Σύντομες λύσεις Εργαστήριο 2

1 $\vec{AB}:(1,2)$
$\vec{AC}:(4,-2)$ και $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=4-4=0$. άρα $\vec{AB}\perp\vec{AC}$

και $\overset{\triangle}{ABC}$ είναι ορθογώνιο με ορθή την $\hat{A}$

2

$\vec{BC}=\vec{AC}-\vec{AB}$ άρα $|\vec{BC}|^2=(\vec{AC}-\vec{AB})\cdot(\vec{AC}-\vec{AB})=$

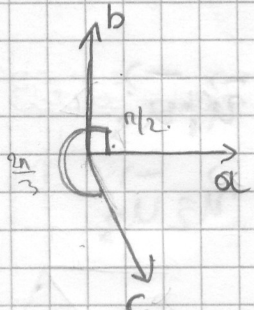
$=|\vec{AC}|^2+|\vec{AB}|^2-\vec{AB}\cdot\vec{AC}-\vec{AC}\cdot\vec{AB}=$

(γιατί;) $=|\vec{AC}|^2+|\vec{AB}|^2-2\vec{AB}\cdot\vec{AC}$

Επίσης $\hat{A}$ είναι ορθή ανν $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0$ άρα

$\hat{A}$ είναι ορθή ανν $|\vec{BC}|^2=|\vec{AC}|^2+|\vec{AB}|^2$

3



$\measuredangle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{2}$
$\measuredangle(\vec{b},\vec{c})=\frac{2\pi}{3}$ Άρα $\measuredangle(\vec{a},\vec{c})=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}=\frac{7\pi}{6}$

$|v|^2=\vec{v}\cdot\vec{v}=(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c})\cdot(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c})=$

$=|a|^2+4|b|^2+9|c|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+12\vec{b}\cdot\vec{c}+6\vec{a}\cdot\vec{c}$

(γιατί;) $=16+4\cdot 25\cdot 3+9\cdot 3+4\vec{a}\cdot\vec{b}+12\vec{b}\cdot\vec{c}+6\vec{a}\cdot\vec{c}$ (*)

Αλλά $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ αφού $\vec{a}\perp\vec{b}$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=|b|\cdot|c|\cdot συν(\frac{2\pi}{3})=15\cdot συν\frac{2\pi}{3}=15\cdot(-\frac{1}{2})=-\frac{15}{2}$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=|a|\cdot|c|\cdot συν(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3})=4\cdot\sqrt{3}\,(-ημ(\frac{2\pi}{3}))=-4\sqrt{3}\cdot ημ(\frac{\pi}{3})$

$=-4\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}/2=-6$

Άρα η (*) γίνεται

$|v|^2=16+300+27-12\cdot\frac{15}{2}-6\cdot 6=217.$

4 $(-2\vec{u}+\vec{v})\cdot(3\vec{u}+2\vec{v})=-6|u|^2+2|v|^2-4\vec{u}\cdot\vec{v}+3\vec{v}\cdot\vec{u}$

$=-6+18-\vec{u}\cdot\vec{v}=12-\vec{u}\cdot\vec{v}$

$|u|=1$
$|v|=3$ Αλλά $\vec{u}\cdot\vec{v}=|u|\cdot|v|\cdot συν\frac{\pi}{3}=3\cdot\frac{1}{2}=3/2$

Άρα $(-2\vec{u}+\vec{v})\cdot(3\vec{u}+2\vec{v})=12-3/2=21/2$ (1)

Επίσης $(-2\vec{u}+\vec{v})\cdot(3\vec{u}+2\vec{v})=|-2\vec{u}+\vec{v}|\cdot|3\vec{u}+2\vec{v}|\cdot\cos\theta$ όπου

θ η γωνία (κυρτή) ανάμεσα στα $-2\vec{u}+\vec{v}$ και $3\vec{u}+2\vec{v}$

Επομένως $\cos\theta = \dfrac{(-2\vec{u}+\vec{v})\cdot(3\vec{u}+2\vec{v})}{|-2\vec{u}+\vec{v}|\cdot|3\vec{u}+2\vec{v}|} \overset{(1)}{=} \dfrac{21/2}{|-2\vec{u}+\vec{v}|\cdot|3\vec{u}+2\vec{v}|}$

Επίσης
$$|-2\vec{u}+\vec{v}|^2 = (-2\vec{u}+\vec{v})\cdot(-2\vec{u}+\vec{v}) = 4|u|^2+|v|^2-4\vec{u}\cdot\vec{v} =$$
$$= 4+9-4\cdot\frac{3}{2} = 7$$

Αντίστοιχα
$$|3\vec{u}+2\vec{v}|^2 = 9|u|^2+4|v|^2+12\,\vec{u}\cdot\vec{v} =$$
$$= 9+36+12\cdot\frac{3}{2} = 63.$$

Άρα $\cos\theta = \dfrac{21/2}{\sqrt{7}\,\sqrt{63}} = \dfrac{21}{2\sqrt{7}\,3\sqrt{7}} = \dfrac{21}{2\cdot3\cdot7} = 1/2.$

Άρα $\theta = \pi/3.$

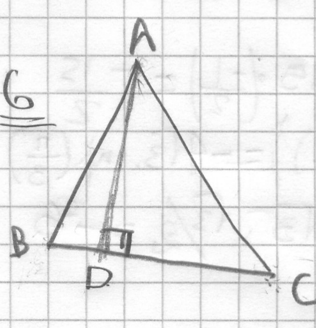
5. $\vec{u}_1 \perp (\vec{u}_2-\vec{u}_3) \Rightarrow \vec{u}_1\cdot(\vec{u}_2-\vec{u}_3)=0 \Rightarrow \vec{u}_1\cdot\vec{u}_2 = \vec{u}_1\cdot\vec{u}_3$

$\vec{u}_2 \perp (\vec{u}_1-\vec{u}_3) \Rightarrow \vec{u}_2\cdot(\vec{u}_1-\vec{u}_3)=0 \Rightarrow \vec{u}_2\cdot\vec{u}_1 = \vec{u}_2\cdot\vec{u}_3$

Άρα $\vec{u}_1\vec{u}_3 = \vec{u}_1\vec{u}_2 = \vec{u}_2\cdot\vec{u}_1 = \vec{u}_2\cdot\vec{u}_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{u}_1\vec{u}_3 - \vec{u}_2\vec{u}_3 = 0 \Rightarrow (\vec{u}_1-\vec{u}_2)\cdot\vec{u}_3 = 0 \Rightarrow \vec{u}_3 \perp \vec{u}_1-\vec{u}_2$

6.



$\overset{\Delta}{ABC}$ είναι ορθογ. στην $\hat{A}$ ανν $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0.$

$\Leftrightarrow \vec{AB}\cdot(\vec{AB}+\vec{BC}) = 0 \Leftrightarrow |\vec{AB}|^2+\vec{AB}\cdot\vec{BC}=0$

$\Leftrightarrow |\vec{AB}|^2 = -\vec{AB}\cdot\vec{BC} = \vec{BA}\cdot\vec{BC}$ (1)

γιατί;

Αλλά $\vec{BA} = \vec{BD}+\vec{DA}$ άρα

$\vec{BA}\cdot\vec{BC} = (\vec{BD}+\vec{DA})\cdot\vec{BC} = \vec{BD}\cdot\vec{BC} + \underbrace{\vec{DA}\cdot\vec{BC}}_{0} = \vec{BD}\cdot\vec{BC}$

0 αφού $\vec{DA}\perp\vec{BC}$

$= \vec{BC}\cdot\vec{BD}$

Άρα από την (1) έχουμε

$\hat{A}$ ορθή <u>ανν</u> $|\vec{AB}|^2 = \vec{BA}\cdot\vec{BC} = \vec{BC}\cdot\vec{BD}$