Πανεπιστημιο Κρητησ, Τμ. Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Θεωρία Προσέγγισης και Εφαρμογες, Άνοιξη 2013-14, Μιχ. Κολουντζάκης

Ομάδα ασκήσεων Νο 8

Πρόβλημα 1. Αν είναι $x_j = a + jh$, με $h = (b-a)/N, j = 0, 1, \ldots, N$, δείξτε ότι

$$\left|\prod_{j=0}^{N}(x - x_j)\right| \le N! \frac{h^{N+1}}{4},$$

για $x \in [a, b]$.

Αν $a = -1, b = 1$ πώς πρέπει να επιλέξετε τα σημεία x_j ώστε να ελαχιστοποιήσετε την ποσότητα

$$\sup_{x\in[-1,1]}\left|\prod_{j=0}^{N}(x - x_j)\right| ;$$

Πρόβλημα 2. Έστω το γενικό πολυώνυμο βαθμού N:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_N x^N.$$

Ας υποθέσουμε ότι στον υπολογιστή σας ο πολλαπλασιασμός παίρνει πολύ περισσότερο χρόνο από την πρόσθεση (αυτό ίσχυε πραγματικά στους υπολογιστές πριν από 3 δεκαετίες). Βρείτε ένα τρόπο να υπολογίζετε το $p(x)$ χρησιμοποιώντας μόνο $\le N$ πολλαπλασιασμούς.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι τα πολυώνυμα

$$x^k(1-x)^{N-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, N,$$

αποτελούν βάση του χώρου $\mathcal{P}_N$.

Πρόβλημα 4. Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_N$ διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί και

$$L_j(x) = \prod_{i\ne j}\frac{x - x_i}{x_j - x_i}, \quad j = 0, 1, \ldots, N,$$

τα αντίστοιχα πολυώνυμα Lagrange. Δείξτε ότι

$$L_0(x) + L_1(x) + \cdots + L_N(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε επίσης ότι

$$x_0 L_0(x) + x_1 L_1(x) + \cdots + x_N L_N(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Πώς μπορείτε να γράψετε το πολυώνυμο x^3 ως γραμμικό συνδυασμό των $L_j(x)$ (υποθέστε φυσικά ότι $N \ge 3$);

Πρόβλημα 5. Έστω $x_0, x_1, \ldots, x_N$ διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοί και $d_0, d_1, \ldots, d_N \in \mathbb{C}$. Ας υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο $q_0(x)$, βαθμού $\le N-1$, παρεμβάλλει τις τιμές $d_0, d_1, \ldots, d_{N-1}$ στα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_{N-1}$ και, ομοίως, ότι το πολυώνυμο $q_1(x)$, βαθμού $\le N-1$, παρεμβάλλει τις τιμές $d_1, d_2, \ldots, d_N$ στα σημεία $x_1, x_2, \ldots, x_N$. Δείξτε ότι το πολυώνυμο

$$q(x) = \frac{x_N - x}{x_N - x_0} q_0(x) + \frac{x - x_0}{x_N - x_0} q_1(x)$$

είναι βαθμού $\le N$ και παρεμβάλλει τις τιμές $d_0, d_1, \ldots, d_N$ στα σημεία $x_0, x_1, \ldots, x_N$.