Γραμμική ΙΙ, Εαρινό 2009
Φυλλάδιο 3
Ασκήσεις (επανάληψης) σε γραμμικές απεικονίσεις.

1. Σωστό ή Λάθος (αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας)

1)Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ώστε $f(1,1) = (0,1)$ και $f(2,2) = (1,0)$.

2)Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμμική ώστε $f(1,1) = (-1,2)$ και $f(1,2) = (2,2)$. Τότε $Imf = \mathbb{R}^2$.

3)Υπάρχει πάντα ενας επιμορφισμός f από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ όταν $n \geq m$.

4)Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ώστε $Kerf =< (1,0,0,0),(0,1,0,0) >$ και $Imf =< (1,0,0) >$.

5)Υπάρχει γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ ώστε $Kerf =< (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0) >$ και $Imf =< (1,0,0) >$.

2. Δώστε (αν υπάρχει) γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε $Kerf = Imf$. Ίδια ερώτηση για $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

3. Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ γραμμική ώστε $f(1,0,0) = (-1,2)$ και $f(0,1,0) = (2,2)$ και $f(0,1,1) = (1,1)$. Βρείτε $[f]_{\hat{e}}^{\hat{e}}$ και $[f]_{\hat{B}}^{\hat{e}}$ όπου $\hat{B} = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ είναι διατεταγμένη βάση του $\mathbb{R}^3$.

4. α) Έστω V δ.χ. διάστασης n και γραμμικές απεικονίσεις $f, g \in L(V,V) = L(V)$, ώστε $f \circ g = 0$. Δείξτε ότι $rankf + rankg \leq n$.
β) Αποδείξτε ότι για κάθε γραμ. απεικ. $f \in L(V)$ υπάρχει γραμμική $g \in L(V)$ ώστε $f \circ g = 0$ και $rankf + rankg = n$

5. Έστω $f : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ γραμμική ώστε $f(k_0 + k_1x + k_2x^2) = k_0 + (k_2 - k_0)x$. Να βρεθούν διατεταγμένες βάσεις $\hat{a}, \hat{b}$ του $\mathbb{R}_2[x]$ ώστε

$$[f]_{\hat{a}}^{\hat{b}} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

για κατάλληλο r.

6.(*) Έστω V δ.χ. διάστασης n πάνω από σώμα F, και $f : V \to V$ γραμμική ώστε $f \circ g = g \circ f$ για κάθε $g \in L(V)$. Δείξτε ότι $f = a1_V$ για κάποιο $a \in F$