Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Φυλλάδιο Ασκήσεων 4 – 13-10-2016. Παραδοτέες 20-10-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Έστω $\epsilon > 0$. Κατασκευάστε ανοιχτό σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε για κάθε διάστημα I να ισχύει $m(E \cap I) > 0$ και επίσης να ισχύει $m(E) \le \epsilon$.

Πρόβλημα 2. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}$ μετρήσιμο με $m(E) > 0$. Δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει διάστημα I τέτοιο ώστε $m(E \cap I) \ge (1-\epsilon)m(I)$,

Υπόδειξη: Πάρτε ανοιχτό $G \supseteq E$ με $m(G \setminus E)$ πολύ μικρό. Θυμηθείτε ότι τα ανοιχτά σύνολα στο $\mathbb{R}$ είναι ενώσεις ακολουθίας ανοιχτών διαστημάτων, ξένων ανά δύο.

Πρόβλημα 3. Αν $f_n \to f$, $g_n \to g$, $g \in L^1(\mu)$, $\int g_n \to \int g$ και $|f_n| \le g_n$ σ.π. δείξτε ότι $\int |f_n - f| \to 0$ και $\int f_n \to \int f$.

Υπόδειξη: Πρόκειται για μια γενίκευση του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης που μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε τη μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση που φράσσει την ακολουθία με πολλές, φτάνει αυτές να συγκλίνουν κατάλληλα. Αποδείξτε το με παρόμοιο τρόπο, π.χ. εφαρμόζοντας το Λήμμα του Fatou στις συναρτήσεις $g_n + g - |f_n - f|$.

Πρόβλημα 4. Αν $0 \le h_n \to h$ σ.π. και $\int h_n \to \int h$ δείξτε ότι για κάθε μετρήσιμο σύνολο A ισχύει

$$\int_A h_n \to \int_A h.$$

Πρόβλημα 5. Έστω $f, f_n \in L^1(\mu)$, $f_n \to f$ σ.π., και $\int |f_n| \to \int |f|$. Δείξτε ότι

$$\int |f_n - f| \to 0.$$

Πρόβλημα 6. Δώστε παράδειγμα $f_n, f : [0,1] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε να ισχύει $\int |f_n - f| \to 0$ και να μην ισχύει $f_n(x) \to f(x)$ για κανένα $x \in [0,1]$. Δώστε παράδειγμα και για το αντίστροφο, να έχουμε δηλ. $f_n \to f$ σ.π. και να μην έχουμε $\int |f_n - f| \to 0$.

Πρόβλημα 7. Σε ένα χώρο μέτρου X έχουμε συναρτήσεις $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ (με πεπερασμένες τιμές παντού) και $\int |f_n - f| \to 0$. Δείξτε ότι για καθε $\epsilon > 0$ ισχύει $\mu\{|f_n - f| > \epsilon\} \to 0$. Δείξτε το ίδιο υποθέτοντας ότι $f_n \to f$ σ.π. και ότι $\mu(X) < \infty$.

Πρόβλημα 8. Για τους χώρους $L^p(\mathbb{R})$ (με το μέτρο Lebesgue) για $1 \le p \le \infty$ δείξτε ότι κανείς δεν περιέχει κάποιον άλλο από αυτούς. Ποια είναι η αντίστοιχη πρόταση για τους χώρους $L^p([0,1])$;

Πρόβλημα 9. Αν (X, μ) είναι ένας χώρος πιθανότητας (μ θετικό μέτρο, $\mu(X) = 1$) και $0 < r < s \le \infty$ δείξτε την ανισότητα $\|f\|_r \le \|f\|_s$. Δείξτε επίσης ότι $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Πρόβλημα 10. Ας είναι (X, Σ_1, μ) και (Y, Σ_2, ν) δύο χώροι μέτρου και $f : X \to Y$. Λέμε ότι η f είναι μετρήσιμη αν $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$ για κάθε $A \in \Sigma_2$. Η μετρήσιμη συνάρτηση f λέμε ότι *διατηρεί τα μέτρα* αν για κάθε $A \in \Sigma_2$ έχουμε $\mu(f^{-1}(A)) = \nu(A)$.

Αν $X = Y = [0,1)$ με το μέτρο Lebesgue δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x) = \{2x\}$ διατηρεί τα μέτρα. Εδώ $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor \in [0,1)$ είναι το κλασματικό μέρος του a. Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση f δεν είναι ένα προς ένα και ότι δεν ισχύει $m(f(A)) = m(A)$ για κάθε μετρήσιμο A.

Υπόδειξη: Μπορείτε να θεωρήσετε γνωστό ότι $m(\lambda E) = |\lambda| m(E)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε Lebesgue μετρήσιμο E, όπου $\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$.