Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Φυλλάδιο Ασκήσεων 3 – 6-10-2016. Παραδοτέο 13-10-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Αν $0 \le f$ σε ένα χώρο μέτρου μ και $\lambda > 0$ δείξτε

$$\mu\{f \ge \lambda\} \le \frac{\int f}{\lambda}.$$

Δείξτε επίσης ότι $\mu\{f \ge \lambda\} \le \frac{\int e^f}{e^\lambda}$. Γενικεύστε το με άλλες συναρτήσεις στη θέση της e^x.

Πρόβλημα 2. Αν $f \in L^1(\mu)$ μιγαδική συνάρτηση σε χώρο πιθανότητας (δηλ. με $\mu(X) = 1$) δείξτε

$$\mu\Big\{\Big|f - \int f\Big| \ge \lambda\Big\} \le \frac{1}{\lambda^2} \int \Big|f - \int f\Big|^2.$$

Κάνοντας πράξεις στο δεξί μέλος συμπεράνετε ότι σε χώρο πιθανότητας ισχύει

$$\left(\int |f|\right)^2 \le \int |f|^2$$

για $f \in L^1(\mu)$. Είναι απαραίτητο η f να είναι ολοκληρώσιμη;

Πρόβλημα 3. Αν $E_1, E_2, \ldots$ μετρήσιμα σύνολα σε ένα χώρο μέτρου (X, μ) και $\sum_n \mu(E_n) < \infty$ δείξτε ότι το σύνολο των $x \in X$ που ανήκουν σε άπειρα από τα E_n έχει μέτρο 0.

Πρόβλημα 4. Κατασκευάστε μια ακολουθία $f_n : (0, 1) \to [0, \infty)$ τέτοια ώστε $\liminf f_n(x) = 0$ και $\limsup f_n(x) = +\infty$ για κάθε $x \in (0, 1)$ και επίσης $\int_{(0,1)} f_n \to 1$ και οι f_n να είναι συνεχείς. (Μην πάτε να βρείτε τύπο! Σκεφθείτε με τα γραφήματα των f_n.)

Πρόβλημα 5. Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ δείξτε ότι η συνάρτηση $x \to \int_{(-\infty,x)} f\, dm$ είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πρόβλημα 6. Έστω $f \in L^1(\mu)$ σε κάποιο χώρο μέτρου και ορίζουμε

$$f_t(x) = |f(x)| \cdot \mathbf{1}\left(|f(x)| > t\right)$$

για $t > 0$. Δείξτε ότι $\lim_{t\to\infty} \int f_t \, d\mu = 0$.

Πρόβλημα 7. Δείξτε

$$\lim_n n \int_0^1 \sqrt{x} e^{-n^2 x^2}\, dx = 0.$$

Υπόδειξη: Ως κοινή ολοκληρώσιμη συνάρτηση που φράσσει τις $n\sqrt{x}e^{-n^2x^2}$ δοκιμάστε κάποια συνάρτηση της μορφής $C/\sqrt{x}$.

Πρόβλημα 8. Δείξτε

$$\lim_n \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε την ανισότητα $(1 + x)^\alpha \ge 1 + \alpha x$, που ισχύει για $\alpha \ge 1$ (λόγω κυρτότητας της συνάρτησης $(1 + x)^\alpha$), για να βρείτε ένα κοινό ολοκληρώσιμο άνω φράγμα για όλες τις $f_n(x)$.

Πρόβλημα 9. Αν $E \subseteq \mathbb{R}$ και $\alpha > 0$ ορίζουμε

$$f(E, \alpha) = \inf \sum_n |I_n|^\alpha,$$

όπου το infimum το παίρνουμε πάνω από όλες τις καλύψεις του συνόλου E από ακολουθίες ανοιχτών διαστημάτων I_n, και $|I_n|$ είναι τα μήκη των διαστημάτων αυτών.

Δείξτε ότι αν E είναι το τριαδικό σύνολο του Cantor τότε $f(E, \alpha) = 0$ αν $\alpha > \log 2/ \log 3$.