Εργαστήριο Παρασκευής 28 Νοεμβρίου

α) $3x^2+12x-12-2y^2+12y=0 \iff$

$3(x^2+4x)-2(y^2-6y)-12=0 \iff$

$3\left[(x+2)^2-4\right]-2\left[(y-3)^2-9\right]-12=0 \iff$

$3(x+2)^2-2(y-3)^2=6 \iff \dfrac{(x+2)^2}{2}-\dfrac{(y-3)^2}{3}=1$

$x'=x+2$, $y'=y-3$, $\dfrac{x'^2}{2}-\dfrac{y'^2}{3}=1$ υπερβολή

Νέα αρχή: $O'(-2,3)$ $\qquad \alpha^2=2$, $\beta^2=3$, $\gamma=\sqrt{2+3}=\sqrt{5}$

Τό νέο σύστημα συν/μένων προκύπτει από μεταφορά των άξόνων στο O', χωρίς να χρειάζεται στροφή.

<u>Στό νέο σύστημα αναφοράς</u> τα βασικά γεωμετρικά στοιχεία της υπερβολής είναι:

$E(\sqrt{5},0)$, $E'(-\sqrt{5},0)$, (Εστίες)

$A(\sqrt{2},0)$, $A'(-\sqrt{2},0)$ (Κορυφές)

Κέντρο συμμετρίας $O'(0,0)$

Άξονες συμμετρίας, οι άξονες συν/μένων: $x'=0$, $y'=0$

Λόγω των σχέσεων

$$x=x'-2, \quad y=y'+3$$

τα ίδια γεωμετρικά στοιχεία εκφράζονται στο <u>αρχικό σύστημα αναφοράς</u> ως εξής:

$E(\sqrt{5}-2,3)$, $E'(-\sqrt{5}-2,3)$

$A(\sqrt{2}-2,3)$, $A'(-\sqrt{2}-2,3)$

$O'(-2,3)$

Άξονες συμμετρίας: $x+2=0$, $y-3=0$.

Στὶς ἀσκήσεις (β) καὶ (γ) ἀκολουθεῖται ἡ μέθοδος καὶ ὁ συμβολισμός τῶν σημειώσεων μὲ τίτλο "Δευτεροβάθμιες καμπύλες", στὴν ἱστοσελίδα τοῦ μαθήματος. Ἐπίσης, χρησιμοποιεῖται ὁ συμβολισμός κλπ τῶν σχεδιαγραμμάτων, ὅπως αὐτὰ ἐμφανίζονται στὶς "Κανονικὲς ἐξισώσεις κωνικῶν τομῶν" (ἱστοσελίδα).

(β) $f(x,y)=5x^2+2xy+5y^2-2x-10y-1=0$

$A=5,\ B=1,\ C=5,\ D=-1,\ E=-5,\ F=-1$

Εὕρεση κέντρου συμμετρίας (x_0,y_0): $\left.\begin{matrix} 5x_0+1=1 \\ x_0+5y_0=5 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow (x_0,y_0)=(0,1)$

Νέα ἀρχὴ ἀξόνων $O'(0,1)$.

Στροφὴ τῶν ἀξόνων: $A=C$, ἄρα $\theta=\frac{\pi}{4}$.

Σχέση ἀρχικῶν συν/μένων (x,y) μὲ τὶς νέες συν/μένες (x',y')

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2} \\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ ἄρα } \left.\begin{matrix} x=\frac{\sqrt2}{2}(x'-y') \\ y=\frac{\sqrt2}{2}(x'+y')+1 \end{matrix}\right\} (*)$$

Ἀντικατάσταση στὴν $f(x,y)=0$ δίνει $3x'^2+2y'^2=3$, ἄρα

$$\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{\left(\frac{3}{2}\right)}=1 \qquad \alpha^2=1,\ \beta^2=\frac{3}{2},\ \gamma=\sqrt{\frac{3}{2}-1}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt2}{2}$$

ἔλλειψη

$\beta>\alpha$, ἄρα ὁ μεγάλος ἄξονας εἶναι στὸν ἄξονα τῶν y!

Στὸ νέο σύστημα συν/μένων x',y':

Ἑστίες: $E\left(0,\frac{\sqrt2}{2}\right)$, $E'\left(0,-\frac{\sqrt2}{2}\right)$

Κορυφές: $A(1,0)$, $A'(-1,0)$, $B\left(0,\underbrace{\sqrt{\tfrac{3}{2}}}_{\sqrt6/2}\right)$, $B'\left(0,\underbrace{-\sqrt{\tfrac{3}{2}}}_{-\sqrt6/2}\right)$

Κέντρο συμμετρίας: $O'(0,0)$

Ἄξονες συμμετρίας: $x'=0$, $y'=0$

Στὸ ἀρχικὸ σύστημα συν/μένων: Ἀπὸ τὶς σχέσεις $(*)$ ὑπολογίζουμε

$E\left(-\frac12,\frac32\right)$, $E'\left(\frac12,\frac12\right)$, $A\left(\frac{\sqrt2}{2},1+\frac{\sqrt2}{2}\right)$, $A'\left(-\frac{\sqrt2}{2},1-\frac{\sqrt2}{2}\right)$

$B\left(-\frac{\sqrt3}{2},1+\frac{\sqrt3}{2}\right)$, $B'\left(\frac{\sqrt3}{2},1+\frac{\sqrt3}{2}\right)$

$O'(0,1)$.

Οἱ ἀντίστροφες τῶν σχέσεων $(*)$ εἶναι $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} \\ -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix}$

ἄρα $x'=\frac{\sqrt2}{2}(x+y-1)$, $y'=\frac{\sqrt2}{2}(-x+y-1)$. Συνεπῶς, οἱ ἐξισώσεις τῶν ἀξόνων συμμετρίας στὸ ἀρχικὸ σύστημα συν/μένων εἶναι

$x+y-1=0$, $-x+y-1=0$.

γ) $f(x,y)=2x^2-4xy+2y^2+x-7y+5=0$

$A=2\ ,B=-2,\ C=2,\ D=\frac{1}{2},\ E=-7/2,\ F=5$

$J_2=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=0$ Άρα $\cos\theta=A/\sqrt{A^2+B^2}=\sqrt{2}/2$ και $\sin\theta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Επομένως κάνουμε στροφή κατά γωνία θ και από το παλιό σύστημα (x,y) πάμε στο $(\tilde{x},\tilde{y})$ όπου

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{pmatrix}$$ Δηλ. $$\boxed{\begin{aligned}x&=\frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x}+\tilde{y})\\ y&=\sqrt{2}/2(-\tilde{x}+\tilde{y})\end{aligned}}\ (1)$$

Αντιστροφα

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{x}&=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)\\ \tilde{y}&=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\end{aligned}}$$

Αντικαθιστούμε τα x,y στην $f(x,y)=0$ και έχουμε

$$2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(\tilde{x}+\tilde{y})^2-4\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x}+\tilde{y})(\tilde{y}-\tilde{x})+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(-\tilde{x}+\tilde{y})^2+\frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x}+\tilde{y})-\frac{7\sqrt{2}}{2}(-\tilde{x}$$
$$+5=0$$

$$\Rightarrow\ldots\Rightarrow 4\tilde{x}^2+4\sqrt{2}\,\tilde{x}-3\sqrt{2}\,\tilde{y}+5=0$$

Μετασχηματίζουμε την εξίσωση:

$$4\tilde{x}^2+4\sqrt{2}\tilde{x}-3\sqrt{2}\tilde{y}+5=0\Rightarrow 4\left(\tilde{x}^2+\sqrt{2}\tilde{x}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)-4\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-3\sqrt{2}\tilde{y}+5=$$

$$\Rightarrow 4\left(\tilde{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-2-3\sqrt{2}\tilde{y}+5=0\Rightarrow 4\left(\tilde{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=3\left(\sqrt{2}\tilde{y}-1\right)=3\sqrt{2}\left(\tilde{y}-\right.$$

Δηλ. $(x')^2=\frac{3}{4}\sqrt{2}\,y'$ όπου (2) $\boxed{x'=\tilde{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\text{και}\quad y'=\tilde{y}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\tilde{y}-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Επομένως η $f(x,y)$ είναι παραβολή με $p=\frac{3}{8}\sqrt{2}$ και εστία $E'\left(0,\frac{3}{16}\sqrt{2}\right)$, διευθετούσα δ: $y'=-\frac{3}{16}\sqrt{2}$

Κορυφή το σημείο $O'(0,0)$ και άξονα συμμετρίας τον $y'=0$

Για να μεταφέρουμε τα παραπάνω στοιχεία στο παλιό σύστημα (x,y) παρατηρούμε ότι οι (1) και (2) δίνουν.

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\tilde{x}+\tilde{y})=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\underbrace{x'-\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\tilde{x}}+\underbrace{y'+\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\tilde{y}}\Big)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$$

ενώ

$$y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\tilde{x}+\tilde{y})=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-x'+\frac{\sqrt{2}}{2}+y'+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-x'+y'+\sqrt{2}\right)$$

Επίσης οι αντίστροφες σχέσεις είναι:

$$x'=\tilde{x}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y)+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-y+1)$$

και $$y'=\tilde{y}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1)$$

Επομένως ως προς το παλιό σύστημα συντεταγμένων έχουμε

εστία: $E: \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(0+\frac{3}{16}\sqrt{2}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\left(0+\frac{3}{16}\sqrt{2}+\sqrt{2}\right) \right) = \left(\frac{3}{16}, \frac{3}{16}+1 \right)$

<u>διευθετούσα</u>: $\delta: -\frac{3}{16}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1)$ άρα $\underline{\delta: x+y-1 = -3/8} \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y = 5/8.$

<u>Κορυφή</u> $(0, 1)$

<u>Άξονας συμμετρίας</u>: $0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1) \Rightarrow \underline{x+y=1}$