

Έστω μας δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_k = r_k (\cos \vartheta_k + i \sin \vartheta_k)$ ,  $r_k \geq 0$  ( $1 \leq k \leq n$ ).

Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένα  $S \subset \{1, 2, \dots, n\}$  τέτοιο ώστε  $\left| \sum_{k \in S} z_k \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k|$

Σε κάθε  $\vartheta \in \mathbb{R}$  αντιστοιχούμε ένα  $S_\vartheta \subset \{1, 2, \dots, n\}$  τέτοιο ώστε  $k \in S_\vartheta$  αν και μόνο αν  $\cos(\vartheta_k + \vartheta) > 0$ .

Επίσης ορίζουμε μια συνάρτηση  $g_{os}(x) = \begin{cases} \cos x, & \cos x > 0 \\ 0, & \cos x \leq 0 \end{cases}$ .

Παρατηρούμε ότι  $\int_A^{A+2\pi} g_{os}(x) dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) dx = 2$ .

Η συνάρτηση  $f(x) = \sum_{k=1}^n r_k g_{os}(x + \vartheta_k)$  είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο  $2\pi$ ,

ως άθροισμα συνεχών και περιοδικών συναρτήσεων με περίοδο  $2\pi$ . Άρα η  $f(x)$  περνάει μέγιστη της τιμή σε ένα  $\phi$  του διαστήματος  $[0, 2\pi]$ .

Για το  $\phi$  αυτό ισχύει:

$$\begin{aligned} \left( \sum_{k=1}^n r_k g_{os}(\phi + \vartheta_k) \right) (2\pi - 0) &\geq \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=1}^n r_k g_{os}(\theta + \vartheta_k) \right) d\theta = \sum_{k=1}^n \left( r_k \int_0^{2\pi} g_{os}(\theta + \vartheta_k) d\theta \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n \left( r_k \int_{\vartheta_k}^{2\pi + \vartheta_k} g_{os}(\psi) d\psi \right) = \sum_{k=1}^n (r_k \cdot 2) = 2 \sum_{k=1}^n |z_k| \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \left( \sum_{k=1}^n r_k g_{os}(\vartheta_k + \phi) \right) \geq \frac{1}{2\pi} 2 \sum_{k=1}^n |z_k| = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k \in S_\phi} z_k \right| &= \left| (\cos \phi + i \sin \phi) \sum_{k \in S_\phi} z_k \right| = \left| \sum_{k \in S_\phi} r_k (\cos(\vartheta_k + \phi) + i \sin(\vartheta_k + \phi)) \right| \geq \left| \sum_{k \in S_\phi} r_k \cos(\vartheta_k + \phi) \right| = \\ &= \sum_{k=1}^n r_k g_{os}(\vartheta_k + \phi) \geq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n |z_k| \end{aligned}$$

Η μεταφορά από  $\sum_{k \in S_\phi}$  στο  $\sum_{k=1}^n$  έγινε λόγω ιδιοτήτων της  $g_{os}$  και του τρόπου επιλογής του συνόλου  $S_\phi$ .

Άρα το  $S_\phi$  είναι το ζητούμενο υποσύνολο του  $\{1, 2, \dots, n\}$ .