοντας όλα αυτά βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \textstyle\int_A (\phi + \psi) &= \textstyle\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m (a_k + b_l) m(C_{k,l}) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_k m(C_{k,l}) + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m b_l m(C_{k,l}) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n a_k\big(\sum_{l=1}^m m(C_{k,l})\big) + \sum_{l=1}^m b_l\big(\sum_{k=1}^n m(C_{k,l})\big) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^n a_k m(A_k) + \sum_{l=1}^m b_l m(B_l) = \int_A \phi + \int_A \psi. \end{aligned}$$

(iv) Αν $\phi \leq \psi$ στο A, τότε η $\psi - \phi$ είναι μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση στο A και ισχύει $\psi = \phi + (\psi - \phi)$ στο A. Από το (iii) συνεπάγεται $\int_A \psi = \int_A \phi + \int_A (\psi - \phi)$. Από το (i) συνεπάγεται $\int_A (\psi - \phi) \geq 0$ και, επομένως, $\int_A \psi \geq \int_A \phi$. □

Ορισμός. Έστω $A, B \in \mathcal{M}$ με $B \subseteq A$ και μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση ϕ στο A. Όταν γράφουμε $\int_B \phi$, δηλαδή το ολοκλήρωμα της ϕ στο B, εξυπακούεται ότι θεωρούμε την ϕ περιορισμένη στο B ώστε να έχει πεδίο ορισμού το B. Ίσως θα ήταν πιο ακριβές να γράφουμε $\int_B (\phi\big|_B)$, αλλά θα αποφύγουμε αυτό το περίπλοκο σύμβολο. Θυμόμαστε, πάντως, ότι η $\phi\big|_B$ είναι μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση στο B.

Λήμμα 3.2. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}$ με $B \subseteq A$ και μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση ϕ στο A. Τότε $\int_B \phi = \int_A (\phi\chi_B)$.*

Απόδειξη. Έστω $\phi = \sum_{k=1}^n a_k\chi_{A_k}$ η κανονική αναπαράσταση της ϕ στο A. Θεωρούμε τα σύνολα $B_k = A_k \cap B \in \mathcal{M}$. Είναι προφανές ότι τα σύνολα αυτά είναι ανά δύο ξένα και ότι η ένωσή τους είναι $= B$. Επίσης, η $\phi\big|_B$ είναι σταθερή $= a_k$ σε κάθε B_k. Δηλαδή, $\phi\big|_B = \sum_{k=1}^n a_k(\chi_{B_k})\big|_B$. Από το Λήμμα 3.1 συνεπάγεται

$$\int_B \phi = \int_B (\phi\big|_B) = \sum_{k=1}^n a_k m(B_k).$$

Από την άλλη μεριά, $\phi\chi_B = \sum_{k=1}^n a_k\chi_{A_k}\chi_B = \sum_{k=1}^n a_k\chi_{A_k\cap B} = \sum_{k=1}^n a_k\chi_{B_k}$. Άρα, πάλι από το Λήμμα 3.1 συνεπάγεται

$$\int_A (\phi\chi_B) = \sum_{k=1}^n a_k m(B_k).$$

Άρα $\int_B \phi = \int_A (\phi\chi_B)$. □

Αξίζει να θυμόμαστε τον τύπο

$$\int_B \phi = \sum_{k=1}^n a_k m(B_k) = \sum_{k=1}^n a_k m(A_k \cap B)$$

που υπάρχει μέσα στην απόδειξη του Λήμματος 3.2.

Λήμμα 3.3. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση ϕ στο A. Επίσης, έστω $E_n \in \mathcal{M}$ $(n \in \mathbb{N})$ ώστε $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n και έστω $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Τότε $\int_{E_n} \phi \to \int_E \phi$.*

Απόδειξη. Έστω $\phi = \sum_{k=1}^m a_k\chi_{A_k}$ η κανονική αναπαράσταση της ϕ στο A. Επειδή $A_k \cap E_n \subseteq A_k \cap E_{n+1}$ για κάθε n και $A_k \cap E = \bigcup_{n=1}^{+\infty}(A_k \cap E_n)$, συνεπάγεται

$$m(A_k \cap E_n) \to m(A_k \cap E).$$

Επομένως,

$$\int_{E_n} \phi = \sum_{k=1}^m a_k m(A_k \cap E_n) \to \sum_{k=1}^m a_k m(A_k \cap E) = \int_E \phi.$$

□

Λήμμα 3.4. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μη αρνητικές μετρήσιμες απλές συναρτήσεις ϕ, ψ και ϕ_n, ψ_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A.*
(1) Αν $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ στο A για κάθε n και $\phi \leq \lim_{n\to+\infty} \phi_n$ στο A, τότε $\int_A \phi \leq \lim_{n\to+\infty} \int_A \phi_n$.
(2) Αν $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ και $\psi_n \leq \psi_{n+1}$ στο A για κάθε n και $\lim_{n\to+\infty} \phi_n \leq \lim_{n\to+\infty} \psi_n$ στο A, τότε $\lim_{n\to+\infty} \int_A \phi_n \leq \lim_{n\to+\infty} \int_A \psi_n$.
(3) Αν $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ και $\psi_n \leq \psi_{n+1}$ στο A για κάθε n και $\lim_{n\to+\infty} \phi_n = \lim_{n\to+\infty} \psi_n$ στο A, τότε $\lim_{n\to+\infty} \int_A \phi_n = \lim_{n\to+\infty} \int_A \psi_n$.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι από την $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ στο A συνεπάγεται η $\int_A \phi_n \leq \int_A \phi_{n+1}$. Επομένως η ακολουθία $\int_A \phi_n$ $(n \in \mathbb{N})$ έχει όριο, δηλαδή υπάρχει το $\lim_{n\to+\infty} \int_A \phi_n$. Το ίδιο, φυσικά, ισχύει και για το $\lim_{n\to+\infty} \int_A \psi_n$.
(1) Θεωρούμε οποιονδήποτε αριθμό λ με $0 < \lambda < 1$ και για κάθε n ορίζουμε το σύνολο

$$E_n = \{x \in A : \lambda\phi(x) \leq \phi_n(x)\}.$$

Επειδή η συνάρτηση $\phi_n - \lambda\phi$ είναι μετρήσιμη και $E_n = \{x \in A : (\phi_n - \lambda\phi)(x) \geq 0\}$, συνεπάγεται $E_n \in \mathcal{M}$ για κάθε n. Επίσης, είναι προφανές ότι $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n και ότι $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Ας δούμε λίγο πιο προσεκτικά τη δεύτερη σχέση. Επειδή $E_n \subseteq A$ για κάθε n, συνεπάγεται $\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n \subseteq A$. Έστω, τώρα, τυχόν $x \in A$. Αν $\phi(x) = 0$, τότε $\lambda\phi(x) = 0$, οπότε η $\phi_n(x) \geq \lambda\phi(x)$ ισχύει για κάθε n, οπότε $x \in E_n$ για κάθε n και, επομένως, $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$.

Αν $\phi(x) > 0$, τότε $\lambda\phi(x) < \phi(x)$. Επειδή $\phi(x) \leq \lim_{n\to+\infty}\phi_n(x)$, συνεπάγεται ότι ισχύει $\lambda\phi(x) \leq \phi_n(x)$ για κάθε $n \geq$ από κάποιον n_0. Άρα ισχύει $x \in E_n$ για κάθε $n \geq n_0$ και, επομένως, $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$ και, επομένως, $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Τώρα, από το Λήμμα 3.3 συνεπάγεται

$$\int_A \phi = \lim_{n\to+\infty} \int_{E_n} \phi.$$

Επειδή ισχύει $\lambda\phi \leq \phi_n$ στο E_n, συνεπάγεται $\int_{E_n}(\lambda\phi) \leq \int_{E_n}\phi_n$. Ακόμη, ισχύει $\int_{E_n}\phi_n = \int_A(\phi_n\chi_{E_n}) \leq \int_A \phi_n$, διότι $\phi_n\chi_{E_n} \leq \phi_n$ στο A. Άρα

$$\lambda \int_A \phi = \lim_{n\to+\infty} \lambda \int_{E_n} \phi = \lim_{n\to+\infty} \int_{E_n}(\lambda\phi) \leq \lim_{n\to+\infty} \int_A \phi_n .$$

Επειδή η τελευταία ανισότητα ισχύει για κάθε λ με $0 < \lambda < 1$ και τα $\int_A \phi$ και $\lim_{n\to+\infty}\int_A \phi_n$ δεν εξαρτώνται από τον λ, παίρνοντας όριο καθώς $\lambda \to 1-$, συμπεραίνουμε ότι $\int_A \phi \leq \lim_{n\to+\infty}\int_A \phi_n$.
(2). Θεωρούμε οποιονδήποτε k και παρατηρούμε ότι, επειδή $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ στο A για κάθε n, συνεπάγεται $\phi_k \leq \lim_{n\to+\infty}\phi_n$ στο A. Άρα $\phi_k \leq \lim_{n\to+\infty}\psi_n$ στο A και, επομένως, από το (1) συνεπάγεται

$$\int_A \phi_k \leq \lim_{n\to+\infty}\int_A \psi_n .$$

Αυτό ισχύει για κάθε k, οπότε $\lim_{k\to+\infty}\int_A \phi_k \leq \lim_{n\to+\infty}\int_A \psi_n$. Αυτό ακριβώς θέλαμε να αποδείξουμε.
(3) Η $\lim_{n\to+\infty}\phi_n = \lim_{n\to+\infty}\psi_n$ δίνει $\lim_{n\to+\infty}\phi_n \leq \lim_{n\to+\infty}\psi_n$ και $\lim_{n\to+\infty}\psi_n \leq \lim_{n\to+\infty}\phi_n$. Άρα από το (2) συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty}\int_A\phi_n \leq \lim_{n\to+\infty}\int_A\psi_n$ και $\lim_{n\to+\infty}\int_A\psi_n \leq \lim_{n\to+\infty}\int_A\phi_n$. Άρα $\lim_{n\to+\infty}\int_A\phi_n = \lim_{n\to+\infty}\int_A\psi_n$. □

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των παρακάτω απλών συναρτήσεων, αφού βρείτε τις κανονικές αναπαραστάσεις τους.

$$\chi_{[0,5]} + 2\chi_{[-1,0)}\,, \quad 3\chi_{[1,7]} + 2\chi_{[2,8]} + \chi_{[-1,4]}\,, \quad \chi_{\mathbb{Q}}\,, \quad 2\chi_{\mathbb{Q}} + 3\chi_{[0,1]}\,.$$

Κατόπιν, υπολογίστε τα ίδια ολοκληρώματα (πολύ πιο εύκολα) χωρίς να βρείτε τις κανονικές αναπαραστάσεις.

3.2 Μη αρνητικές Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις.

Ορισμός. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμη $f : A \to [0,+\infty]$. Θεωρούμε οποιαδήποτε ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων απλών συναρτήσεων $\phi_n : A \to [0,+\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ με τις ιδιότητες: (i) $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$ στο A για κάθε n και (ii) $\phi_n \to f$ στο A. Το ότι υπάρχει τουλάχιστον μια τέτοια ακολουθία εξασφαλίζεται από την Πρόταση 2.15. Κατόπιν, θεωρούμε την ακολουθία των ολοκληρωμάτων $\int_A \phi_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Αυτά τα ολοκληρώματα έχουν ορισθεί στην προηγούμενη ενότητα 3.1 και είναι στοιχεία του $[0,+\infty]$ (Πρόταση 3.1), δηλαδή μη αρνητικοί αριθμοί ή $+\infty$. Επειδή $\phi_n \leq \phi_{n+1}$ στο A, συνεπάγεται από την Πρόταση 3.1 ότι $\int_A \phi_n \leq \int_A \phi_{n+1}$. Άρα η ακολουθία των ολοκληρωμάτων είναι αύξουσα και, επομένως, έχει όριο το οποίο είναι στοιχείο του $[0,+\infty]$. Ορίζουμε το **ολοκλήρωμα Lebesgue** ή, πιο απλά, **ολοκλήρωμα** της f στο A, και το συμβολίζουμε $\int_A f$, να είναι το όριο

$$\int_A f = \lim_{n\to+\infty}\int_A \phi_n .$$

Όπως είπαμε, η Πρόταση 2.15 εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ακολουθίας ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ με τις ιδιότητες (i) και (ii). Εν γένει, υπάρχουν περισσότερες τέτοιες ακολουθίες (για την ίδια f). Έστω ότι ψ_n $(n \in \mathbb{N})$ είναι κι αυτή μια οποιαδήποτε ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων απλών συναρτήσεων με τις ίδιες ιδιότητες: (i) $0 \leq \psi_n \leq \psi_{n+1}$ στο A για κάθε n και (ii) $\psi_n \to f$ στο A. Τότε ισχύει $\lim_{n\to+\infty}\phi_n = \lim_{n\to+\infty}\psi_n$ στο A, οπότε από το Λήμμα 3.4(3) συνεπάγεται $\lim_{n\to+\infty}\int_A\phi_n = \lim_{n\to+\infty}\int_A\psi_n$. Αυτό σημαίνει ότι το $\int_A f$, όπως το ορίσαμε προηγουμένως, *είναι καλώς ορισμένο*.

Πρόταση 3.2. *Έστω $A \in \mathcal{M}$, αριθμός $\lambda \geq 0$ και μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις f, g στο A. Τότε:*
(i) $\int_A f \geq 0$,
(ii) $\int_A (\lambda f) = \lambda \int_A f$,
(iii) $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$ *και,*
(iv) αν $f \leq g$ *στο A, τότε* $\int_A f \leq \int_A g$.

Απόδειξη. (i) Αυτό το έχουμε ήδη αποδείξει.
(ii) Θεωρούμε μετρήσιμες απλές συναρτήσεις $\phi_n : A \to [0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ ώστε $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$ στο A για κάθε n και $\phi_n \to f$ στο A. Συνεπάγεται από τον ορισμό του $\int_A f$ ότι $\int_A \phi_n \to \int_A f$. Τώρα ορίζουμε τις μετρήσιμες απλές συναρτήσεις $\lambda\phi_n : A \to [0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$. Γι αυτές ισχύει $0 \leq \lambda\phi_n \leq \lambda\phi_{n+1}$ στο A για κάθε n και $\lambda\phi_n \to \lambda f$ στο A. Συνεπάγεται από τον ορισμό του $\int_A (\lambda f)$ ότι $\int_A (\lambda\phi_n) \to \int_A (\lambda f)$. Από την Πρόταση 3.1, έχουμε ότι $\int_A (\lambda\phi_n) = \lambda \int_A \phi_n$. Άρα

$$\int_A (\lambda f) = \lim_{n\to+\infty} \int_A (\lambda\phi_n) = \lim_{n\to+\infty} \lambda \int_A \phi_n = \lambda \lim_{n\to+\infty} \int_A \phi_n = \lambda \int_A f.$$

(ii) Εκτός από τις ϕ_n , θεωρούμε και μετρήσιμες απλές συναρτήσεις $\psi_n : A \to [0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ ώστε $0 \leq \psi_n \leq \psi_{n+1}$ στο A για κάθε n και $\psi_n \to g$ στο A. Από τον ορισμό του $\int_A g$ είναι $\int_A \psi_n \to \int_A g$. Τώρα ορίζουμε τις μετρήσιμες απλές συναρτήσεις $\phi_n + \psi_n : A \to [0, +\infty)$ $(n \in \mathbb{N})$. Γι αυτές ισχύει $0 \leq \phi_n + \psi_n \leq \phi_{n+1} + \psi_{n+1}$ στο A για κάθε n και $\phi_n + \psi_n \to f + g$ στο A. Συνεπάγεται από τον ορισμό του $\int_A (f+g)$ ότι $\int_A (\phi_n + \psi_n) \to \int_A (f+g)$. Από την Πρόταση 3.1, $\int_A (\phi_n + \psi_n) = \int_A \phi_n + \int_A \psi_n$. Άρα

$$\int_A (f+g) = \lim_{n\to+\infty} \int_A (\phi_n + \psi_n) = \lim_{n\to+\infty} \big(\int_A \phi_n + \int_A \psi_n \big) = \int_A f + \int_A g.$$

(iii) Θεωρούμε τις ϕ_n και ψ_n , όπως πριν. Επειδή $f \leq g$ στο A, ισχύει $\lim_{n\to+\infty} \phi_n \leq \lim_{n\to+\infty} \psi_n$ στο A. Από το Λήμμα 3.4(2) προκύπτει

$$\int_A f = \lim_{n\to+\infty} \int_A \phi_n \leq \lim_{n\to+\infty} \int_A \psi_n = \int_A g.$$

□

Ορισμός. Έστω $A, B \in \mathcal{M}$ με $B \subseteq A$ και μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f στο A. Όπως και στην περίπτωση των απλών συναρτήσεων, όταν γράφουμε $\int_B f$ θα εννοούμε το ολοκλήρωμα του περιορισμού $f\big|_B$ της f στο B, η οποία είναι μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στο B.

Λήμμα 3.5. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}$ με $B \subseteq A$ και μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f στο A. Τότε $\int_B f = \int_A (f\chi_B)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε μετρήσιμες απλές συναρτήσεις ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε $0 \leq \phi_n \leq \phi_{n+1}$ στο A για κάθε n και $\phi_n \to f$ στο A. Τότε οι $\phi_n\big|_B$ $(n \in \mathbb{N})$ είναι μετρήσιμες απλές συναρτήσεις στο B και ισχύει $0 \leq \phi_n\big|_B \leq \phi_{n+1}\big|_B$ στο B για κάθε n και $\phi_n\big|_B \to f\big|_B$ στο B. Από τον ορισμό του $\int_B f = \int_B (f\big|_B)$ ισχύει $\int_B \phi_n = \int_B (\phi_n\big|_B) \to \int_B (f\big|_B) = \int_B f$. Ομοίως, οι $\phi_n\chi_B$ $(n \in \mathbb{N})$ είναι μετρήσιμες απλές συναρτήσεις στο A και ισχύει $0 \leq \phi_n\chi_B \leq \phi_{n+1}\chi_B$ στο A για κάθε n και $\phi_n\chi_B \to f\chi_B$ στο A. Από τον ορισμό του $\int_A (f\chi_B)$ ισχύει $\int_A (\phi_n\chi_B) \to \int_A (f\chi_B)$. Από το Λήμμα 3.2 έχουμε ότι $\int_B \phi_n = \int_A (\phi_n\chi_B)$ και, επομένως,

$$\int_B f = \lim_{n\to+\infty} \int_B \phi_n = \lim_{n\to+\infty} \int_A (\phi_n\chi_B) = \int_A (f\chi_B).$$

□

Πρόταση 3.3. *Έστω $A, B, C \in \mathcal{M}$ με $B, C \subseteq A$, $B \cap C = \emptyset$ και μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f στο A. Τότε $\int_{B\cup C} f = \int_B f + \int_C f$.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.2 και το Λήμμα 3.5, συνεπάγεται

$$\int_{B\cup C} f = \int_A (f\chi_{B\cup C}) = \int_A \big(f(\chi_B+\chi_C)\big) = \int_A (f\chi_B+f\chi_C) = \int_A (f\chi_B)+\int_A (f\chi_C) = \int_B f+\int_C f.$$

Παρατηρήστε ότι η ισότητα $\chi_{B\cup C} = \chi_B + \chi_C$ ισχύει στο A ακριβώς επειδή τα B, C είναι ξένα. $\square$

Ασκήσεις.

1. Χρησιμοποιήστε τον ορισμό του ολοκληρώματος μη αρνητικών συναρτήσεων για να υπολογίσετε το $\int_{[0,+\infty)} f$ των

$$f = \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{1}{2^k}\chi_{[k-1,k)}\,, \quad f = \sum_{k=1}^{+\infty} \tfrac{1}{k}\chi_{[k-1,k)}\,, \quad f = \sum_{k=1}^{+\infty} k\chi_{(\frac{1}{k+1},\frac{1}{k}]}\,.$$

(Υπόδειξη: Για την πρώτη f δοκιμάστε τις $\phi_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\chi_{[k-1,k)}$ και αποδείξτε ότι είναι μη αρνητικές μετρήσιμες στο $[0,+\infty)$, ότι $\phi_n \le \phi_{n+1}$ και $\phi_n \to f$ στο $[0,+\infty)$.)

3.3 Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις.

Ορισμός. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Θεωρούμε τις $f^+, f^- : A \to [0,+\infty]$ για τις οποίες ισχύει

$$f = f^+ - f^-\,, \qquad |f| = f^+ + f^-$$

στο A. Στην προηγούμενη ενότητα ορίσαμε τα $\int_A f^+$ και $\int_A f^-$ και, τώρα, ορίζουμε το **ολοκλήρωμα Lebesgue** ή, απλούστερα, **ολοκλήρωμα** της f στο A, και το συμβολίζουμε $\int_A f$, ως εξής:

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-\,.$$

Προσοχή! Τα $\int_A f^+$ και $\int_A f^-$ είναι στοιχεία του $[0,+\infty]$. Στην περίπτωση που προκύπτει απροσδιόριστη μορφή, δηλαδή αν $\int_A f^+ = +\infty$ και $\int_A f^- = +\infty$, τότε *δεν ορίζεται το* $\int_A f$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τις εξής περιπτώσεις:
(i) Αν $0 \le \int_A f^+ < +\infty$ και $0 \le \int_A f^- < +\infty$, τότε το $\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-$ είναι πραγματικός αριθμός.
(ii) Αν $\int_A f^+ = +\infty$ και $0 \le \int_A f^- < +\infty$, τότε $\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^- = +\infty$.
(iii) Αν $0 \le \int_A f^+ < +\infty$ και $\int_A f^- = +\infty$, τότε $\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^- = -\infty$.
(iv) Αν $\int_A f^+ = +\infty$ και $\int_A f^- = +\infty$, τότε το $\int_A f$ δεν ορίζεται.

Παρατηρούμε ότι

$$\int_A |f| = \int_A f^+ + \int_A f^-\,.$$

Αυτό είναι άμεση εφαρμογή της Πρότασης 3.2, επειδή οι f^+, f^- είναι μη αρνητικές.

Ορισμός. Με τα ίδια σύμβολα, η f χαρακτηρίζεται **Lebesgue ολοκληρώσιμη** ή, πιο απλά, **ολοκληρώσιμη** στο A αν το $\int_A f$ ορίζεται και είναι αριθμός (και όχι $\pm\infty$).

Λήμμα 3.6. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμη $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο A αν και μόνο αν οι f^+ και f^- είναι ολοκληρώσιμες στο A αν και μόνο αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη στο A.*

Απόδειξη. Σύμφωνα με τις προηγούμενες παρατηρήσεις, το $\int_A f$ είναι αριθμός αν και μόνο αν τα $\int_A f^+$ και $\int_A f^-$ είναι και τα δυο αριθμοί. Επίσης, από την ισότητα $\int_A |f| = \int_A f^+ + \int_A f^-$ (και επειδή και οι τρεις ποσότητες είναι μη αρνητικές) προκύπτει ότι τα $\int_A f^+$ και $\int_A f^-$ είναι και τα δυο αριθμοί αν και μόνο αν το $\int_A |f|$ είναι αριθμός. $\square$

Βάσει του Λήμματος 3.6:

Η f είναι ολοκληρώσιμη στο A αν και μόνο αν $\int_A |f| < +\infty$.

Πρόταση 3.4. *Έστω $A \in \mathcal{M}$, αριθμός λ και ολοκληρώσιμες f, g στο A. Τότε:*
(i) η λf είναι ολοκληρώσιμη στο A και

$$\int_A (\lambda f) = \lambda \int_A f.$$

(ii) η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο A και

$$\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g.$$

(iii) αν $f \leq g$ στο A, τότε $\int_A f \leq \int_A g$.

Απόδειξη. (i) Επειδή $|\lambda| \geq 0$ και $|f| \geq 0$, από την Πρόταση 3.2 συνεπάγεται $\int_A |\lambda f| = \int_A |\lambda||f| = |\lambda| \int_A |f| < +\infty$, διότι $\int_A |f| < +\infty$. Άρα η λf είναι ολοκληρώσιμη. Επομένως, εκτός από τα $\int_A f^+$, $\int_A f^-$ και τα $\int_A (\lambda f)^+$, $\int_A (\lambda f)^-$ είναι αριθμοί.
Αν $\lambda = 0$, τότε, από τον τρόπο που έχει ορισθεί η συνάρτηση λf, ισχύει $\lambda f = 0$ στο A (ακόμη κι αν η f έχει τιμές $\pm\infty$ σε σημεία του A). Ακόμη, επειδή το $\int_A f$ είναι αριθμός, συνεπάγεται $\int_A (\lambda f) = \int_A 0 = 0 = \lambda \int_A f$.
Τώρα, έστω $\lambda > 0$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ και $(\lambda f)^- = \lambda f^-$ στο A. Άρα, πάλι από την Πρόταση 3.2, συνεπάγεται

$$\begin{aligned} \int_A (\lambda f) &= \int_A (\lambda f)^+ - \int_A (\lambda f)^- = \int_A (\lambda f^+) - \int_A (\lambda f^-) = \lambda \int_A f^+ - \lambda \int_A f^- \\ &= \lambda\big(\int_A f^+ - \int_A f^- \big) = \lambda \int_A f. \end{aligned}$$

Τέλος, έστω $\lambda < 0$. Τότε $(\lambda f)^+ = -\lambda f^-$ και $(\lambda f)^- = -\lambda f^+$ στο A. Άρα, και πάλι από την Πρόταση 3.2 (προσέξτε: $-\lambda > 0$), συνεπάγεται

$$\begin{aligned} \int_A (\lambda f) &= \int_A (\lambda f)^+ - \int_A (\lambda f)^- = \int_A (-\lambda f^-) - \int_A (-\lambda f^+) \\ &= -\lambda \int_A f^- + \lambda \int_A f^+ = \lambda\big(\int_A f^+ - \int_A f^- \big) = \lambda \int_A f. \end{aligned}$$

(ii) Από την Πρόταση 3.2 συνεπάγεται $\int_A |f+g| \leq \int_A (|f|+|g|) = \int_A |f| + \int_A |g| < +\infty$, διότι $\int_A |f| < +\infty$ και $\int_A |g| < +\infty$. Άρα η $f+g$ είναι ολοκληρώσιμη και, επομένως, εκτός από τα $\int_A f^+$, $\int_A f^-$, $\int_A g^+$, $\int_A g^-$ και τα $\int_A (f+g)^+$, $\int_A (f+g)^-$ είναι αριθμοί.
Τώρα, ισχύει $(f+g)^+ - (f+g)^- = f+g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$ και, επομένως, $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$ στο A. (Αυτό είναι πολύ εύκολο να αποδειχθεί, αλλά έχει πολλές λεπτομέρειες με τις οποίες ας ασχοληθείτε εσείς. Μην ξεχνάτε ότι, από τον τρόπο που έχει ορισθεί η $f+g$, είναι $(f+g)(x) = 0$ στην περίπτωση που $f(x) = \pm\infty$ και $g(x) = \mp\infty$.) Επειδή όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στην τελευταία ισότητα είναι ≥ 0, από την Πρόταση 3.2 συνεπάγεται

$$\begin{aligned} \int_A (f+g)^+ + \int_A f^- + \int_A g^- &= \int_A \big((f+g)^+ + f^- + g^-\big) = \int_A \big((f+g)^- + f^+ + g^+\big) \\ &= \int_A (f+g)^- + \int_A f^+ + \int_A g^+ \end{aligned}$$

και, επειδή όλα τα ολοκληρώματα είναι αριθμοί,

$$\int_A (f+g)^+ - \int_A (f+g)^- = \int_A f^+ - \int_A f^- + \int_A g^+ - \int_A g^- .$$

Άρα $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$.
(iii) Από την $f \leq g$ συνεπάγεται $f^+ - f^- \leq g^+ - g^-$ και, επομένως, $f^+ + g^- \leq f^- + g^+$ (κι αυτό χρειάζεται λίγες πράξεις για να αποδειχθεί). Άρα, από την Πρόταση 3.2,

$$\int_A f^+ + \int_A g^- = \int_A (f^+ + g^-) \leq \int_A (f^- + g^+) = \int_A f^- + \int_A g^+$$

και, επειδή όλα τα ολοκληρώματα είναι αριθμοί,

$$\int_A f^+ - \int_A f^- \leq \int_A g^+ - \int_A g^- .$$

Άρα $\int_A f \leq \int_A g$. $\square$

Λήμμα 3.7. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}$ με $B \subseteq A$ και μετρήσιμη συνάρτηση f στο A. Τότε:*
(i) $\int_B f = \int_A (f\chi_B)$.
(ii) *η f είναι ολοκληρώσιμη στο B αν και μόνο αν η $f\chi_B$ είναι ολοκληρώσιμη στο A.*

Απόδειξη. (i) Ισχύει $(f\big|_B)^+ = f^+\big|_B$ και $(f\big|_B)^- = f^-\big|_B$. Άρα

$$\int_B f = \int_B (f\big|_B) = \int_B (f\big|_B)^+ - \int_B (f\big|_B)^- = \int_B (f^+\big|_B) - \int_B (f^+\big|_B) = \int_B f^+ - \int_B f^- .$$

Από το Λήμμα 3.5 συνεπάγεται $\int_B f^+ = \int_A (f^+\chi_B)$ και $\int_B f^- = \int_A (f^-\chi_B)$. Επίσης, είναι εύκολο να δει κανείς ότι $f^+\chi_B = (f\chi_B)^+$ και $f^-\chi_B = (f\chi_B)^-$. Άρα

$$\int_B f = \int_A (f^+\chi_B) - \int_A (f^-\chi_B) = \int_A (f\chi_B)^+ - \int_A (f\chi_B)^- = \int_A (f\chi_B).$$

(ii) Από το (i) είναι προφανές ότι το $\int_B f$ είναι αριθμός αν και μόνο αν το $\int_A (f\chi_B)$ είναι αριθμός.
□

Πρόταση 3.5. *Έστω $A, B, C \in \mathcal{M}$ με $B, C \subseteq A$, $B \cap C = \emptyset$ και ολοκληρώσιμη συνάρτηση f στο A. Τότε $\int_{B\cup C} f = \int_B f + \int_C f$.*

Απόδειξη. Επειδή $|f\chi_B| = |f||\chi_B| = |f|\chi_B \le |f|$ στο A, συνεπάγεται $\int_A |f\chi_B| \le \int_A |f| < +\infty$. Άρα η $f\chi_B$ είναι ολοκληρώσιμη στο A. Ομοίως και $f\chi_C$ είναι ολοκληρώσιμη στο A. Επομένως, από την Πρόταση 3.4 και το Λήμμα 3.7, συνεπάγεται

$$\int_{B\cup C} f = \int_A (f\chi_{B\cup C}) = \int_A \big(f(\chi_B + \chi_C)\big) = \int_A (f\chi_B + f\chi_C) = \int_A (f\chi_B) + \int_A (f\chi_C) = \int_B f + \int_C f.$$

□

Ασκήσεις.

1. Έστω $A \in \mathcal{M}$ με $m(A) < +\infty$. Αν η f^2 είναι ολοκληρώσιμη στο A, αποδείξτε ότι και η f είναι ολοκληρώσιμη στο A.
(Υπόδειξη: $|f| \le \frac{1}{2} f^2 + \frac{1}{2}$.)

2. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμες f, g στο A ώστε $f \le g$ στο A. Αποδείξτε ότι, αν υπάρχει το $\int_A f$ και είναι $\neq -\infty$, τότε υπάρχει και το $\int_A g$ και $\int_A f \le \int_A g$.
(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $0 \le g^- \le f^-$ στο A.)

3. Βρείτε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$ αλλά ώστε η $|f|$ να είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$.

3.4 Ο ρόλος των συνόλων μηδενικού μέτρου Lebesgue.

Πρόταση 3.6. *Έστω $A, B \in \mathcal{M}$ με $B \subseteq A$ και $m(B) = 0$. Τότε για κάθε μετρήσιμη f στο A ισχύει $\int_B f = 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε οποιαδήποτε μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση ϕ στο A και έστω $\phi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}$ η κανονική της αναπαράσταση. Από τον τύπο αμέσως μετά το Λήμμα 3.2 συνεπάγεται

$$\int_B \phi = \sum_{k=1}^n a_k m(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^n a_k 0 = 0,$$

διότι $A_k \cap B \subseteq B$ και, επομένως, $m(A_k \cap B) = 0$.
Τώρα, έστω μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση f στο A. Παίρνουμε οποιαδήποτε ακολουθία μη αρνητικών μετρήσιμων απλών ϕ_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε $\phi_n \le \phi_{n+1}$ στο A για κάθε n και $\phi_n \to f$ στο A. Οι σχέσεις αυτές ισχύουν, προφανώς, και στο B. Μόλις αποδείξαμε ότι $\int_B \phi_n = 0$ για κάθε n και από τον ορισμό του $\int_B f$ συνεπάγεται

$$\int_B f = \lim_{n\to+\infty} \int_B \phi_n = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

Τέλος, έστω μετρήσιμη f στο A. Τότε $\int_B f^+ = 0$ και $\int_B f^- = 0$ και, επειδή και τα δυο αυτά ολοκληρώματα είναι αριθμοί,

$$\int_B f = \int_B f^+ - \int_B f^- = 0 - 0 = 0.$$

□

Μπορούμε, λοιπόν, να πούμε ότι τα σύνολα μηδενικού μέτρου είναι *αμελητέα* σε σχέση με το ολοκλήρωμα. Η επόμενη πρόταση καταγράφει μερικά χρήσιμα πορίσματα.

Πρόταση 3.7. *Έστω $A \in \mathcal{M}$, αριθμός λ και μετρήσιμες f, g, h στο A.*
(i) Αν οι f, g είναι ίσες σχεδόν παντού στο A και η f είναι ολοκληρώσιμη στο A, τότε και η g είναι ολοκληρώσιμη στο A και $\int_A f = \int_A g$.
(ii) Αν $h = \lambda f$ σχεδόν παντού στο A και η f είναι ολοκληρώσιμη στο A, τότε και η h είναι ολοκληρώσιμη στο A και $\int_A h = \lambda \int_A f$.
(iii) Αν $h = f + g$ σχεδόν παντού στο A και οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο A, τότε και η h είναι ολοκληρώσιμη στο A και $\int_A h = \int_A f + \int_A g$.
(iv) Αν $f \leq g$ σχεδόν παντού στο A και οι f, g είναι ολοκληρώσιμες στο A, τότε $\int_A f \leq \int_A g$.

Απόδειξη. (i) Έστω $B = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$, οπότε $m(B) = 0$. Δηλαδή, $B \in \mathcal{M}$ και, επομένως, $A \setminus B \in \mathcal{M}$. Από τις Προτάσεις 3.5 (ή 3.3) και 3.6 και επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη στο A, συνεπάγεται

$$\int_{A\setminus B} |f| = \int_{A\setminus B} |f| + \int_B |f| = \int_A |f| < +\infty.$$

Όμως, ισχύει $g = f$ και, επομένως, $|g| = |f|$ στο $A \setminus B$, οπότε

$$\int_{A\setminus B} |g| = \int_{A\setminus B} |f| < +\infty.$$

Τέλος, από τις Προτάσεις 3.3 και 3.6 συνεπάγεται

$$\int_A |g| = \int_{A\setminus B} |g| + \int_B |g| = \int_{A\setminus B} |g| < +\infty.$$

Άρα η g είναι ολοκληρώσιμη στο A. Ομοίως:

$$\int_A g = \int_{A\setminus B} g + \int_B g = \int_{A\setminus B} g = \int_{A\setminus B} f = \int_{A\setminus B} f + \int_B f = \int_A f.$$

(ii) Από την Πρόταση 3.4 συνεπάγεται ότι η λf είναι ολοκληρώσιμη στο A και $\int_A (\lambda f) = \lambda \int_A f$. Άρα, από το (i) έχουμε ότι και η h είναι ολοκληρώσιμη στο A και $\int_A h = \int_A (\lambda f) = \lambda \int_A f$.
(iii) Από την Πρόταση 3.4 συνεπάγεται ότι η $f + g$ είναι ολοκληρώσιμη στο A και $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$. Άρα, από το (i) προκύπτει ότι και η h είναι ολοκληρώσιμη στο A και $\int_A h = \int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$.
(iv) Όπως στο (i) θεωρούμε το $B = \{x \in A : f(x) > g(x)\}$, οπότε $m(B) = 0$. Επειδή $f \leq g$ στο $A \setminus B$, συνεπάγεται

$$\int_A g = \int_{A\setminus B} g + \int_B g = \int_{A\setminus B} g \leq \int_{A\setminus B} f = \int_{A\setminus B} f + \int_B f = \int_A f.$$

□

Πρόταση 3.8. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και ολοκληρώσιμη f στο A. Αν $B = \{x \in A : f(x) = \pm\infty\}$, τότε $m(B) = 0$.*

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι $B \in \mathcal{M}$. Για κάθε n ορίζουμε την μη αρνητική μετρήσιμη απλή συνάρτηση ϕ στο A με τύπο

$$\phi(x) = \begin{cases} n, & \text{αν } x \in B \\ 0, & \text{αν } x \in A \setminus B \end{cases}$$

Τότε ισχύει $\phi \le |f|$ στο A, οπότε

$$n\,m(B) = \int_A \phi \le \int_A |f|.$$

Συνεπάγεται

$$0 \le m(B) \le \tfrac{1}{n} \int_A |f|$$

για κάθε n και, παίρνοντας το όριο καθώς $n \to +\infty$, προκύπτει $m(B) = 0$. $\square$

Ασκήσεις.

1. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμη $f : A \to [0, +\infty]$. Γνωρίζουμε ότι ισχύει $\int_A f \ge 0$. Αποδείξτε ότι, αν $\int_A f = 0$, τότε $f = 0$ σχεδόν παντού στο A.
(Υπόδειξη: Έστω, για κάθε n, το $E_n = \{x \in A : f(x) \ge \frac{1}{n}\}$. Παρατηρήστε ότι $E_n \in \mathcal{M}$ και $\frac{1}{n}\chi_{E_n} \le f$ στο A. Αποδείξτε ότι $\frac{1}{n}m(E_n) \le \int_A f$ και, επομένως, $m(E_n) = 0$. Παρατηρήστε ότι $\{x \in A : f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$.)

2. Έστω $A \in \mathcal{M}$ με $m(A) < +\infty$. Έστω, επίσης, αριθμοί l, u και μετρήσιμη f στο A ώστε $l \le f \le u$ σχεδόν παντού στο A.
(i) Αποδείξτε ότι $lm(A) \le \int_A f \le um(A)$.
(ii) Αποδείξτε ότι η αριστερή ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν και μόνο αν $f = l$ σχεδόν παντού στο A. Ομοίως, για την δεξιά ανισότητα.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη άσκηση.)

3.5 Τα οριακά θεωρήματα.

Αυτή η ενότητα είναι ίσως η πιο σημαντική για τη θεωρία των ολοκληρωμάτων Lebesgue. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, τα αποτελέσματα που θα δούμε τώρα διαχωρίζουν τα ολοκληρώματα Lebesgue από τα ολοκληρώματα Riemann που μαθαίνουμε στον Απειροστικό Λογισμό.

Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης (Lebesgue). *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μη αρνητικές μετρήσιμες $f, f_n : A \to [0, +\infty]$ $(n \in \mathbb{N})$ έτσι ώστε $f_n \le f_{n+1}$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A. Τότε*

$$\int_A f_n \to \int_A f.$$

Απόδειξη. Πρώτη περίπτωση. Θεωρούμε την απλούστερη περίπτωση κατά την οποία οι $f_n \le f_{n+1}$ και $f_n \to f$ ισχύουν σε ολόκληρο το A.
Γνωρίζουμε ότι για κάθε n υπάρχουν μη αρνητικές μετρήσιμες απλές συναρτήσεις $\phi_{n,k}$ $(k \in \mathbb{N})$ στο A ώστε

$$\phi_{n,k} \le \phi_{n,k+1} \quad (k \in \mathbb{N}), \qquad \lim_{k\to+\infty} \phi_{n,k} = f_n$$

στο A. Από τον ορισμό του $\int_A f_n$ συνεπάγεται

$$\int_A f_n = \lim_{k\to+\infty} \int_A \phi_{n,k}\,.$$

Τώρα, ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\phi_k = \max\{\phi_{1,k}\,,\,\dots\,,\phi_{k,k}\}.$$

Είναι σαφές ότι οι ϕ_k $(k \in \mathbb{N})$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες απλές συναρτήσεις στο A. Κατ' αρχάς θα αποδείξουμε ότι

$$\phi_k \le \phi_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

στο A. Αυτό είναι απλό:

$$\begin{aligned}\phi_k = \max\{\phi_{1,k}\,,\,\dots\,,\phi_{k,k}\} &\le \max\{\phi_{1,k+1}\,,\,\dots\,,\phi_{k,k+1}\}\\ &\le \max\{\phi_{1,k+1}\,,\,\dots\,,\phi_{k,k+1}\,,\phi_{k+1,k+1}\} = \phi_{k+1}\,.\end{aligned}$$

Η πρώτη ανισότητα ισχύει διότι $\phi_{1,k} \le \phi_{1,k+1}\,,\,\dots\,,\phi_{k,k} \le \phi_{k,k+1}$ και η δεύτερη ανισότητα ισχύει διότι υπάρχει μια επιπλέον συνάρτηση στο δεύτερο μέλος της. Κατόπιν, θα αποδείξουμε ότι

$$\phi_k \to f$$

στο A. Πρώτα παρατηρούμε ότι

$$\phi_k = \max\{\phi_{1,k}\,,\,\dots\,,\phi_{k,k}\} \le \max\{f_1\,,\,\dots\,,f_k\} = f_k \le f$$

στο A. Η πρώτη ανισότητα ισχύει διότι $\phi_{1,k} \le f_1\,,\,\dots\,,\phi_{k,k} \le f_k$ και η δεύτερη ισότητα ισχύει διότι $f_1 \le \cdots \le f_k$. Κατόπιν παρατηρούμε ότι, επειδή ισχύει $\phi_k \le \phi_{k+1}$ για κάθε k, συνεπάγεται ότι το $\lim_{k\to+\infty}\phi_k$ υπάρχει. Συνδυάζοντας με το ότι $\phi_k \le f$ για κάθε k, προκύπτει

$$\lim_{k\to+\infty}\phi_k \le f$$

στο A. Τέλος, παρατηρούμε ότι για κάθε k και n με $n \le k$ ισχύει, προφανώς, $\phi_k \ge \phi_{n,k}$ και, αφήνοντας το k να τείνει στο $+\infty$,

$$\lim_{k\to+\infty}\phi_k \ge \lim_{k\to+\infty}\phi_{n,k} = f_n$$

για κάθε n. Αφήνοντας, τώρα, το n να τείνει στο $+\infty$,

$$\lim_{k\to+\infty}\phi_k \ge \lim_{n\to+\infty} f_n = f$$

στο A. Άρα αποδείχθηκε ότι $\phi_k \to f$ στο A.
Από τις $\phi_k \le \phi_{k+1}\ \ (k \in \mathbb{N})$ και $\phi_k \to f$ στο A βρίσκουμε, βάσει του ορισμού του $\int_A f$,

$$\int_A \phi_k \to \int_A f.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι έχουμε αποδείξει ότι $\phi_k \le f_k \le f$ στο A για κάθε k. Άρα

$$\int_A \phi_k \le \int_A f_k \le \int_A f$$

για κάθε k και, σύμφωνα με την ιδιότητα παρεμβολής, $\int_A f_k \to \int_A f$.
Η γενική περίπτωση. Σύμφωνα με μια γενική αρχή που διατυπώθηκε στην ενότητα 2.2, όλες ταυτόχρονα οι (αριθμήσιμου πλήθους) ιδιότητες $f_n \le f_{n+1}\ \ (n \in \mathbb{N})$ και $f_n \to f$ ισχύουν σχεδόν παντού στο A. Δηλαδή, υπάρχει κάποιο $B \subseteq A$ με $m(B) = 0$ ώστε όλες οι παραπάνω ιδιότητες να ισχύουν στο $A \setminus B$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της πρώτης περίπτωσης στο $A \setminus B$, βρίσκουμε

$$\int_{A\setminus B} f_n \to \int_{A\setminus B} f.$$

Από τις Προτάσεις 3.3 και 3.6 συνεπάγεται $\int_A f = \int_{A\setminus B} f + \int_B f = \int_{A\setminus B} f$ και, ομοίως, $\int_A f_n = \int_{A\setminus B} f_n$ για κάθε n. Άρα $\int_A f_n \to \int_A f$. □

Λήμμα του Fatou. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μη αρνητικές μετρήσιμες $f_n : A \to [0,+\infty]\ \ (n \in \mathbb{N})$. Τότε*

$$\int_A (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) \le \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n\,.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$g_m = \inf_{n\geq m} f_n$$

για κάθε $m \geq 1$, οπότε $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = \lim_{m\to+\infty} g_m$. Παρατηρούμε, επίσης, ότι ισχύει $0 \leq g_m \leq g_{m+1}$ στο A για κάθε m. Ακόμη, προφανώς, ισχύει $g_m \leq f_m$ στο A και, επομένως, $\int_A g_m \leq \int_A f_m$ για κάθε m. Από αυτό συνεπάγεται $\underline{\lim}_{m\to+\infty} \int_A g_m \leq \underline{\lim}_{m\to+\infty} \int_A f_m$.
Από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης,

$$\int_A (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) = \lim_{m\to+\infty} \int_A g_m = \underline{\lim}_{m\to+\infty} \int_A g_m \leq \underline{\lim}_{m\to+\infty} \int_A f_m \,.$$

Η δεύτερη ισότητα ισχύει διότι, αν υπάρχει το $\lim_{m\to+\infty}$, τότε υπάρχει και το $\underline{\lim}_{m\to+\infty}$ και είναι ίσο με το $\lim_{n\to+\infty}$. □

Παραδείγματα. (1) Έστω $f_n = \chi_{[n,n+\frac{1}{n}]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Όλες οι f_n είναι μετρήσιμες και ≥ 0 στο $\mathbb{R}$.
Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν ο n είναι αρκετά μεγάλος (και, συγκεκριμένα, αν $n \geq n_0 = [x] + 1$), τότε $x \notin [n, n + \frac{1}{n}]$, οπότε $f_n(x) = 0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε και τη σταθερή συνάρτηση $f = 0$ στο $\mathbb{R}$, οπότε

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = 0$$

στο $\mathbb{R}$. Από την άλλη μεριά, $\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[n,n+\frac{1}{n}]} = m([n, n+\frac{1}{n}]) = \frac{1}{n}$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ και, επομένως, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 0$. Επίσης, $\int_{\mathbb{R}} (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$. Επομένως, επιβεβαιώνεται ο κανόνας

$$\int_{\mathbb{R}} (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$$

και, μάλιστα, στην περίπτωση αυτή ισχύει ως ισότητα.
(2) Έστω $f_n = \chi_{[n,n+1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$. Όλες οι f_n είναι μετρήσιμες και ≥ 0 στο $\mathbb{R}$.
Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν ο n είναι αρκετά μεγάλος, ισχύει $x \notin [n, n + 1]$, οπότε $f_n(x) = 0$. Άρα $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = 0$$

στο $\mathbb{R}$. Τώρα, $\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[n,n+1]} = m([n, n + 1]) = 1$, οπότε $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$, οπότε $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 1$. Ακόμη, $\int_{\mathbb{R}} (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$. Άρα, και πάλι επιβεβαιώνεται ο κανόνας

$$\int_{\mathbb{R}} (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$$

αλλά στην περίπτωση αυτή ισχύει ως γνήσια ανισότητα.
(3) Έστω $f_{2k-1} = \chi_{[0,1]}$ και $f_{2k} = \chi_{[2,3]}$ (με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$) για κάθε k.
Αν $x \notin [0, 1] \cup [2, 3]$, ισχύει $f_n(x) = 0$ για κάθε n, οπότε $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ και, επομένως, $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Αν $x \in [0, 1]$, τότε $f_n(x) = 1$ για κάθε περιττό n και $f_n(x) = 0$ για κάθε άρτιο n. Άρα για κάθε m ισχύει $\inf_{n\geq m} f_n(x) = \inf\{0, 1\} = 0$, οπότε $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{m\to+\infty} 0 = 0$. Ομοίως, αποδεικνύεται ότι $\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ για κάθε $x \in [2, 3]$. Άρα

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = 0$$

στο $\mathbb{R}$. Άρα $\int_{\mathbb{R}} (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) = \int_{\mathbb{R}} 0 = 0$.
Επίσης, $\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]} = m([0, 1]) = 1$, αν ο n είναι περιττός, και $\int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[2,3]} = m([2, 3]) = 1$, αν ο n είναι άρτιος. Άρα $\int_{\mathbb{R}} f_n = 1$ για κάθε n, οπότε $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 1$. Άρα $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 1$, οπότε και πάλι επιβεβαιώνεται ο κανόνας

$$\int_{\mathbb{R}} (\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n$$

και (πάλι) στην περίπτωση αυτή ισχύει ως γνήσια ανισότητα.

Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης. *Έστω $A \in \mathcal{M}$, μετρήσιμες $f, f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$ και ολοκληρώσιμη $g : A \to [0, +\infty]$ έτσι ώστε $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A. Τότε*

$$\int_A f_n \to \int_A f.$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς βλέπουμε ότι ισχύουν όλες ταυτόχρονα οι (αριθμήσιμου πλήθους) ιδιότητες $|f_n| \leq g$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A. Επομένως, ισχύει και η $|f| \leq g$ σχεδόν παντού στο A.
Επειδή $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού στο A, συνεπάγεται $\int_A |f_n| \leq \int_A g < +\infty$, οπότε κάθε f_n είναι ολοκληρώσιμη στο A. Ομοίως, και η f είναι ολοκληρώσιμη στο A.
Εύκολα βλέπουμε ότι από την $|f_n| \leq g$ συνεπάγονται οι

$$g + f_n \geq 0, \qquad g - f_n \geq 0$$

σχεδόν παντού στο A. Επίσης, ισχύει

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}(g+f_n) = g + \underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = g+f, \qquad \underline{\lim}_{n\to+\infty}(g-f_n) = g - \overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n = g-f$$

σχεδόν παντού στο A. Από το Λήμμα του Fatou προκύπτει

$$\int_A (g+f) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A (g+f_n), \qquad \int_A (g-f) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A (g-f_n).$$

Άρα, από την Πρόταση 3.4,

$$\int_A g + \int_A f \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \big(\int_A g + \int_A f_n\big), \qquad \int_A g - \int_A f \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \big(\int_A g - \int_A f_n\big).$$

Επομένως,

$$\int_A g + \int_A f \leq \int_A g + \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n\,, \qquad \int_A g - \int_A f \leq \int_A g - \overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n\,.$$

Επειδή το $\int_A g$ είναι αριθμός,

$$\int_A f \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n\,, \qquad \int_A f \geq \overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n\,.$$

Τέλος, από τη γενική ανισότητα $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \leq \overline{\lim}_{n\to+\infty}$ συνεπάγεται $\underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n = \int_A f$, οπότε $\int_A f_n \to \int_A f$. □

Θεώρημα 3.1. *Έστω $A \in \mathcal{M}$ και $E_n \subseteq A$, $E_n \in \mathcal{M}$ $(n \in \mathbb{N})$ ώστε $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n. Επίσης, έστω $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Αν η f είναι μετρήσιμη στο A και ≥ 0 σχεδόν παντού στο A ή αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο A, τότε*

$$\int_{E_n} f \to \int_E f.$$

Απόδειξη. (1) Έστω ότι η $f : A \to [0, +\infty]$ είναι μετρήσιμη στο A. Επειδή $E_n \subseteq E_{n+1}$ για κάθε n και $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$, συνεπάγεται $\chi_{E_n} \leq \chi_{E_{n+1}}$ στο A για κάθε n και $\chi_{E_n} \to \chi_E$ στο A. Άρα, προφανώς,

$$0 \leq f\chi_{E_n} \leq f\chi_{E_{n+1}}\,, \qquad f\chi_{E_n} \to f\chi_E$$

στο A και από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης συνεπάγεται

$$\int_{E_n} f = \int_A (f\chi_{E_n}) \to \int_A (f\chi_E) = \int_E f.$$

(2) Έστω ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο A. Όπως στο (1), παρατηρούμε ότι $f\chi_{E_n} \to f\chi_E$ στο A. Επίσης, $|f\chi_{E_n}| \leq |f|$ στο A και, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, η απόδειξη τελειώνει όπως και στο (1). □

Παραδείγματα. (1) Έστω $f_n = \sqrt{n}\chi_{(0,\frac{1}{n})} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \ (n \in \mathbb{N})$. Κάθε f_n είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\int_{\mathbb{R}} f_n = \sqrt{n}\, m((0,\frac{1}{n})) = \sqrt{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Άρα $\int_{\mathbb{R}} f_n \to 0$.
Επίσης, είναι εύκολο να δει κανείς ότι για κάθε x ισχύει $f_n(x) \to 0$. Πράγματι, αν $x \leq 0$, τότε $f_n(x) = 0$ για κάθε n και, αν $x > 0$, τότε για αρκετά μεγάλο n ισχύει $x \notin (0,\frac{1}{n})$, οπότε $f_n(x) = 0$. Επομένως, $f_n \to 0$ στο $\mathbb{R}$. Προφανώς, $\int_{\mathbb{R}} 0 = 0$, οπότε

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \to \int_{\mathbb{R}} 0.$$

Αυτό είναι και το συμπέρασμα του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης αλλά για να επιβεβαιωθεί το θεώρημα αυτό, πρέπει να δούμε αν υπάρχει κάποια ολοκληρώσιμη $g : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ με την ιδιότητα:

$$|f_n| \leq g$$

σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ για κάθε n.
Μια προσεκτική σχεδίαση των γραφημάτων των f_n δείχνει ότι τέτοια συνάρτηση g είναι, για παράδειγμα, η

$$g = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}.$$

Αυτή η g είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$, διότι κάθε $\chi_{[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}$ είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης, ισχύει $g \geq 0$ στο $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει το $\int_{\mathbb{R}} g$. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3.1. Θεωρούμε τα σύνολα $[\frac{1}{n},1) \ \ (n \in \mathbb{N})$ και παρατηρούμε ότι έχουν τις ιδιότητες: $[\frac{1}{n},1) \subseteq [\frac{1}{n+1},1)$ για κάθε n και $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[\frac{1}{n},1) = (0,1)$. Άρα, επειδή $g \geq 0$,

$$\int_{[\frac{1}{n},1)} g \to \int_{(0,1)} g.$$

Κατόπιν, βλέπουμε ότι $g = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}\chi_{[\frac{1}{k+1},\frac{1}{k})}$ στο $[\frac{1}{n},1)$, οπότε

$$\int_{[\frac{1}{n},1)} g = \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}\, m\big([\tfrac{1}{k+1},\tfrac{1}{k})\big) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{k(k+1)}.$$

Άρα

$$\int_{(0,1)} g = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{k}}{k(k+1)} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} < +\infty.$$

Τέλος, επειδή $g = 0$ στο $(-\infty,0] \cup [1,+\infty)$, συνεπάγεται

$$\int_{\mathbb{R}} g = \int_{(-\infty,0]\cup[1,+\infty)} g + \int_{(0,1)} g = 0 + \int_{(0,1)} g < +\infty$$

και, επομένως, η g είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$.
Υπάρχει κι άλλος τρόπος να αποδειχτεί ότι $\int_{(0,1)} g < +\infty$. Μπορούμε να δούμε πολύ εύκολα (παρατηρώντας, για παράδειγμα, το γράφημα της g) ότι

$$g(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

για κάθε $x \in (0,1)$. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε ως παράδειγμα ότι αν $h : (0,1) \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, τότε $\int_{(0,1)} h = 2$. Άρα $\int_{(0,1)} g \leq \int_{(0,1)} h = 2$ και, επομένως, $\int_{(0,1)} g < +\infty$.
(2) Έστω $f_n = n\chi_{(0,\frac{1}{n})} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \ (n \in \mathbb{N})$. Κάθε f_n είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\int_{\mathbb{R}} f_n = n\, m((0,\frac{1}{n})) = n\frac{1}{n} = 1$. Άρα $\int_{\mathbb{R}} f_n \to 1$.
Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, εύκολα βλέπουμε ότι για κάθε x ισχύει $f_n(x) \to 0$. Άρα, $f_n \to 0$ στο $\mathbb{R}$. Όμως,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n \not\to \int_{\mathbb{R}} 0.$$

Για να δούμε αν αυτό δεν διαφωνεί με το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, πρέπει να αποδείξουμε ότι *δεν* υπάρχει κάποια ολοκληρώσιμη $g : \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ με την ιδιότητα:

$$|f_n| \leq g$$

σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ για κάθε n. Με άλλα λόγια, πρέπει να αποδείξουμε ότι, αν για οποιαδήποτε μετρήσιμη $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ ισχύει $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε θα ισχύει $\int_{\mathbb{R}} g = +\infty$.
Μια προσεκτική σχεδίαση των γραφημάτων των f_n δείχνει ότι για κάθε g με αυτήν την ιδιότητα (δηλαδή: $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ για κάθε n) πρέπει να ισχύει

$$g \geq g_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} n\chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}$$

σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.
Αυτό σημαίνει ότι αρκεί να αποδείξουμε ότι $\int_{\mathbb{R}} g_0 = +\infty$, αφού αυτό συνεπάγεται $\int_{\mathbb{R}} g = +\infty$.
Αυτή η g_0 είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$, διότι κάθε $\chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n})}$ είναι μετρήσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης, $g_0 \geq 0$ στο $\mathbb{R}$, οπότε υπάρχει το $\int_{\mathbb{R}} g_0$. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το Θεώρημα 3.1. Θεωρούμε τα σύνολα $[\frac{1}{n}, 1)$ $(n \in \mathbb{N})$ και παρατηρούμε ότι έχουν τις ιδιότητες: $[\frac{1}{n}, 1) \subseteq [\frac{1}{n+1}, 1)$ για κάθε n και $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n}, 1) = (0, 1)$. Άρα, επειδή $g_0 \geq 0$,

$$\int_{[\frac{1}{n}, 1)} g_0 \to \int_{(0,1)} g_0 \,.$$

Κατόπιν, βλέπουμε ότι $g_0 = \sum_{k=1}^{n-1} k\chi_{[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k})}$ στο $[\frac{1}{n}, 1)$, οπότε

$$\int_{[\frac{1}{n}, 1)} g_0 = \sum_{k=1}^{n-1} km\big([\tfrac{1}{k+1}, \tfrac{1}{k})\big) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \,.$$

Άρα

$$\int_{(0,1)} g_0 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k+1} = +\infty.$$

Τέλος, επειδή $g_0 = 0$ στο $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, συνεπάγεται

$$\int_{\mathbb{R}} g_0 = \int_{(-\infty,0]\cup[1,+\infty)} g_0 + \int_{(0,1)} g_0 = 0 + \int_{(0,1)} g_0 = +\infty.$$

Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, υπάρχει κι άλλος τρόπος να αποδειχτεί ότι $\int_{(0,1)} g_0 = +\infty$. Μπορούμε να δούμε πολύ εύκολα ότι

$$g_0(x) \geq \frac{1}{2x}$$

για κάθε $x \in (0, 1)$. Στην επόμενη ενότητα θα δούμε ως παράδειγμα ότι αν $h : (0, 1) \to \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \frac{1}{x}$, τότε $\int_{(0,1)} h = +\infty$. Άρα $\int_{(0,1)} g_0 \geq \frac{1}{2} \int_{(0,1)} h = +\infty$ και, επομένως, $\int_{(0,1)} g_0 = +\infty$.
(3) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [1, +\infty)$ με τύπο

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \chi_{[n,n+1)} \,.$$

Η συνάρτηση είναι μετρήσιμη στο $[1, +\infty)$, διότι κάθε $\chi_{[n,n+1)}$ είναι μετρήσιμη στο $[1, +\infty)$. Όμως, η f δεν έχει σταθερό πρόσημο στο $[1, +\infty)$, οπότε δεν είναι βέβαιο ότι υπάρχει το $\int_{[1,+\infty)} f$. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$f^+ = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} \chi_{[2k-1,2k)}$$

και

$$f^- = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} \chi_{[2k,2k+1)} \,.$$

Αν ορίσουμε $g_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1} \chi_{[2k-1,2k)}$, τότε οι g_m $(m \in \mathbb{N})$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις στο $[1, +\infty)$ με τις ιδιότητες: $g_m \leq g_{m+1}$ στο $[1, +\infty)$ για κάθε m και $g_m \to f^+$ στο $[1, +\infty)$. Άρα

$$\begin{aligned} \int_{[1,+\infty)} f^+ &= \lim_{m\to+\infty} \int_{[1,+\infty)} g_m = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1} m\big([2k-1, 2k)\big) \\ &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k-1} \geq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty. \end{aligned}$$

Ορίζοντας τις $h_m = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k}\chi_{[2k,2k+1)}$, με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{[1,+\infty)} f^- &= \lim_{m\to+\infty} \int_{[1,+\infty)} h_m = \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k} m\big([2k,2k+1)\big) \\ &= \lim_{m\to+\infty} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι $\int_{[1,+\infty)} f^+ = \int_{[1,+\infty)} f^- = +\infty$, οπότε το $\int_{[1,+\infty)} f = \int_{[1,+\infty)} f^+ - \int_{[1,+\infty)} f^-$ δεν ορίζεται.

Θα παρατηρήσουμε κάτι ακόμη. Η f είναι ίση με την $\sum_{n=1}^{m-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\chi_{[n,n+1)}$ στο $[1,m)$. Άρα

$$\int_{[1,m)} f = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} m\big([n,n+1)\big) = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} .$$

Είναι γνωστό ότι το όριο

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{[1,m)} f = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Παρατηρήστε, επίσης, ότι τα σύνολα $[1,m)$ έχουν τις ιδιότητες: $[1,m) \subseteq [1,m+1)$ για κάθε m και $\bigcup_{m=1}^{+\infty}[1,m) = [1,+\infty)$. Όμως, δεν ισχύει $\int_{[1,m)} f \to \int_{[1,+\infty)} f$. Αυτό δεν αντιφάσκει με το Θεώρημα 3.1, διότι η f δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $[1,+\infty)$.

Ασκήσεις.

1. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμη $f : A \to [0,+\infty]$.
   (1) **Ανισότητα του Chebyshev.** Αποδείξτε ότι για κάθε $\lambda > 0$ ισχύει
   $$m\big(\{x \in A : f(x) \geq \lambda\}\big) \leq \frac{1}{\lambda}\int_A f.$$
   (Υπόδειξη: Αν $B = \{x \in A : f(x) \geq \lambda\}$, τότε $\lambda\chi_B \leq f$ στο A.)
   (2) Αν $\int_A f < +\infty$, αποδείξτε ότι $\lim_{\lambda\to+\infty} \lambda m\big(\{x \in A : f(x) \geq \lambda\}\big) = 0$.

2. **Θεώρημα Φραγμένης Σύγκλισης**. Έστω $A \in \mathcal{M}$ με $m(A) < +\infty$, αριθμός $M \geq 0$ και μετρήσιμες f, f_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε $|f_n| \leq M$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A. Αποδείξτε ότι $\int_A f_n \to \int_A f$.
   (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης με κατάλληλη g.)

3. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμες f, f_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε $0 \leq f_n \leq f$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A. Αποδείξτε ότι $\int_A f_n \to \int_A f$.
   (Υπόδειξη: Από την $f_n \leq f$ συνεπάγεται $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n \leq \int_A f$ και χρησιμοποιήστε και το λήμμα του Fatou.)

4. Έστω $A \in \mathcal{M}$, μετρήσιμες f_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A και ολοκληρώσιμη h στο A ώστε $h \leq f_n$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n. Αποδείξτε ότι $\int_A(\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n$.
   (Υπόδειξη: Θεωρήστε τις $f_n - h$.)

5. Έστω $A \in \mathcal{M}$, μετρήσιμες f_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A και ολοκληρώσιμη g στο A ώστε $|f_n| \leq g$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n. Αποδείξτε ότι $\int_A(\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n$ και $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_A f_n \leq \int_A(\overline{\lim}_{n\to+\infty} f_n)$.
   (Υπόδειξη: Δείτε την απόδειξη του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης.)

6. Έστω $A \in \mathcal{M}$ με $m(A) < +\infty$ και μετρήσιμες f, f_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο A. Αποδείξτε ότι $\int_A |f_n - f| \to 0$.
   (Υπόδειξη: Αν $M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in A\}$, τότε $M_n \to 0$.)

7. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμη f στο A ώστε $f \geq 0$ σχεδόν παντού στο A. Θεωρήστε τις συναρτήσεις $f_n = \min\{f, n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ και αποδείξτε ότι $\int_A f_n \to \int_A f$.
(Υπόδειξη: Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης.)

8. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και ολοκληρώσιμη f στο A. Θεωρήστε τις $f_n = \max\big\{\min\{f, n\}, -n\big\}$ $(n \in \mathbb{N})$ και αποδείξτε ότι $\int_A f_n \to \int_A f$.
(Υπόδειξη: Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.)

9. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμες f, f_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε $f_n \geq 0$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n, $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A, $\int_A f_n \to \int_A f$ και $\int_A f < +\infty$. Αποδείξτε ότι για κάθε $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{M}$ ισχύει $\int_B f_n \to \int_B f$.
(Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Λήμμα του Fatou στα $B, A \setminus B$ και αποδείξτε ότι $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \int_B f_n \leq \int_B f \leq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_B f_n$.)

10. Έστω $A \in \mathcal{M}$, μετρήσιμες f, f_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A και ολοκληρώσιμες g, g_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε $|f_n| \leq g_n$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n, $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A, $g_n \to g$ σχεδόν παντού στο A και $\int_A g_n \to \int_A g$. Αποδείξτε ότι $\int_A f_n \to \int_A f$.
(Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Λήμμα του Fatou στις $g_n + f_n$ και $g_n - f_n$.)

11. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και ολοκληρώσιμες f, f_n $(n \in \mathbb{N})$. Αποδείξτε ότι, αν $\int_A |f_n - f| \to 0$, τότε $\int_A |f_n| \to \int_A |f|$.
(Υπόδειξη: Παρατηρήστε ότι $\big|\int_A |f_n| - \int_A |f|\big| \leq \int_A |f_n - f|$.)

12. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και ολοκληρώσιμες f, f_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A. Αν $\int_A |f_n| \to \int_A |f|$, αποδείξτε ότι $\int_A |f_n - f| \to 0$.
(Υπόδειξη: Εφαρμόστε την προπροηγούμενη άσκηση στις $F_n = |f_n - f|$, $G_n = |f_n| + |f|$, $F = 0$ και $G = 2|f|$.)

13. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και $E_n \subseteq A$, $E_n \in \mathcal{M}$ $(n \in \mathbb{N})$ ώστε τα E_n να είναι ξένα ανά δύο. Επίσης, έστω $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n$. Αν η f είναι μετρήσιμη στο A και ≥ 0 σχεδόν παντού στο A ή αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο A, αποδείξτε ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{E_n} f = \int_E f.$$

(Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα 3.1 στα $F_n = E_1 \cup \cdots \cup E_n$.)

14. **Θεώρημα του B. Levi.** Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμες f_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A ώστε $f_n \geq 0$ σχεδόν παντού στο A για κάθε n. Αποδείξτε ότι

$$\int_A \big(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A f_n .$$

(Υπόδειξη: Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης.)

15. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμες f_n $(n \in \mathbb{N})$ στο A τέτοιες ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_A |f_n| < +\infty$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο A. Αν η s είναι μετρήσιμη και $s = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ σχεδόν παντού στο A, αποδείξτε ότι

$$\int_A s = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_A f_n .$$

(Υπόδειξη: Από την προηγούμενη άσκηση συνεπάγεται ότι η $S = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n|$ είναι ολοκληρώσιμη στο A και, επομένως, $S = \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n| < +\infty$ σχεδόν παντού στο A. Κατόπιν, εφαρμόστε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης στις $s_n = f_1 + \cdots + f_n$, στην s και στην S.)

16. Αν $p > -1$, αποδείξτε ότι

$$\int_{(0,n)} (1 - \tfrac{x}{n})^n x^p \, dx \to \int_{(0,+\infty)} e^{-x} x^p \, dx.$$

17. Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο $(0,1)$, αποδείξτε ότι

$$\int_{(0,1)} x^n f(x)\,dx \to 0.$$

(Υπόδειξη: Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης.)

18. Έστω $f_{2k} = \chi_{[0,1]}$ και $f_{2k-1} = \chi_{[2,3]}$ στο $\mathbb{R}$ $(k \in \mathbb{N})$. Αποδείξτε ότι για την (f_n) ισχύουν όλες οι υποθέσεις του Λήμματος του Fatou και ότι $\int_{\mathbb{R}}(\underline{\lim}_{n\to+\infty} f_n) < \underline{\lim}_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f$.

19. Έστω $E_n \in \mathcal{M}$ για κάθε n. Για οποιονδήποτε k ορίζουμε

$$G = \{x : x \in E_n \text{ για τουλάχιστον } k \text{ διαφορετικές τιμές του } n\}.$$

Αποδείξτε ότι $G \in \mathcal{M}$ και

$$m(G) \leq \tfrac{1}{k}\sum_{n=1}^{+\infty} m(E_n).$$

(Υπόδειξη: Θεωρήστε την $\sum_{n=1}^{+\infty}\chi_{E_n}$.)

20. Έστω $A \in \mathcal{M}$ με $m(A) < +\infty$ και μετρήσιμη f στο A. Αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο A αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{+\infty} m\big(\{x \in A : |f(x)| \geq n\}\big) < +\infty.$$

21. Έστω $A \in \mathcal{M}$ και μετρήσιμη f στο A ώστε $f \geq 0$ σχεδόν παντού στο A. Για κάθε n ορίζουμε

$$s_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \tfrac{k}{2^n} m\big(\{x \in A : \tfrac{k}{2^n} \leq f(x) < \tfrac{k+1}{2^n}\}\big).$$

(1) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο A, αποδείξτε ότι $0 \leq s_n < +\infty$ για κάθε n και

$$s_n \to \int_A f.$$

(Υπόδειξη: Έστω $B_n = \{x \in A : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n}\}$. Θεωρήστε τις $f_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{2^n}\chi_{B_n}$ και αποδείξτε ότι $f_n \leq f_{n+1}$ και $f_n \to f$ σχεδόν παντού στο A.)
(2) Έστω, επιπλέον, ότι $m(A) < +\infty$ και $f < +\infty$ σχεδόν παντού στο A. Τότε, αντιστρόφως, αν $0 \leq s_n < +\infty$ για έναν τουλάχιστον n, αποδείξτε ότι αυτό ισχύει για κάθε n και ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο A.

3.6 Σχέση ολοκληρωμάτων Lebesgue και Riemann.

Θεώρημα 3.2. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η f είναι και Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)\,dx,$$

όπου με $\int_{[a,b]} f$ συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue της f ενώ με $\int_a^b f(x)\,dx$ συμβολίζουμε το ολοκλήρωμα Riemann.

Απόδειξη. Έστω ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Τότε η f είναι φραγμένη στο $[a,b]$, οπότε μπορούμε να θέσουμε

$$M = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\} < +\infty, \qquad m = \inf\{f(x) : a \leq x \leq b\} > -\infty.$$

Το κριτήριο ολοκληρωσιμότητας του Riemann λέει ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχη διαμέριση $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ του $[a,b]$ ώστε

$$\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) < \epsilon,$$

όπου $M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$ και $m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$. Επίσης, ισχύει

$$\sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Είναι φανερό ότι

$$m \le m_k \qquad \text{και} \qquad M_k \le M$$

για κάθε k.
Τώρα, ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$\psi = m_1\chi_{[x_0,x_1)} + \cdots + m_{n-1}\chi_{[x_{n-2},x_{n-1})} + m_n\chi_{[x_{n-1},x_n]}\,,$$

$$\phi = M_1\chi_{[x_0,x_1)} + \cdots + M_{n-1}\chi_{[x_{n-2},x_{n-1})} + M_n\chi_{[x_{n-1},x_n]}\,.$$

Οι τιμές της ψ είναι οι $m_1, \dots, m_n$ και οι τιμές της ϕ είναι οι $M_1, \dots, M_n$, οπότε οι συναρτήσεις αυτές είναι απλές. Επίσης, είναι Lebesgue μετρήσιμες αφού κάθε διάστημα είναι Lebesgue μετρήσιμο και, επομένως, η αντίστοιχη χαρακτηριστική συνάρτηση είναι Lebesgue μετρήσιμη. Επειδή όλες οι τιμές της ψ είναι $\ge m$, ισχύει $m \le \psi$ στο $[a,b]$. Ομοίως, επειδή όλες οι τιμές της ϕ είναι $\le M$, ισχύει $\phi \le M$ στο $[a,b]$. Ακόμη, επειδή σε κάθε $[x_{k-1}, x_k]$ ισχύει $m_k \le f(x) \le M_k$, συνεπάγεται $\psi \le f \le \phi$ στο $[a,b]$. Συνοψίζουμε:

$$m \le \psi \le f \le \phi \le M$$

στο $[a,b]$. Παρατηρούμε ότι $\int_{[a,b]} \psi = \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1})$ και $\int_{[a,b]} \phi = \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1})$, οπότε οι αρχικές ανισότητες γράφονται

$$\int_{[a,b]} \phi - \int_{[a,b]} \psi < \epsilon$$

και

$$\int_{[a,b]} \psi \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_{[a,b]} \phi.$$

Εφαρμόζοντας τα προηγούμενα με $\epsilon = \frac{1}{n}$, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν Lebesgue μετρήσιμες απλές συναρτήσεις ψ_n και ϕ_n στο $[a,b]$ με τις ιδιότητες

$$m \le \psi_n \le f \le \phi_n \le M$$

στο $[a,b]$,

$$\int_{[a,b]} \phi_n - \int_{[a,b]} \psi_n < \frac{1}{n}$$

και

$$\int_{[a,b]} \psi_n \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_{[a,b]} \phi_n\,.$$

Από τις δυο τελευταίες ιδιότητες είναι φανερό ότι προκύπτει

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \psi_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} \phi_n = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Τέλος, ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$g = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \psi_n\,, \qquad h = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \phi_n\,,$$

οι οποίες είναι Lebesgue μετρήσιμες και ισχύει

$$g \le f \le h$$

στο $[a,b]$.
Τώρα, εφαρμόζουμε το Λήμμα του Fatou στις $\phi_n - m \ge 0$ και βρίσκουμε

$$\int_{[a,b]} \underline{\lim}_{n\to+\infty} (\phi_n - m) \le \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{[a,b]} (\phi_n - m).$$

Το αριστερό μέλος είναι $= \int_{[a,b]}(h-m) = \int_{[a,b]} h - m(b-a)$ και το δεξιό $= \underline{\lim}_{n\to+\infty} \big(\int_{[a,b]} \phi_n - m(b-a)\big) = \int_a^b f(x)\,dx - m(b-a)$. Άρα η ανισότητα γίνεται

$$\int_{[a,b]} h \le \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ομοίως, εφαρμόζουμε το Λήμμα του Fatou στις $M - \psi_n \ge 0$ και βρίσκουμε

$$\int_{[a,b]} \underline{\lim}_{n\to+\infty}(M-\psi_n) \le \underline{\lim}_{n\to+\infty} \int_{[a,b]}(M-\psi_n).$$

Το αριστερό μέλος είναι $= \int_{[a,b]}(M-g) = M(b-a) - \int_{[a,b]} g$ και το δεξιό $= \underline{\lim}_{n\to+\infty} \big(M(b-a) - \int_{[a,b]} \psi_n\big) = M(b-a) - \int_a^b f(x)\,dx$. Άρα η ανισότητα γίνεται

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_{[a,b]} g.$$

Από τις δυο τελευταίες παραγράφους συμπεραίνουμε ότι $\int_{[a,b]} h \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_{[a,b]} g$. Επειδή $g \le h$ στο $[a,b]$, συνεπάγεται $\int_{[a,b]} g \le \int_{[a,b]} h$ και, επομένως,

$$\int_{[a,b]} g = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} h.$$

Ειδικώτερα, ισχύει $\int_{[a,b]}(h-g) = 0$. Θεωρούμε τυχόντα k και το σύνολο $E_k = \{x \in [a,b] : (h-g)(x) \ge \frac{1}{k}\}$. Τότε $h-g \ge \frac{1}{k}\chi_{E_k}$ στο $[a,b]$, οπότε $0 = \int_{[a,b]}(h-g) \ge \frac{1}{k}\int_{[a,b]} \chi_{E_k} = \frac{1}{k}m(E_k)$. Άρα $m(E_k) = 0$ για κάθε k. Αν θέσουμε $E = \{x \in [a,b] : (h-g)(x) > 0\}$, τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k$. Άρα $m(E) \le \sum_{k=1}^{+\infty} m(E_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 0 = 0$. Δηλαδή, $m(E) = 0$ και, επομένως, $h - g = 0$ σχεδόν παντού στο $[a,b]$. Άρα

$$g = f = h \qquad \text{σχεδόν παντού στο } [a,b].$$

Η g (και η h) είναι Lebesgue μετρήσιμη στο $[a,b]$, οπότε, βάσει της Πρότασης 2.12, και η f είναι Lebesgue μετρήσιμη στο $[a,b]$. Για τον ίδιο λόγο, βάσει της Πρότασης 3.7, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} g$. Άρα

$$\int_{[a,b]} f = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

`Παραδείγματα.` (1) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} : [0,1] \to \mathbb{R}$. Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται **συνάρτηση Dirichlet.** Ο τύπος της είναι, φυσικά,

$$\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 \le x \le 1 \text{ και } x \text{ είναι ρητός} \\ 0, & \text{αν } 0 \le x \le 1 \text{ και } x \text{ είναι άρρητος} \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ότι το $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ είναι αριθμήσιμο, οπότε $m(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = 0$. Άρα η $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη στο $[0,1]$.
Επειδή $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \ge 0$ στο $[0,1]$, υπάρχει το $\int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ και, μάλιστα,

$$\int_{[0,1]} \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = m(\mathbb{Q}\cap[0,1]) = 0.$$

Άρα η συνάρτηση είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.
Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η ίδια συνάρτηση είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$. Τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει αντίστοιχη διαμέριση $x_0 = 0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = 1$ του $[0,1]$ ώστε

$$\sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) < \epsilon,$$

όπου $M_k = \sup\{\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$ και $m_k = \inf\{\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$. Παρατηρούμε ότι, λόγω της πυκνότητας του $\mathbb{Q}$ αλλά και του $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ στο $\mathbb{R}$, σε κάθε διάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ υπάρχουν τουλάχιστον ένας ρητός και τουλάχιστον ένας άρρητος. Συνεπάγεται ότι $\{\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\} = \{0, 1\}$ και, επομένως, $M_k = 1$ και $m_k = 0$ για κάθε k. Άρα $\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = 1$ και $\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0(x_k - x_{k-1}) = 0$. Άρα

$$1 - 0 < \epsilon$$

κάτι το οποίο είναι αδύνατο για οποιονδήποτε $\epsilon \leq 1$. Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε η $\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ δεν είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0, 1]$.
Επομένως, δεν ισχύει το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.2.
(2) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$. Η f είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$, οπότε είναι Lebesgue μετρήσιμη στο $[1, +\infty)$. Η συνάρτηση είναι ≥ 0 στο $[1, +\infty)$, οπότε υπάρχει το $\int_{[1,+\infty)} f$. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3.2 για να αναχθούμε στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων Riemann. Για να γίνει, όμως, αυτό πρέπει πρώτα να αναχθούμε σε φραγμένα κλειστά διαστήματα (στα οποία η συνάρτηση είναι συνεχής) αντί του $[1, +\infty)$. Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια του Θεωρήματος 3.1.
Πιο συγκεκριμένα: θεωρούμε τα σύνολα $[1, n]$ $(n \in \mathbb{N})$, τα οποία είναι Lebesgue μετρήσιμα και έχουν τις ιδιότητες: $[1, n] \subseteq [1, n + 1]$ για κάθε n και $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[1, n] = [1, +\infty)$. Επειδή η f είναι Lebesgue μετρήσιμη και ≥ 0 στο $[1, +\infty)$, συνεπάγεται

$$\int_{[1,+\infty)} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[1,n]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{1}{x}\, dx = \lim_{n\to+\infty} \log n = +\infty.$$

Η πρώτη ισότητα ισχύει λόγω του Θεωρήματος 3.1 και η δεύτερη λόγω του Θεωρήματος 3.2.
Η συνάρτηση έχει Lebesgue ολοκλήρωμα στο $[1, +\infty)$ αλλά δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[1, +\infty)$.
(3) Ακριβώς τα ίδια μπορούμε να πούμε και για τις συναρτήσεις $g, h : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{1}{x^2}$ και με τύπο $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Θα περιοριστούμε στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων Lebesgue:

$$\int_{[1,+\infty)} g = \lim_{n\to+\infty} \int_{[1,n]} g = \lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{n\to+\infty}(1 - \tfrac{1}{n}) = 1,$$

$$\int_{[1,+\infty)} h = \lim_{n\to+\infty} \int_{[1,n]} h = \lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{n\to+\infty}(2\sqrt{n} - 2) = +\infty.$$

Και οι δυο συναρτήσεις έχουν Lebesgue ολοκλήρωμα στο $[1, +\infty)$, όμως η g είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[1, +\infty)$ ενώ η h δεν είναι.
(4) Τώρα, θεωρούμε την $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{x}$. Η f είναι συνεχής στο $(0, 1]$, οπότε είναι Lebesgue μετρήσιμη στο $(0, 1]$. Η συνάρτηση είναι ≥ 0 στο $(0, 1]$, οπότε υπάρχει το $\int_{(0,1]} f$. Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue θεωρούμε τα σύνολα $[\frac{1}{n}, 1]$ $(n \in \mathbb{N})$, τα οποία είναι Lebesgue μετρήσιμα και έχουν τις ιδιότητες: $[\frac{1}{n}, 1] \subseteq [\frac{1}{n+1}, 1]$ για κάθε n και $\bigcup_{n=1}^{+\infty}[\frac{1}{n}, 1] = (0, 1]$. Επειδή η f είναι Lebesgue μετρήσιμη και ≥ 0 στο $(0, 1]$, συνεπάγεται

$$\int_{(0,1]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{[\frac{1}{n},1]} f = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{n\to+\infty} \log n = +\infty.$$

Η συνάρτηση έχει Lebesgue ολοκλήρωμα στο $[1, +\infty)$ αλλά δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[1, +\infty)$.
(5) Ακριβώς τα ίδια ισχύουν και για τις $g, h : (0, 1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{1}{x^2}$ και $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων Lebesgue γίνεται ως εξής:

$$\int_{(0,1]} g = \lim_{n\to+\infty} \int_{[\frac{1}{n},1]} g = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{n\to+\infty}(n - 1) = +\infty,$$

$$\int_{(0,1]} h = \lim_{n\to+\infty} \int_{[\frac{1}{n},1]} h = \lim_{n\to+\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{n\to+\infty}(2 - \tfrac{2}{\sqrt{n}}) = 2.$$

Η συναρτήσεις έχουν Lebesgue ολοκλήρωμα στο $[1,+\infty)$, αλλά η g δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[1,+\infty)$ ενώ η h είναι.
(6) Έστω η $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{αν } -1\leq x\leq 1 \text{ και } x\neq 0\\ 0, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0)$ και $(0,1]$ και σταθερή στο $\{0\}$, οπότε είναι Lebesgue μετρήσιμη σε καθένα από αυτά τα τρία σύνολα. Άρα η f είναι Lebesgue μετρήσιμη στην ένωσή τους, το $[-1,1]$. Η f δεν έχει σταθερό πρόσημο στο $[-1,1]$, οπότε δεν είναι προφανές ότι υπάρχει το $\int_{[-1,1]} f$.
Η $f^+:[-1,1]\to[0,+\infty]$ είναι ≥ 0 στο $[-1,1]$, οπότε έχει ολοκλήρωμα Lebesgue στο $[-1,1]$. Η f^+ έχει τύπο

$$f^+(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{αν } 0<x\leq 1\\ 0, & \text{αν } -1\leq x\leq 0\end{cases}$$

Άρα $\int_{[-1,1]} f^+ = \int_{[-1,0]} 0 + \int_{(0,1]} f^+ = 0 + \int_{(0,1]} f^+$ και, όπως σε ένα από τα προηγούμενα παραδείγματα,

$$\int_{[-1,1]} f^+ = \int_{(0,1]} f^+ = \lim_{n\to+\infty}\int_{[\frac{1}{n},1]} f^+ = \lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{1}{x}\,dx = +\infty.$$

Ομοίως, η $f^-:[-1,1]\to[0,+\infty]$ είναι ≥ 0 στο $[-1,1]$, οπότε έχει ολοκλήρωμα Lebesgue στο $[-1,1]$. Η f^- έχει τύπο

$$f^-(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x}, & \text{αν } -1\leq x<0\\ 0, & \text{αν } 0\leq x\leq 1\end{cases}$$

Άρα $\int_{[-1,1]} f^- = \int_{[-1,0)} f^- + \int_{[0,1]} 0 = \int_{[-1,0)} f^-$ και

$$\int_{[-1,1]} f^- = \int_{[-1,0)} f^- = \lim_{n\to+\infty}\int_{[-1,-\frac{1}{n}]} f^- = \lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{-\frac{1}{n}}\left(-\frac{1}{x}\right)dx = +\infty.$$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι $\int_{[-1,1]} f^+ = \int_{[-1,1]} f^- = +\infty$, οπότε το $\int_{[-1,1]} f = \int_{[-1,1]} f^+ - \int_{[-1,1]} f^-$ *δεν υπάρχει*.
(7) Έστω η $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{|x|}, & \text{αν } -1\leq x\leq 1 \text{ και } x\neq 0\\ +\infty, & \text{αν } x=0\end{cases}$$

Η f είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0)$ και $(0,1]$ και σταθερή στο $\{0\}$, οπότε είναι Lebesgue μετρήσιμη σε καθένα από αυτά τα τρία σύνολα. Άρα η f είναι Lebesgue μετρήσιμη στο $[-1,1]$. Επειδή $f\geq 0$ στο $[-1,1]$, υπάρχει το $\int_{[-1,1]} f$.
Με τις μεθόδους των προηγούμενων παραδειγμάτων, υπολογίζουμε $\int_{[-1,0)} f = +\infty$ και $\int_{(0,1]} f = +\infty$. Επίσης, $\int_{\{0\}}(+\infty) = 0$, διότι $m(\{0\})=0$. Άρα, και πάλι επειδή $f\geq 0$ στο $[-1,1]$,

$$\int_{[-1,1]} f = \int_{[-1,0)} f + \int_{\{0\}} f + \int_{(0,1]} f = (+\infty)+0+(+\infty) = +\infty.$$

Άρα η f δεν είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[-1,1]$.

Ασκήσεις.

1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_A f$ (αν υπάρχει) στις παρακάτω περιπτώσεις.

$$f(x)=x^2\quad A=[0,1],\qquad f(x)=\tfrac{1}{x}\quad A=(0,1],\qquad f(x)=\tfrac{1}{\sqrt{x}}\quad A=(0,1],$$

$$f(x)=\tfrac{1}{x}\quad A=[1,+\infty),\qquad f(x)=\tfrac{1}{x^2}\quad A=[1,+\infty),\qquad f(x)=\tfrac{1}{x^3}\quad A=\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

2. Είναι οι παρακάτω συναρτήσεις ολοκληρώσιμες στο $[\pi, +\infty)$;

$$f(x) = \tfrac{\sin x}{x^2}\,, \qquad f(x) = \tfrac{\sin x}{x}\,.$$

(Υπόδειξη: $|\frac{\sin x}{x^2}| \le \frac{1}{x^2}$ και $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \ge \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\, dx = \frac{2}{(n+1)\pi}$ για κάθε n.)
Ορίζονται τα αντίστοιχα $\int_{[\pi,+\infty)} f$;

3. Για ποιες τιμές του α είναι ολοκληρώσιμη η συνάρτηση $x^{-\alpha}$ στο $(0, 1]$; στο $[1, +\infty)$; στο $(0, +\infty)$;
Αποδείξτε ότι η $f(x) = \frac{d}{dx}\big(x^2 \sin \frac{1}{x^2}\big)$ δεν είναι ολοκληρώσιμη στο $(0, 1)$.
Αν $x > 0$, αποδείξτε ότι η $f(t) = t^{x-1}e^{-t}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $(0, +\infty)$.

4. Έστω $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$. Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{[0,+\infty)} f_n \ne \int_{[0,+\infty)}(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n)$.

5. Αποδείξτε ότι $\int_{(0,1)} \log \frac{1}{1-x}\, dx = \int_{(0,1)} \big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\big)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \int_{(0,1)} x^n\, dx = 1$.

6. Αν $p > 0$, αποδείξτε ότι $\int_{(0,1)} \frac{x^{p-1}}{1-x} \log \frac{1}{x}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+p)^2}$.
(Υπόδειξη: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$.)

7. Έστω $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ και αριθμοί $a_n \ (n \in \mathbb{N})$ ώστε $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$. Αποδείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{|x-r_n|}}$ συγκλίνει σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$.