Ἐφαπτόμενες δευτεροβαθμίων καμπύλων

Καθηγητὴς Ν.Γ. Τζανάκης

Τελευταία αναθεώρηση: Δεκέμβριος 2002

Ἔστω ἡ δευτεροβάθμια καμπύλη

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

καὶ

$$J_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

ἡ ὁρίζουσα, τὴν ὁποία συναντήσαμε ἤδη στὸ φυλλάδιο «Δευτεροβάθμιες Καμπύλες».

> Ὑποθέτομε ὅτι $J_3 \neq 0$, διότι, διαφορετικά, ἡ (1) παριστάνει δύο τεμνόμενες εὐθεῖες, ὁπότε δὲν ἔχει ἐνδιαφέρον τὸ πρόβλημα τῆς ἐφαπτομένης.

1 Ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης σὲ ἕνα σημεῖο της

Ἔστω $P_0 = (x_0, y_0)$ σημεῖο ἐπὶ τῆς καμπύλης. Θέλομε νὰ βροῦμε τὴν ἐξίσωση τῆς εὐθείας, ποὺ ἐφάπτεται τῆς καμπύλης στὸ P_0.

Βοηθητικὰ θεωροῦμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο $P_1 = (x_1, y_1)$ ἐπὶ τῆς καμπύλης, τὸ ὁποῖο μποροῦμε νὰ φαντασθοῦμε ὁσοδήποτε κοντὰ στὸ P_0, ἀλλὰ διαφορετικὸ ἀπὸ αὐτό. Γιὰ ὁποιοδήποτε σημεῖο $P = (x, y)$ τῆς εὐθείας P_0P_1, διαφορετικὸ ἀπὸ τὰ P_0, P_1, ἔστω $\lambda = (P_0PP_1)$ ὁ γνωστὸς ἀπὸ προηγούμενα μαθήματα ἁπλὸς λόγος τῶν τριῶν σημείων. Εἶναι γνωστὸ τότε ὅτι

$$x_1 = \frac{x_0 + \lambda x}{1 + \lambda}\ ,\ y_1 = \frac{y_0 + \lambda y}{1 + \lambda}\ . \tag{2}$$

Ἀντικαθιστώντας στὴν $F(x_1, y_1) = 0$, βρίσκομε ὕστερα ἀπὸ πράξεις, τὴ σχέση

$$f(x,y)\lambda^2 + 2L(x,y)\lambda + f(x_0,y_0) = 0\ , \tag{3}$$

ὅπου

$$L(x,y) = (Ax_0 + By_0 + D)x + (Bx_0 + Cy_0 + E)y + Dx_0 + Ey_0 + F\ . \tag{4}$$

Ἐπειδὴ τὸ P δὲν βρίσκεται ἐπὶ τῆς καμπύλης, $f(x,y) \neq 0$. Ἀντιθέτως, ἐπειδὴ τὸ P_0 εἶναι ἐπὶ τῆς καμπύλης, $f(x_0, y_0) = 0$. Ἄρα, λύνοντας τὴν (3) ὡς πρὸς λ, παίρνομε, ἐν γένει, δύο λύσεις: (α') Τὴν προφανῆ λύση $\lambda = 0$, ἡ ὁποία δὲν εἶναι δεκτή, διότι

τότε ἡ (2) συνεπάγεται ὅτι $P_1 = P_0$, κάτι ποὺ ἔχει ἀποκλεισθεῖ.
(β΄) Τὴ λύση $\lambda = L(x,y)/f(x,y)$. Γιὰ νὰ ἀντιστοιχεῖ ὅμως αὐτὴ ἡ λύση σὲ σημεῖο $P_1 \neq P_0$, πρέπει νὰ εἶναι $\lambda \neq 0$, ἄρα $L(x,y) \neq 0$. Στὴν περίπτωση αὐτή, ἡ εὐθεία τέμνει τὴν καμπύλη σὲ δύο διαφορετικὰ σημεῖα P_0, P_1, ὁπότε ἡ εὐθεία *δὲν* εἶναι ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης.

Ἀναγκαστικά, λοιπόν, προκειμένου νὰ μὴν ὑπάρχει ἐπὶ τῆς εὐθείας σημεῖο τῆς καμπύλης ἄλλο ἀπὸ τὸ P_0, δηλαδή, προκειμένου ἡ εὐθεία διὰ τοῦ P_0 νὰ εἶναι ἐφαπτομένη, πρέπει $L(x,y) = 0$.

Συνεπῶς, λόγῳ τῆς (4), ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης τῆς καμπύλης (1) στὸ σημεῖο της $P_0 = (x_0, y_0)$ εἶναι[1]

$$(Ax_0 + By_0 + D)x + (Bx_0 + Cy_0 + E)y + Dx_0 + Ey_0 + F = 0 \qquad (5)$$

Παρατηρῆστε τὴ σχέση τῶν συντελεστῶν αὐτῆς τῆς ἐξίσωσης μὲ τὶς γραμμὲς τῆς ὁρίζουσας J_3.

Οἱ συντελεστὲς τῶν x καὶ y αὐτῆς τῆς ἐξίσωσης ἀποκλείεται νὰ εἶναι συγχρόνως μηδέν, διότι τότε, λόγῳ καὶ τῆς $f(x_0, y_0) = 0$, θὰ προέκυπτε ὅτι $Dx_0 + Ey_0 + F = 0$ [2]. Ἀλλὰ τότε, τὸ ὁμογενὲς γραμμικὸ σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὶς γραμμὲς τῆς ὁρίζουσας J_3, θὰ εἶχε μὴ μηδενικὴ λύση καί, συγκεκριμένα, τὴν $(x_0, y_0, 1)$, ἄρα ἡ ὁρίζουσα αὐτὴ θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι μηδενική, κάτι ποὺ ἐξ ἀρχῆς ἔχει ἀποκλεισθεῖ.

2 Ἐφαπτόμενες ἀπὸ σημεῖο ἐκτὸς τῆς καμπύλης

Ἔστω τώρα ὅτι τὸ σημεῖο $P_0 = (x_0, y_0)$ δὲν βρίσκεται ἐπὶ τῆς καμπύλης. Θεωροῦμε τὶς δύο ἐφαπτόμενες τῆς καμπύλης, οἱ ὁποῖες διέρχονται διὰ τοῦ P_0. Ἔστω ὅτι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς εἶναι τὰ $P_1 = (x_1, y_1)$ καὶ $P_2 = (x_2, y_2)$. Σύμφωνα μὲ τὴν προηγούμενη παράγραφο, ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης στὸ $P_i, (i = 1, 2)$ εἶναι (βλ. (5), ὅπου τώρα ἔχομε P_i ἀντὶ γιὰ P_0)

$$(Ax_i + By_i + D)x + (Bx_i + Cy_i + E)y + Dx_i + Ey_i + F = 0 \; .$$

Ἐπειδὴ αὐτὴ ἡ ἐφαπτομένη διέρχεται διὰ τοῦ P_0, θὰ πρέπει ἡ ἐξίσωση νὰ ἐπαληθεύεται ἀπὸ τὸ (x_0, y_0), δηλαδή,

$$(Ax_i + By_i + D)x_0 + (Bx_i + Cy_i + E)y_0 + Dx_i + Ey_i + F = 0 \; .$$

Ἂν κάνομε τὶς πράξεις καὶ ἀναδιατάξομε τοὺς ὅρους, ἡ παραπάνω σχέση γράφεται ἰσοδύναμα ὡς

$$(Ax_0 + By_0 + D)x_i + (Bx_0 + Cy_0 + E)y_i + Dx_0 + Ey_0 + F = 0 \; .$$

Ἀλλὰ αὐτὸ λέει ὅτι τὰ δύο σημεῖα $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ ἀνήκουν στὴν εὐθεία μὲ ἐξίσωση

$$(Ax_0 + By_0 + D)x + (Bx_0 + Cy_0 + E)y + Dx_0 + Ey_0 + F = 0 \; . \qquad (6)$$

[1] Ὁ προηγούμενος συλλογισμὸς δὲν εἶναι ἀπολύτως αὐστηρός, ἀλλὰ ἀρκεῖ γιὰ τὶς ἀνάγκες τοῦ συγκεκριμένου μαθήματος.

[2] Παρατηρῆστε ὅτι $F(x_0, y_0) = L(x_0, y_0)$.

Ἄρα, ἡ εὐθεία, ἡ συνδέουσα τὰ δύο σημεῖα ἐπαφῆς P_1, P_2 τῶν ἐφαπτομένων τῆς καμπύλης, ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὸ ἐκτὸς τῆς καμπύλης σημεῖο $P_0 = (x_0, y_0)$, ἔχει ἐξίσωση τὴν (6).

Γνωρίζοντας τώρα τὴν ἐξίσωση τῆς εὐθείας P_1P_2, μποροῦμε νὰ προσδιορίσομε τὶς συντεταγμένες τῶν P_1, P_2, λύνοντας τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (6). Τέλος, οἱ ἐξισώσεις τῶν ἐφαπτομένων P_0P_1 καὶ P_0P_2 βρίσκονται ἀμέσως, ἀφοῦ ξέρομε τὶς συντεταγμένες τῶν σημείων P_0, P_1, P_2.

3 Τελικὸ συμπέρασμα

Τὰ συμπεράσματα τῶν δύο προηγουμένων παραγράφων ἑνοποιοῦνται ὡς ἑξῆς:

Ἔστω $P_0 = (x_0, y_0)$ τυχὸν σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου.
(α΄) Ἂν τὸ P_0 εἶναι σημεῖο τῆς καμπύλης (1), τότε ἡ

$$(Ax_0 + By_0 + D)x + (Bx_0 + Cy_0 + E)y + Dx_0 + Ey_0 + F = 0 \quad (7)$$

εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης στὸ P_0.
(β΄) Ἂν τὸ P_0 δὲν ἀνήκει στὴν καμπύλη (1), τότε ἡ (7) εἶναι ἡ ἐξίσωση τῆς εὐθείας, τῆς συνδέουσας τὰ δύο σημεῖα ἐπαφῆς P_1, P_2 τῶν ἐφαπτομένων ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὸ P_0 στὴν καμπύλη (1), ὑπὸ τὸν ὅρο ὅτι τὸ *σύστημα* τῶν ἐξισώσεων (7) καὶ (1) ἔχει δύο πραγματικὲς λύσεις[3] $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, οἱ ὁποῖες καὶ εἶναι οἱ συντεταγμένες τῶν P_1, P_2. Ἂν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (7) καὶ (1) εἶναι ἀδύνατο στοὺς πραγματικούς, αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἀπὸ τὸ P_0 δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀχθεῖ ἐφαπτομένη στὴν καμπύλη (π.χ. ἡ καμπύλη μπορεῖ νὰ εἶναι μία ἔλλειψη καὶ τὸ P_0 νὰ βρίσκεται στὸ ἐσωτερικό της).

4 Ἀσκήσεις

1. Ὑπολογῖστε τὴν ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης στὸ σημεῖο (x_0, y_0) τῆς κωνικῆς τομῆς μὲ ἐξίσωση $f(x, y) = 0$ στὶς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

   (α΄) $f(x, y) = 3x^2 + 12xy + 8y^2 - 2x + 4y + 1,\ (x_0, y_0) = (1, -1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$.

   (β΄) $f(x, y) = 5x^2 - 4xy + 2y^2 + 12x - 6y + 1,\ (x_0, y_0) = (-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{46}}{4})$.

   (γ΄) $f(x, y) = 4x^2 + 12xy + 9y^2 + 2\sqrt{13}x + 2\sqrt{13}y - 1,\ (x_0, y_0) = (1, -1)$.

[3] Μπορεῖ ν' ἀποδειχθεῖ ὅτι, ἂν τὸ σύστημα ἔχει πραγματικὲς λύσεις, αὐτὲς εἶναι δύο διαφορετικές, ἐφ' ὅσον τὸ P_0 δὲν βρίσκεται ἐπὶ τῆς καμπύλης.

2. Χρησιμοποιώντας τὴ γενικὴ θεωρία ἀποδεῖξτε ὅτι:

   (αʹ) Ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης σ' ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο (x_0, y_0) τοῦ κύκλου $(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 = R^2$ μπορεῖ νὰ πάρει τὴ μορφὴ $(x_0 - x_k)(x - x_k) + (y_0 - y_k)(y - y_k) = R^2$.

   (βʹ) Ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης σ' ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο (x_0, y_0) τῆς ἐλλείψεως $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ εἶναι $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$.

   (γʹ) Ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης σ' ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο (x_0, y_0) τῆς ὑπερβολῆς $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ εἶναι $\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$.

   (δʹ) Ἡ ἐξίσωση τῆς ἐφαπτομένης σ' ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο (x_0, y_0) τῆς παραβολῆς $y = cx^2$ εἶναι $2cx_0 x = y + y_0$.

3. Στὶς παρακάτω περιπτώσεις τὸ σημεῖο (x_0, y_0) δὲν εἶναι ἐπὶ τῆς καμπύλης $f(x, y) = 0$. Σὲ κάθε περίπτωση ἐξετᾶστε ἂν ἄγονται ἐφαπτόμενες ἀπὸ τὸ σημεῖο αὐτὸ στὴν καμπύλη καὶ ἂν ναί, βρεῖτε τὴν ἐξίσωση τῆς εὐθείας ποὺ συνδέει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, καθὼς καὶ τὶς συντεταγμένες τῶν σημείων ἐπαφῆς.

   (αʹ) $f(x, y) = 11x^2 + 6xy + 3y^2 + 2x + 6y - 21,\ (x_0, y_0) = (2, 4)$.

   (βʹ) $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + 2y^2 - 2x + 6y - 16,\ (x_0, y_0) = (2, \frac{1}{4})$.

   (γʹ) $f(x, y) = 80x^2 - 6xy - 2y^2 - 2x - 88y + 2,\ (x_0, y_0) = (\frac{10}{33}, -\frac{17}{11})$.

   (δʹ) $f(x, y) = 2x^2 - 4xy + 2y^2 - 2x + 6y - 16,\ (x_0, y_0) = (\frac{3}{4}, \frac{9}{4})$.

   (εʹ) $f(x, y) = 11x^2 + 6xy + 3y^2 + 2x + 6y - 21,\ (x_0, y_0) = (1, -2)$.