Πανεπιστημιο Κρητησ, Τμ. Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογες, Άνοιξη 2013-14, Μιχ. Κολουντζάκης

Ομάδα ασκήσεων Νο 10

Παρακάτω $Q_n(x)$ είναι τα ορθογώνια πολυώνυμα (μονικά, $\deg Q_n = n$) ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}w(x)\,dx.$$

Πρόβλημα 1. Υπολογίστε τα $Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x)$ για το διάστημα $[-1,1]$ και το βάρος $w(x) \equiv 1$.

Χρησιμοποιείστε τον αναδρομικό τύπο που δίνεται στις σημειώσεις σας.

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι το Q_n έχει την ελάχιστη 2-νόρμα (αυτή που προέρχεται από το εσωτερικό γινόμενο) από όλα τα μονικά πολυώνυμα βαθμού ακριβώς n.

Το τυχόν μονικό πολυώνυμο βαθμού n γράφεται στη μορφή $Q_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k Q_k(x)$.

Πρόβλημα 3. Αποδείξτε με επαγωγή ως προς n τον τύπο του Leibniz για την πολλαπλή παραγώγιση γινομένου συναρτήσεων (χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $D = \frac{d}{dx}$ για συντομία στη γραφή):

$$D^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D^k f \cdot D^{n-k} g.$$

Πρόβλημα 4. (α) Έστω f πολυώνυμο βαθμού $\le n$. Δείξτε ότι γράφεται στη μορφή

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

(β) Αν $d_0, d_1, \cdots, d_n \in \mathbb{C}$ δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο $f(x)$ βαθμού $\le n$ με $f^{(j)}(0) = d_j$, για $j = 0, 1, \ldots, n$.