Γραμμική ΙΙ, Εαρινό 2009
Πρόοδος 1
3/4/09

1.(3 μον) Έστω

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1)(0.5) Δείξτε ότι ο $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ είναι διαγωνιοποιήσιμος.
2)(1) Βρείτε P αντιστρέψιμο ώστε $P^{-1}AP = D$ είναι διαγώνιος.
3)(0.5) Υπολογίστε A^n, $n = 1, 2, \cdots$
4)(0.5) Βρείτε $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ώστε $B^3 = A$
5)(0.5) Βρείτε τις ιδιοτιμές του $A^2 + 3A + 2I_3 = C$

2.(2 μον) Για ποιές τιμές των a, b, c, d είναι ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 & b \\ 0 & 2 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

διαγωνιοποιήσιμος ; (Υποδ. Δουλέψτε με το ελάχιστο πολυώνυμο του A).

3.(1.5 μον) Έστω $T : V \to V$ γραμμική συνάρτηση
1) Δείξτε ότι αν $Im(T) = Ker(T)$ τότε $dimV = 2k$ είναι άρτιος.
2) Δείξτε ότι αν $RankT = RankT^2$ τότε $KerT \cap ImT = 0$. (Υπόδ. Δείξτε πρώτα ότι $KerT \subseteq KerT^2$ και $ImT^2 \subseteq ImT$.)

4.(0.6 κάθε μία) Σωστό ή Λάθος (Δικαιολογείστε πλήρως τις απαντήσεις σας)
1) Υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας που έχει σαν ιδιοτιμή το 0
2) Αν λ είναι ιδιοτιμή του A και μ είναι ιδιοτιμή του B τότε $\lambda + \mu$ είναι ιδιοτιμή του $A + B$
3) Υπάρχει διαγωνιοποιήσιμος πίνακας με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $(x-2)^2(x-3)$ και ελάχιστο το $(x-1)(x-2)$.
4) Υπάρχει x ώστε το $(0, 1)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & x \end{pmatrix}$
5) Το ελάχιστο πολυώνυμο του $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ είναι το $(x-1)^2$.
6) Αν U, V είναι ιδιόχωροι μιας γραμμικής απεικόνισης που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές τότε είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι δηλ. $U + V = U \oplus V$.

Bonus
5.(2 μον)
Έστω $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.
α) $A^3 = 0$
β) $\chi_A(x) = -x^3$
ς) $tr(A) = tr(A^2) = tr(A^3) = 0$. οπου $tr(A)$ είναι το ίχνος του A δηλαδή ο άθροισμα των στοιχείων της διαγωνίου του.