

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ – ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων
Μιχάλης Κολουτζάκης – Εαρινό εξάμηνο 1999-2000
ΠΡΟΟΔΟΣ

1. Έστω G ένα πεπερασμένο κατευθυνόμενο γράφημα με σύνολο κορυφών V και σύνολο ακμών E . Ένα μονοπάτι στο G είναι μια πεπερασμένη ακολουθία ακμών (όχι κατ' ανάγκη διαφορετικών) e_1, e_2, \dots, e_n , που είναι τέτοιες ώστε για κάθε i η δεύτερη κορυφή της ακμής e_i είναι η πρώτη κορυφή της ακμής e_{i+1} . Δείξτε ότι το σύνολο όλων των πεπερασμένων μονοπατιών στο G , οποιουδήποτε μήκους, είναι αριθμήσιμο. Περιγράψτε δηλ. μια διαδικασία απαρίθμησης όλων των μονοπατιών με πεπερασμένο μήκος.

2. Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας το ίχνος, $tr(A)$, του A ορίζεται ως $tr(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii}$. Δείξτε ότι

$$tr(AB) = tr(BA)$$

για οποιουδήποτε δύο $n \times n$ πίνακες A και B .

3. Ένα σημείο P βρίσκεται στο εσωτερικό ενός τετραέδρου T του οποίου η περιγεγραμμένη σφαίρα έχει ακτίνα 1. Δείξτε ότι το P απέχει απόσταση μικρότερη ή ίση του 1 από κάποια κορυφή του T .

4. Έστω $E \subseteq (0, 1)$. Μια συλλογή από διαστήματα I_j , $j = 1, 2, \dots$, αποτελεί μια κάλυψη του E αν $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$. Το μήκος της κάλυψης είναι ο αριθμός (πεπερασμένος ή $+\infty$) $L = \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|$, όπου $|I|$ συμβολίζει το μήκος του διαστήματος I . Συμβολίζουμε με $\mu^*(E)$ το infimum των αριθμών L , για όλες τις δυνατές καλύψεις του συνόλου E . Ο αριθμός $\mu^*(E)$ ονομάζεται εξωτερικό μέτρο του συνόλου E .

Δείξτε ότι αν $\mu^*(E) > 0$ τότε υπάρχει διάστημα $(a, b) \subseteq (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\mu^*(E \cap (a, b)) \geq 0.9(b - a).$$

5. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί κανείς να ανέβει n σκαλοπάτια αν με κάθε βήμα ανεβαίνει ένα ή δύο σκαλοπάτια;

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες. Όλες οι σημειώσεις πρέπει να είναι κλειστές. Καλή επιτυχία.

Ηράκλειο, 21 Μαρ. 2000