Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων και Εφαρμοσμενων Μαθηματικων
Μεταπτυχιακό Μάθημα «Πραγματική Ανάλυση»

Χειμερινό Εξάμηνο 2016-17 —- Διδάσκων: Μιχάλης Κολουντζάκης

Λύσεις Φυλλαδίου Ασκήσεων 8 – 24-11-2016. Παραδοτέες 1-12-2016 στο μάθημα

Πρόβλημα 1. Έστω μ ένα θετικό μέτρο και $f \in L^1(\mu)$. Ορίζουμε το μέτρο $d\nu = f d\mu$. (Αυτό σημαίνει ότι $\nu(E) = \int_E f\, d\mu$ για κάθε μετρήσιμο E.) Δείξτε ότι $d|\nu| = |f| d\mu$.

Στο βιβλίο σας υπάρχει αυτό ως συνέπεια του θ. Radon-Nikodym. Δεν το χρειάζεστε.

Υπόδειξη: Κάντε το πρώτα για πραγματική f.

Λύση: Ας υποθέσουμε πρώτα $f \in \mathbb{R}$. Τότε, αν ορίσουμε το μέτρο ν' ως $d\nu' = |f|\, d\mu$, έχουμε

$$\nu'(E) = \int_E |f|\, d\mu \ge \left|\int_E f\, d\mu\right| = |\nu(E)|.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε E έχουμε, από τον ορισμό του $|\nu|$ επίσης την ανισότητα

$$\nu'(E) \ge |\nu|(E), \quad \text{για κάθε } E. \tag{1}$$

Επίσης έχουμε

$$\begin{aligned}
\nu'(E) &= \int_E |f|\, d\mu \\
&= \int_{E\cap\{f\ge 0\}} f\, d\mu + \int_{E\cap\{f<0\}} -f\, d\mu \\
&= \nu(E\cap\{f\ge 0\}) - \nu(E\cap\{f<0\}) \\
&= |\nu(E\cap\{f\ge 0\})| + |\nu(E\cap\{f<0\})| \\
&\le |\nu|(E), \qquad (2)
\end{aligned}$$

από τον ορισμό του $|\nu|$. Από τις ανισότητες (1) και (2) προκύπτει $\nu' = |\nu|$.

Αν τώρα $f \in \mathbb{C}$ η (1) εξακολουθεί να ισχύει ως έχει.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι για κάποιο E έχουμε $\nu'(E) > |\nu|(E)$, αντίθετα με αυτό που θέλουμε να δείξουμε. Γράφουμε $f(x) = |f(x)|e^{ia(x)}$, όπου $0 \le a(x) < 2\pi$ για κάθε x στο χώρο μας.

Για κάποιο μεγάλο φυσικό αριθμό N που θα τον επιλέξουμε αργότερα διαμερίζουμε το σύνολο E ως εξής

$$E = \bigcup_{j=0}^{N-1} E \cap \left\{\frac{2\pi j}{N} \le a(x) < \frac{2\pi(j+1)}{N}\right\} =: \bigcup_{j=0}^{N-1} E_j.$$

Αν $x \in E_j$ τότε $e^{-2\pi i j/N} f(x) \in E_0$ οπότε για αυτά τα x έχουμε

$$|f(x)| = \left|e^{-2\pi i j/N} f(x)\right| \ge \Re(e^{-2\pi i j/N} f(x)) \ge \cos\frac{2\pi}{N}|f(x)|.$$

Άρα

$$
\begin{aligned}
\nu'(E) &= \int_E |f|\,d\mu \\
&= \sum_{j=0}^{N-1} \int_{E_j} |f|\,d\mu \\
&\le \sum_{j=0}^{N-1} \int_{E_j} \frac{1}{\cos(2\pi/N)} \Re(e^{-2\pi ij/N} f(x))\,d\mu \\
&= \frac{1}{\cos(2\pi/N)} \sum_{j=0}^{N-1} \Re\left(e^{-2\pi ij/N} \int_{E_j} f(x)\,d\mu\right) \\
&\le \frac{1}{\cos(2\pi/N)} \sum_{j=0}^{N-1} \left|\int_{E_j} f(x)\,d\mu\right| \\
&= \frac{1}{\cos(2\pi/N)} \sum_{j=0}^{N-1} |\nu(E_j)| \\
&\le \frac{1}{\cos(2\pi/N)} |\nu|(E) \quad \text{από τον ορισμό του } |\nu|. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

Όμως για αρκετά μεγάλο N η ποσότητα $\frac{1}{\cos(2\pi/N)}$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε κοντά στο 1, οπότε παίρνουμε αντίφαση ανάμεσα στις (1) και (3).

Πρόβλημα 2. Αν λ_1, λ_2 είναι δύο μιγαδικά μέτρα στην ίδια σ-άλγεβρα αποδείξτε ότι

$$|\lambda_1 + \lambda_2|(E) \le |\lambda_1|(E) + |\lambda_2|(E)$$

για κάθε μετρήσιμο E.

Λύση: Από τον ορισμό του το μέτρο $|\mu|$ είναι το ελάχιστο μέτρο ν που ικανοποιεί $|\mu(E)| \le \nu(E)$ για κάθε μετρήσιμο E.

Έχουμε

$$|(\lambda_1 + \lambda_2)(E)| = |\lambda_1(E) + \lambda_2(E)| \le |\lambda_1(E)| + |\lambda_2(E)| \le |\lambda_1|(E) + |\lambda_2|(E) = (|\lambda_1| + |\lambda_2|)(E),$$

άρα, αφού αυτό ισχύει για κάθε E, ισχύει, από την παραπάνω ιδιότητα ελαχίστου, $|\lambda_1 + \lambda_2|(E) \le |\lambda_1|(E) + |\lambda_2|(E)$.

Πρόβλημα 3. Αν λ_1, λ_2 είναι δύο μιγαδικά μέτρα στην ίδια σ-άλγεβρα τέτοια ώστε $\lambda_1 \perp \lambda_2$ δείξτε ότι

$$|\lambda_1 + \lambda_2| = |\lambda_1| + |\lambda_2|.$$

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει κάποια μετρήσιμη h, με $|h| = 1$ παντού, τέτοια ώστε $d(\lambda_1 + \lambda_2) = h d(|\lambda_1| + |\lambda_2|)$. Τότε από το Πρόβλημα 1 προκύπτει το ζητούμενο.

Από την πολική ανάλυση (polar decomposition) των λ_j, $j = 1, 2$, έχουμε συναρτήσεις h_j, τέτοιες ώστε $|h_j| = 1$ παντού και $d\lambda_j = h_j d|\lambda_j|$. Αν ο χώρος μας διαμερίζεται στα A, B τέτοια ώστε το λ_1 φέρεται από το A και το λ_2 φέρεται από το B τότε ορίζουμε τη συνάρτηση h, με $|h| = 1$ παντού, να είναι η h_1 στο A και η h_2 στο B.

Έχουμε τότε

$$\begin{aligned}(\lambda_1+\lambda_2)(E) &= \int_E h_1\,d|\lambda_1| + \int_E h_2\,d|\lambda_2| \\ &= \int_{E\cap A} h_1\,d|\lambda_1| + \int_{E\cap B} h_2\,d|\lambda_2| \\ &= \int_{E\cap A} h\,d|\lambda_1| + \int_{E\cap B} h\,d|\lambda_2| \\ &= \int_{E\cap A} h\,d(|\lambda_1|+|\lambda_2|) + \int_{E\cap B} h\,d(|\lambda_1|+|\lambda_2|) \\ &= \int_E h\,d(|\lambda_1|+|\lambda_2|),\end{aligned}$$

που είναι ακριβώς το ζητούμενο.

Πρόβλημα 4. ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΗ!!!!
Ας είναι λ_1, λ_2 δύο μιγαδικά μέτρα (στην ίδια σ-άλγεβρα) που παίρνουν πραγματικές τιμές. Ορίζουμε τη συνολοσυνάρτηση $\mu(E) = \min\{\lambda_1(E), \lambda_2(E)\}$. Δείξτε ότι μ είναι επίσης πραγματικό μέτρο.

Πρόβλημα 5. Βρείτε το μέτρο $|\delta_0 - \delta_1|$ (με πλήρη αιτιολόγηση).

Λύση: Από το Πρόβλημα 3 έχουμε $|\delta_0 - \delta_1| = |\delta_0| + |-\delta_1| = \delta_0 + \delta_1$, αφού εύκολα βλέπουμε ότι για οποιοδήποτε $c \in \mathbb{C}, a \in \mathbb{R}$ ισχύει $|c\delta_a| = |c|\delta_a$.

Πρόβλημα 6. Έστω m το μέτρο Lebesgue και $d\mu = d\delta_0 - \mathbf{1}_{[-1,1]}dm$. Βρείτε το μέτρο $|\mu|$ (με πλήρη αιτιολόγηση).

Λύση: Από το Πρόβλημα 3 έχουμε $\left|\delta_0 - \mathbf{1}_{[-1,1]}m\right| = |\delta_0| + \left|\mathbf{1}_{[-1,1]}m\right|$ αφού τα δύο μέτρα είναι μεταξύ τους ιδιάζοντα. Άρα $\left|\delta_0 - \mathbf{1}_{[-1,1]}m\right| = \delta_0 + \mathbf{1}_{[-1,1]}m$.

Πρόβλημα 7. Αν μ, ν είναι δύο μέτρα πιθανότητας πάνω στην ίδια σ-άλγεβρα Σ (σε ένα χώρο X) και $\alpha = \mu - \nu$ δείξτε ότι

$$|\alpha|(X) = 2\sup_{A\in\Sigma} |\alpha(A)|. \tag{4}$$

Λύση: Έχουμε $(\mu-\nu)(X) = 0$ οπότε για κάθε μετρήσιμο A έχουμε $|(\mu-\nu)(X\setminus A)| = |(\mu-\nu)(A)|$, άρα, από τον ορισμό του $|\mu-\nu|$, για τη διαμέριση $X = A \cup (X\setminus A)$, έχουμε $|\mu-\nu|(X) \geq 2|(\mu-\nu)(A)|$. Αυτό δείχνει ότι το αριστερό μέλος της (4) είναι $\geq$ από το δεξί.

Γνωρίζουμε (ανάλυση Hahn) ότι $(\mu-\nu)^+ \perp (\mu-\nu)^-$ οπότε υπάρχει $A \subseteq X$ τέτοιο ώστε το $(\mu-\nu)^+$ φέρεται από το A και το $(\mu-\nu)^-$ φέρεται από το B. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned}|\mu-\nu|(X) &= |\mu-\nu|(A) + |\mu-\nu|(X\setminus A) \\ &= (\mu-\nu)^+(A) + (\mu-\nu)^-(X\setminus A) \\ &= (\mu-\nu)(A) + (\nu-\mu)(X\setminus A) \\ &= 2(\mu-\nu)(A),\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει και την ανάποδη ανισότητα.

Πρόβλημα 8. Βρείτε ακολουθία $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}^+$, συνεχείς, με $\lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx = +\infty$, και για κάθε x στο πεδίο ορισμού να έχουμε

$$\liminf_n f_n(x) = 0, \quad \limsup_n f_n(x) = 1.$$

Λύση: Ας είναι $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ συνεχείς με $\liminf_n g_n(x) = 0, \limsup_n g_n(x) = 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. (Έχουμε κατασκευάσει τέτοιες ακολουθίες στο παρελθόν. Πάρτε για παράδειγμα το γράφημα της g_n να είναι ένα τραπέζιο ύψους 1, μεγάλης πλευράς 1/10 και μικρής πλευράς 1/20 που περιφέρεται μέσα στο διάστημα $[0,1]$ επ' άπειρον ώστε κάθε σημείο στο $[0,1]$ να πάρει άπειρες φορές την τιμή 0 και άπειρες φορές την τιμή 1.)

Ας είναι επίσης $h_n : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ συνεχείς με $\lim_n h_n(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,1]$ και με $\lim_n \int_0^1 h_n(x)\,dx = +\infty$. (Πάρτε π.χ. τα γραφήματα των h_n να είναι τρίγωνα με βάση το διάστημα $[1/(2n), 1/n]$ και ύψος τέτοιο ώστε να έχουν ολοκλήρωμα ίσο με n.)

Τέλος ορίστε $f_n = g_n + h_n$. Αφού $\int f_n \geq \int h_n$ έχουμε αυτόματα τη ζητούμενη ιδιότητα για το ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας το ότι

$$\liminf_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \liminf_n b_n, \quad \text{αν } \lim_n a_n \text{ υπάρχει,}$$

παίρνουμε και το ζητούμενο για τα limsup και liminf.

Πρόβλημα 9. Ας είναι $B_1, \ldots, B_n$ μπάλες στο $\mathbb{R}^d$. Δείξτε ότι υπάρχει $J \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ έτσι ώστε οι μπάλες $B_j, j \in J$, είναι ανά δύο ξένες και

$$\bigcup_{i=1}^n B_i \subseteq \bigcup_{j \in J} 3B_j,$$

όπου με $3B$ συμβολίζουμε μια μπάλα με ίδιο κέντρο με την μπάλλα B και με τριπλάσια ακτίνα.

Υπόδειξη: Αν δύο μπάλες τέμνονται τότε η τριπλάσια μπάλα της μεγαλύτερης από τις δύο περιέχει την άλλη.

Λύση: Στηριζόμενοι στην υπόδειξη διατάσσουμε κατ' αρχήν τις μπάλες με φθίνουσα σειρά ακτίνας και επιλέγουμε για το σύνολό μας J την πρώτη μπάλα. Πετάμε από τις μπάλες που απομένουν όσες μπάλες τέμνουν την μπάλα που μόλις βάλαμε στο J. Συνεχίζουμε παίρνοντας κάθε φορά για το σύνολό μας J τη μεγαλύτερη (πρώτη στη σειρά) από τις μπάλες που δεν έχουν επιλεγεί ακόμη για το J αλλά και δεν έχουν ακόμη πεταχτεί. Με αυτόν τον τρόπο οι μπάλες που επιλέγουμε δεν τέμνονται μια και κάθε μπάλα που επιλέγεται (εκτός της πρώτης) έχει ήδη περάσει το τεστ του αν τέμνεται με μια από τις μέχρι τότε επιλεγείσες μπάλες. Τέλος αν μια μπάλα B πετάχτηκε στην πορεία αυτό έγινε επειδή έτεμνε μια μεγαλύτερη αυτής μπάλα που επιλέχθηκε για το J. Άρα περιέχεται στην τριπλάσια μπάλα αυτής, πράγμα που αποδεικνύει το ζητούμενο εγκλεισμό.

Πρόβλημα 10. Αποδείξτε ότι το σύνολο των αρρήτων δεν είναι F_σ (αριθμήσιμη ένωση κλειστών).

Λύση: Αρκεί να δείξουμε ότι οι ρητοί δεν είναι G_δ σύνολο (τα συμπληρώματα των F_σ είναι τα G_δ). Αν το $\mathbb{Q}$ είναι G_δ τότε και το $\mathbb{Q} + \sqrt{2}$ είναι G_δ και, σύμφωνα με το θεώρημα του Baire, η τομή τους θα πρέπει να είναι πυκνό σύνολο. Όμως η τομή τους είναι κενή γιατί ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.
