Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 – Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Λύσεις Ενδιάμεσου Διαγωνίσματος – 3-11-2016

Πρόβλημα 1. Το Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει μέτρο 0. Δείξτε ότι το σύνολο $E \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ έχει επίσης μέτρο 0 (στο $\mathbb{R}^2$ αυτή τη φορά). (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι $m([a,b] \times [c,d]) = (b-a)(d-c)$ για $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ με $a \le b, c \le d$.)

Λύση: Αφού $E \times \mathbb{R} = \bigcup_{N=1}^\infty E \times [-N,N]$ αρκεί να δείξουμε ότι $m(E \times [-N,N]) = 0$ για κάθε N. Έστω $\epsilon > 0$ και ανοιχτό $G \subseteq \mathbb{R}$ με $E \subseteq G$ και $m(G) \le \epsilon$. Το G μπορεί να γραφεί ως ένωση ξένων διαστημάτων $G = \bigcup_{n=1}^\infty I_n$ οπότε $\sum_n m(I_n) = m(G) \le \epsilon$. Οπότε

$$E \times [-N,N] \subseteq G \times [-N,N] = \bigcup_{n=1}^\infty (I_n \times [-N,N])$$

και άρα

$$m(E \times [-N,N]) \le \sum_{n=1}^\infty m(I_n) \cdot 2N \le 2N\epsilon,$$

το οποίο μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό διαλέγοντας κατάλληλο μικρό το ϵ, άρα $m(E \times [-N,N]) = 0$ για κάθε N.

Πρόβλημα 2. (α) Αν K είναι κυρτό σύνολο σε ένα διανυσματικό χώρο V και $K - K = \{k_1 - k_2 : \ k_1, k_2 \in K\}, 2K = \{2k : \ k \in K\}$ δείξτε ότι αν το K είναι συμμετρικό ως προς το 0 (με άλλα λόγια $-K = K$) τότε

$$K - K = 2K.$$

(β) Αν $M > 0$, η $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη και για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq \mathbb{R}$ ισχύει

$$\left| \frac{1}{m(E)} \int_E f \, dm \right| \le M,$$

δείξτε ότι $|f| \le M$ σ.π.

Λύση: (α) Αν $k \in K$ τότε $2k = k - (-k)$ άρα $2K \subseteq K - K$, αφού και $-k \in K$. Αν $k_1, k_2 \in K$ τότε, γράφοντας $k_2' = -k_2 \in K$ έχουμε

$$k_1 - k_2 = k_1 + k_2' = 2\frac{k_1 + k_2'}{2}.$$

Από την κυρτότητα του K έχουμε ότι $\frac{k_1+k_2'}{2} \in K$ άρα $k_1 - k_2 \in 2K$, και συνεπώς $K - K \subseteq 2K$.

(β) Υποθέτουμε ότι $m\{|f| > M\} > 0$, οπότε για κάποιο θετικό ϵ θα ισχύει επίσης $m\{|f| > M + \epsilon\} > 0$. Έστω $A = \{|f| > M + \epsilon\}$.

Γράφουμε $f(x) = |f(x)|e^{ig(x)}$, με $g(x) \in [0, 2\pi)$. Αν N είναι ένας φυσικός αριθμός γράφουμε

$$A_{N,k} = \left\{ x \in A : \ k\frac{2\pi}{N} \le g(x) < (k+1)\frac{2\pi}{N} \right\}.$$

Αφού $A = \bigcup_{k=0}^{N-1} A_{N,k}$ έπεται ότι κάποιο από τα $A_{N,k}$ έχει θετικό μέτρο. Παρατηρώντας ότι και η υπόθεση της άσκησης και το συμπέρασμά της είναι αναλλοίωτα από πολλαπλασιασμό της f με μια σταθερά $e^{i\theta}$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m(A_{N,0}) > 0$. Όλα τα $f(x)$ για $x \in A_{N,0}$ είναι στη γωνία μεγέθους $2\pi/N$ που έχει το θετικό άξονα των x ως κάτω πλευρά (κάντε το σχήμα). Για όλα αυτά τα $f(x)$ ισχύει

$$\frac{\operatorname{Re} f(x)}{|f(x)|} > \cos\frac{2\pi}{N}.$$

άρα για $x \in A_{N,0}$ ισχύει $\operatorname{Re} f(x) > \cos\frac{2\pi}{N}|f(x)| > \cos\frac{2\pi}{N}(M + \epsilon)$. Επιλέγουμε το N ώστε αυτή η τελευταία ποσότητα να είναι $> M$ και παίρνουμε $E = A_{N,0}$ για να οδηγηθούμε σε αντίφαση αφού μόνο το πραγματικό μέρος του ολοκληρώματος της εκφώνησης θα είναι $> M$.

Πρόβλημα 3. Στο χώρο Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ (όλες οι ακολουθίες $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ με $\sum_n |x_n|^2 < \infty$ και με εσωτερικό γινόμενο το $(x,y) = \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{y_n})$ έχουμε το διάνυσμα $x = (\frac{1}{2}, 0, 0, \ldots)$ και το σύνολο $S = \left\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) : \|x\| = 1\right\}$ (μοναδιαία σφαίρα).

Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $x_n \in S$ που συγκλίνει ασθενώς στο x. Θυμίζουμε ότι ασθενής σύγκλιση $x_n \xrightarrow{w} x$ σημαίνει ότι για κάθε y στο χώρο Hilbert ισχύει $(x_n, y) \to (x, y)$.

Λύση: Γράφοντας ως συνήθως $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ για τη συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του $\ell^2(\mathbb{N})$ παίρνουμε $x_n = \frac{1}{2}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_n$, που είναι στοιχείο του S. Αν $y = (y_1, y_2, \ldots)$ είναι στοιχείο του χώρου μας τότε, αφού $\sum_n |y_n|^2 < \infty$, ισχύει $y_n \to 0$. Έχουμε

$$(x_n, y) = \frac{1}{2}\overline{y_1} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{y_n} \to \frac{1}{2}\overline{y_1} = (x, y).$$

Πρόβλημα 4. Ας είναι $p_0 \in (1, +\infty)$. Κατασκευάστε μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ τέτοια ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ και $\|f_n\|_p \to 0$ αν και μόνο αν $p > p_0$.

Λύση: Πάρτε $f_n(x) = \mathbf{1}\left(n \le x \le n + n^{p_0}\right) \frac{1}{n}$. Η σύγκλιση στο 0 παντού είναι φανερή και $\int f_n^p = n^{p_0} n^{-p}$ που τείνει στο 0 αν και μόνο αν $p > p_0$.

Πρόβλημα 5. Ας είναι η $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ και $f(0) = 0$. Αν $1 \le p, r < \infty$ δείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C_{p,r}$ που δεν εξαρτάται από την f τέτοια ώστε να ισχύει

$$\|f\|_r \le C_{p,r} \left\|f'\right\|_p.$$

Λύση: Έχουμε για $x \in [0, 1]$ την ισότητα $f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt = \int f' \mathbf{1}_{[0,x]}$. Αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder στο τελευταίο ολοκλήρωμα και παίρνουμε

$$|f(x)| \le \left\|f'\right\|_p \left\|\mathbf{1}_{[0,x]}\right\|_q = \left\|f'\right\|_p x^{1/q}.$$

Υψώνουμε στη δύναμη r και ολοκληρώνουμε και παίρνουμε

$$\|f\|_r^r \le \left\|f'\right\|_p^r \int_0^1 x^{1/q}\,dx = \frac{q}{r+q} \left\|f'\right\|_p^r,$$

άρα $\|f\|_r \le \|f'\|_p \left(\frac{q}{r+q}\right)^{1/r}$.

Πρόβλημα 6. Ας είναι $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$ μια αρίθμηση των ρητών. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{r_n \le x} \frac{1}{n^2}.$$

Δείξτε ότι η f είναι παντού πεπερασμένη, γνησίως αύξουσα συνάρτηση της οποίας τα σημεία ασυνέχειας είναι ακριβώς οι ρητοί αριθμοί.

Λύση: Έχουμε $f(x) \le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty$. Αν $a < b$ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τότε

$$f(b) - f(a) = \sum_{a < r_n \le b} \frac{1}{n^2} > 0, \quad \text{αφού υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός στο διάστημα } (a, b],$$

άρα $f(a) < f(b)$ και η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα.

Αν x άρρητος δείχνουμε ότι η f είναι συνεχής στο x. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $a < b$ είναι δύο αριθμοί στο $(x - \delta, x + \delta)$ τότε $f(b) - f(a) \le \epsilon$. Ο φυσικός αριθμός N ας είναι τέτοιος ώστε $\sum_{n \ge N} \frac{1}{n^2} \le \epsilon$ και ας είναι

$$\delta = \min\left\{|x - r_1|, \ldots, |x - r_{N-1}|\right\},$$

που είναι θετικός αριθμός αφού ο x είναι άρρητος και άρα καμιά από τις αποστάσεις που συμμετέχουν στο min δεν είναι 0. Αν $a < b$ είναι δύο αριθμοί στο $(x-\delta, x+\delta)$ τότε

$$f(b) - f(a) = \sum_{a<r_n\le b} \frac{1}{n^2} \le \sum_{n\ge N} \frac{1}{n^2} \le \epsilon,$$

αφού όλοι οι ρητοί r_j με $j < N$ έχουν απόσταση από το x μεγαλύτερη του δ.

Ας είναι τώρα $x = r_k$ ένας ρητός αριθμός. Αν $a < x < b$ τότε

$$f(b) - f(a) = \sum_{a<r_n\le b} \frac{1}{n^2} \ge \frac{1}{k^2},$$

αφού $a < r_k < b$. Αυτό σημαίνει ότι τα δύο πλευρικά όρια της f στο x (που υπάρχουν λόγω μονοτονίας της f) διαφέρουν τουλάχιστον κατά $\frac{1}{k^2}$, άρα η f είναι ασυνεχής στο x (δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι το πήδημα της f στο $x = r_k$ είναι ακριβώς $1/k^2$).

- Διάρκεια διαγωνίσματος 2 ώρες. Κλειστές σημειώσεις.