Πανεπιστημιο Κρητης – Τμημα Μαθηματικων

Θέματα Ανάλυσης: Σεμινάριο Προβλημάτων

Μιχάλης Κολουντζάκης – Εαρινό εξάμηνο 1999-2000

ΟΜΑΔΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2

1. Δίνεται ένα σύνολο m διανυσμάτων στο $\mathbb{Q}^n$, τα οποία παράγουν ένα διανυσματικό υπόχωρο του $\mathbb{Q}^n$, έστω V. Μπορεί κανείς να δεί τα διανύσματα αυτά και σαν διανύσματα στο διαν. χώρο $\mathbb{R}^n$, όπου πάλι παράγουν, με πραγματικούς συντελεστές αυτή τη φορά, ένα διανυσματικό χώρο W, υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$. Δείξτε ότι

$$\dim_{\mathbb{Q}} V = \dim_{\mathbb{R}} W.$$

Ειδικότερα, αν τα m δεδομένα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{Q}$, δηλ. αν κανείς μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός τους με συντελεστές από το $\mathbb{Q}$, δεν είναι 0, τότε είναι και γραμμικά ανεξάρτητα πάνω από το $\mathbb{R}$.

2. Μιά μπάλα (σφαίρα) ακουμπάει στο πάτωμα σ' ένα σημείο A. Την παίρνουμε και παίζουμε για λίγο και μετά την ξαναακουμπάμε στο ίδιο σημείο, ενδεχόμενα όμως με άλλο προσανατολισμό. Δείξτε ότι υπάρχει κάποιο σημείο στην επιφάνεια της μπάλας που βρίσκεται στην ίδια θέση που βρισκόταν και πριν η μπάλα μετακινηθεί.

3. Σας δίδεται ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας A και υποθέστε ότι υπάρχει ένας $n \times n$ κάτω τριγωνικός πίνακας L τέτοιος ώστε

$$A = L \cdot L^\top.$$

(α) Βρείτε ένα τρόπο να υπολογίσετε όλα τα στοιχεία του πίνακα L μέσω αυτών του A.
(β) Υποθέστε ότι υπάρχει μια ακολουθία ακεραίων h_i, $i = 1, \ldots, n$, τέτοιοι ώστε $0 \le h_i \le i$ και

$$A_{ij} = 0, \quad \text{για } j \le h_i. \tag{1}$$

(Αυτό σημαίνει πως ο πίνακας A έχει 'λίγα' στοιχεία σε κάθε γραμμή, κοντά στη διαγώνιο. Τέτοιοι πίνακες λέγονται *αραιοί*.) Δείξτε ότι κι ο L έχει την ίδια ιδιότητα (1).
(γ) Δείξτε με ποιό τρόπο θα επιλύσετε ένα γραμμικό σύστημα της $A \cdot x = b$, με $b \in \mathbb{R}^n$ ένα γνωστό διάνυσμα, αν γνωρίζετε τον πίνακα L.
(δ) Μπορεί κάθε συμμετρικός πίνακας A να γραφεί στη μορφή $A = L \cdot L^\top$;

4. (α) Δείξτε ότι δεν υπάρχουν δύο $n \times n$ πίνακες A και B τέτοιοι ώστε

$$AB - BA = I.$$

(β) Ομοίως ότι δεν υπάρχουν A και B, με A αντιστρέψιμο, τέτοιοι ώστε

$$AB - BA = A.$$

5. Ο αντιστρέψιμος πίνακας A έχει την ιδιότητα ότι το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής είναι ίσο με s, ανεξάρτητα της γραμμής. Δείξτε ότι τα αθροίσματα γραμμών του A^{-1} είναι όλα $1/s$.

6. Έστω ένα κατευθυνόμενο γράφημα G με n κορυφές. Φτιάχνουμε τον *πίνακα συνδεσμολογίας* A (adjacency matrix) του G θέτοντας $A_{ij} = 1$ αν και μόνο αν υπάρχει ακμή από την κορυφή i στην κορυφή j. Δώστε μια συνδυαστική ερμηνεία του αριθμού $(A^n)_{ij}$.

7. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ και

$$|x| = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{1/2}$$

η Ευκλείδια *νόρμα* του x. Ορίζουμε τη νόρμα του $n \times n$ πίνακα A, θεωρούμενου ως γραμμικού τελεστή από τον Ευκλείδιο χώρο στον εαυτό του, ως:

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|.$$

Υποθέστε ότι ο πίνακας A έχει την ιδιότητα

$$\|I - A\| < 1.$$

Δείξτε ότι ο A είναι αντιστρέψιμος. (*Υπόδειξη:* Για ένα αριθμό $\alpha \in (-1, 1)$ έχουμε $(1-\alpha)^{-1} = \sum_{n \ge 0} \alpha^n$. Προσπαθείστε να κάνετε κάτι ανάλογο για τον πίνακα $I - A$.)

8. Βρείτε ένα τρόπο να ορίσετε, για ένα οποιοδήποτε $n \times n$ πίνακα A τον $n \times n$ πίνακα $\exp A$, με τέτοιο τρόπο ώστε να διατηρούνται όσο περισσότερες ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης μπορείτε. Για παράδειγμα, θέλουμε να έχουμε $I = \exp 0$, όπου 0 είναι ο μηδενικός πίνακας, και θέλουμε επίσης

$$\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B,$$

όταν οι A και B αντιμετατίθενται, δηλ. $AB = BA$. (*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιείστε μια άπειρη σειρά πινάκων.)

Ηράκλειο, 4 Φεβ. 2000