Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Λύσεις Φυλλαδίου Ασκήσεων 5 – 20-10-2016. Παραδοτέες 27-10-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Αν $0 \le p, q, r \le \infty$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ δείξτε την ανισότητα

$$\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q,$$

για $f, g \ge 0$,

Λύση: Εφαρμόστε την ανισότητα Hölder στο γινόμενο fg με εκθέτες p/r και q/r.

Πρόβλημα 2. Ας είναι $w_n \ge 0$, $n = 1, 2, \ldots, N$, και $a_n, b_n \in \mathbb{C}$, $n = 1, 2, \ldots, N$. Αποδείξτε την ανισότητα

$$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n w_n\right|^2 \le \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 w_n \cdot \sum_{n=1}^{N} |b_n|^2 w_n.$$

Λύση: Αυτή είναι η ανισότητα Cauchy-Schwartz στο χώρο $\{1, 2, \ldots, N\}$ με το μέτρο $\mu(A) = \sum_{n \in A} w_n$, για κάθε $A \subseteq \{1, 2, \ldots, N\}$.

Πρόβλημα 3. Αν $1 \le p_1 < p < p_2 \le \infty$ δείξτε $L^{p_1}(\mu) \cap L^{p_2}(\mu) \subseteq L^p(\mu)$.

Μπορείτε να βρείτε ένα άνω φράγμα για τη νόρμα $\|f\|_p$ μέσω των νορμών $\|f\|_{p_1}$ και $\|f\|_{p_2}$;

Λύση: Αν $p_2 < \infty$ έχουμε για $f \ge 0$

$$\int f^p = \int_{f>1} f^p + \int_{f\le 1} f^p \le \int_{f>1} f^{p_2} + \int_{f\le 1} f^{p_1} \le \int f^{p_2} + \int f^{p_1} < \infty.$$

Για $p_2 = \infty$ ας είναι $0 \le f \in L^{p_1}(\mu) \cap L^\infty(\mu)$. Τότε, όπως στην προηγούμενη περίπτωση, έχουμε

$$\int f^p = \int_{f>1} f^p + \int_{f\le 1} f^p \le \int_{f>1} f^p + \int_{f\le 1} f^{p_1} \le \|f\|_\infty^p \mu\{f > 1\} + \int f^{p_1}.$$

Αλλά $\mu\{f > 1\} \le \int f^p < \infty$ οπότε η παραπάνω ποσότητα είναι πεπερασμένη.

Αν $\alpha \ge 0$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{p_1} + \frac{1-\alpha}{p_2}$ τότε χρησιμοποιώντας το Πρόβλημα 1 μπορείτε να δείξετε την ανισότητα $\|f\|_p \le \|f\|_{p_1}^\alpha \cdot \|f\|_{p_2}^{1-\alpha}$.

Πρόβλημα 4. Δείξτε ότι $\sup_{\|f\|_p=1} \int fg = \|g\|_q$, όπου οι p, q είναι συζυγείς εκθέτες και $f, g \ge 0$. (Ισχύει και για μιγαδικές g, όπου τώρα το supremum το παίρνουμε πάνω από όλες τις μιγαδικές f με $\|f\|_p = 1$.)

Λύση: Από την ανισότητα Hölder έχουμε $\sup_{|f|_p=1} \int fg \le \|g\|_q$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|g\|_q = 1$ (αλλιώς διαιρούμε την g με $\|g\|_q$). Αν πάρουμε $f = g^{q/p}$ τότε $\int f^p = \int g^q = 1$. Για αυτή την f έχουμε $\int fg = \int g^{\frac{p+q}{p}} = \int g^q = 1$ αφού $\frac{p+q}{p} = q$. Άρα το $\|g\|_q$ πιάνεται για αυτή την f.

Πρόβλημα 5. Οι *κλιμακωτές* συναρτήσεις $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι οι πεπερασμένοι γραμμικοί συνδυασμοί χαρακτηριστικών συναρτήσεων πεπερασμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι οι κλιμακωτές συναρτήσεις είναι πυκνές στο $L^1(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη: Δείξτε ότι προσεγγίζουν τις $C_c(\mathbb{R})$ συναρτήσεις.

Λύση: Αφού οι συναρτήσεις $C_c(\mathbb{R})$ (συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα) είναι πυκνές στο $L^1(\mathbb{R})$ αρκεί να δείξουμε ότι κάθε τέτοια συνάρτηση προσεγγίζεται (κατά L^1) από κλιμακωτές. Ας είναι $f \in C_c(\mathbb{R})$ με $f \equiv 0$ εκτός του φραγμένου, κλειστού διαστήματος $[a, b]$. Περιορισμένη στο συμπαγές $[a, b]$ η συνεχής συνάρτηση f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε αν χωρίσουμε το $[a, b]$ σε N ίσα διαστήματα τότε σε κάθε τέτοιο διάστημα οι τιμές της f απέχουν το πολύ ϵ από την τιμή της στο αριστερό άκρο του διαστήματος. Η κλιμακωτή συνάρτηση s που ορίζεται σε αυτά τα μικρά διαστήματα να έχει ως τιμή την τιμή της f στο αριστερό άκρο ικανοποιεί συνεπώς $\|f - s\|_\infty \le \epsilon$ (έχουμε δηλ. δείξει ομοιόμορφη προσέγγιση των $C_c(\mathbb{R})$ συναρτήσεων από κλιμακωτές). Αυτό συνεπάγεται $\|f - s\|_1 \le (b - a)\epsilon$ που είναι αυτό που θέλαμε να δείξουμε αφού το ϵ μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρό.

Πρόβλημα 6. Αν $f \in L^1(\mathbb{R})$ ορίζουμε $F(k) = F_f(k) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{ikx}$, για $k \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lim_{|k|\to\infty} F_f(k) = 0$.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε το Πρόβλημα 5 και αποδείξτε πρώτα το ζητούμενο για κλιμακωτές συναρτήσεις.

Λύση: Αν $f(x) = \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$ είναι η χαρακτηριστική ενός φραγμένου διαστήματος τότε

$$F(k) = \int_a^b e^{ikx}\,dx = \frac{a^{ikb} - e^{ika}}{ik},$$

που τείνει στο 0 για $|k| \to \infty$ αφού ο αριθμητής φράσσεται απολύτως από το 2. Λόγω γραμμικότητας της απεικόνισης $f \to F_f$ η ιδιότητα αυτή περνάει από τις χαρακτηριστικές διαστημάτων στους γραμμικούς συνδυασμούς αυτών, δηλ. στις κλιμακωτές συναρτήσεις.

Ας είναι τώρα $f \in L^1(\mathbb{R})$ και $\epsilon > 0$ και s μια κλιμακωτή συνάρτηση τέτοια ώστε $\|f - s\|_1 \le \epsilon$. Προφανώς ισχύει $\|F_f\|_\infty \le \|f\|_1$, άρα γράφοντας

$$F_f = F_s + F_{f-s},$$

έχουμε ότι $|F_f(k)| \le |F_s(k)| + \|f - s\|_1 \le |F_s(k)| + \epsilon$ το οποίο δείχνει ότι $\limsup_{|k|\to\infty} |F_f(k)| \le \epsilon$ και, αφού ϵ μπορεί να είναι οτιδήποτε, καταλήγουμε στο ότι $|F_f(k)| \to 0$.

Πρόβλημα 7. Σε ένα χώρο Hilbert H λέμε ότι η ακολουθία x_n συγκλίνει ασθενώς (weakly) στο x αν για κάθε y ισχύει $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$. Γράφουμε τότε $x_n \xrightarrow{w} x$.

Δείξτε ότι $x_n \to x \Longrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$ αλλά ότι η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει αν ο χώρος H είναι απειροδιάστατος.

Λύση: Αν $x_n \to x$ και $y \in H$ τότε $|\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n - x, y\rangle| \le \|x_n - x\| \cdot \|y\| \to 0$, άρα $x_n \xrightarrow{w} x$.

Αν x_n είναι ένα άπειρο ορθοκανονικό σύνολο στον H και $y \in H$ τότε $\sum_n |\langle x_n, y\rangle|^2 \le \|y\|^2$ από την ανισότητα Bessel, άρα $\langle x_n, y\rangle \to 0$ για κάθε $y \in H$, δηλ. $x_n \xrightarrow{w} 0$. Αλλά $\|x_n\| = 1$ οπότε δεν ισχύει $x_n \to 0$.

Πρόβλημα 8. Αν x_n, x στοιχεία ενός χώρου Hilbert και $x_n \xrightarrow{w} x$ και $\|x_n\| \to \|x\|$ δείξτε ότι $x_n \to x$.

Λύση: $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\Re\langle x_n, x\rangle + \|x\|^2 \to 0$ αφού $\langle x_n, x\rangle \to \langle x, x\rangle = \|x\|^2$.

Πρόβλημα 9. Αν $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ είναι ένας $m \times n$ μιγαδικός πίνακας συμβολίζουμε με A^* το συζυγή του ανάστροφου πίνακα $A^*_{i,j} = \overline{A_{j,i}}$ (ο A^* λέγεται adjoint του A). Εύκολα βλέπει κανείς ότι ισχύει $(AB)^* = B^*A^*$. Το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i\overline{y_i}$ στο $\mathbb{C}^n$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πινάκων (τα x, y θεωρούνται διανύσματα στήλες, $n \times 1$) ως

$$\langle x, y\rangle = y^* x.$$

Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι θετικά ορισμένος (δηλ. $\langle Ax, x\rangle > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$) και self-adjoint (δηλ. $A^* = A$) δείξτε ότι

$$(x, y) := \langle Ax, y\rangle \tag{1}$$

είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^n$.

Λύση: Έχουμε $(x, x) = \langle Ax, x\rangle \geq 0$ με ισότητα ακριβώς όταν $x = 0$, από το θετικά ορισμένο του A. Η γραμμικότητα ως προς το πρώτο μέλος είναι προφανής. Έχουμε επίσης

$$(x, y) = y^* Ax$$

και

$$\overline{(y, x)} = (y, x)^* = (x^* Ay)^* = y^* A^* x = y^* Ax = (x, y).$$

Πρόβλημα 10. Αποδείξτε ότι κάθε εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^n$ έχει τη μορφή που περιγράφεται στην (1) του Προβλήματος 9.

Λύση: Έστω e_i το διάνυσμα του $\mathbb{C}^n$ με μηδενικά σε όλες τις θέσεις εκτός από την i-οστή όπου έχει 1. Έστω (x, y) εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{C}^n$. Ορίζουμε τον $n\times n$ πίνακα $A_{i,j} = (e_i, e_j)$. Ισχύει τότε $A^* = A$ αφού $(e_j, e_i) = \overline{(e_i, e_j)}$. Αν $x, y \in \mathbb{C}^n$ με $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ και $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, όπου $x_i, y_i \in \mathbb{C}$, τότε, από τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου έχουμε

$$(x, y) = (\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i \overline{y_j} (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i \overline{y_j} A_{i,j} = y^* Ax,$$

οπότε έχουμε δείξει ότι $(x, y) = \langle Ax, y\rangle$.

Επίσης $\langle Ax, x\rangle = (x, x) \geq 0$ με ισότητα ακριβώς όταν $x = 0$, από τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, άρα ο A είναι θετικά ορισμένος.
