

Εισαγωγή στη Θεωρία Γραφημάτων, Εαρινό 2010
Φυλλάδιο 2

1. Σωστό ή λάθος ; (Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα)
Έστω G άρτιο συνεκτικό απλό γράφημα (κάθε κορυφή έχει άρτιο βαθμό)

- 1) G δεν μπορεί να έχει γέφυρες
- 2) G μπορεί να έχει cut-vertices.

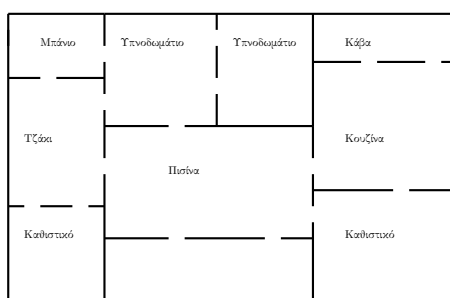
2. Δώστε παραδείγματα γραφημάτων που να ικανοποιούν κάθε μία από τις παρακάτω συνθήκες:

- 1) Συνεκτικό 3-κανονικό γράφημα που περιέχει γέφυρα
- 2) Συνεκτικό γράφημα με περισσότερες γέφυρες από cut-vertices
- 3) Συνεκτικό γράφημα με περισσότερες cut-vertices από γέφυρες
- 4) $2k + 1$ -κανονικό απλό γράφημα που περιέχει γέφυρα (για κάθε $k \geq 1$).

3. Έστω G απλό γράφημα με $2k$ κορυφές που δεν περιέχει κύκλους μήκους 3 (τρίγωνα). Δείξτε με επαγωγή στο k ότι $|E(G)| \leq k^2$. Δώστε παράδειγμα γραφήματος με $2k$ κορυφές και k^2 ακμές (δηλ. πιάνει το παραπάνω άνω φράγμα).

4. Έστω G απλό συνεκτικό γράφημα, και k το μήκος του μεγαλύτερου μονοπατιού χ.ε.κ. που περιέχει. Έστω P και Q δύο μονοπάτια χ.ε.κ. μήκους k . Δείξτε ότι τα P και Q έχουν κοινή κορυφή.

5. Το παρακάτω σχέδιο είναι η κάτοψη της βίλας του γνωστού δισεκατομμυριούχου κόμη Van Diamond. Ο κόμης μόλις δολοφονήθηκε και ο James Bomb ο διάσημος detective, πρώην δημόσιος υπάλληλος, τωρινός βοηθός διευθυντή αλυσίδας εστιατορίων, και λάτρης της Θ.Γραφημάτων έχει κληθεί να λύσει την υπόθεση. Ο butler ισχυρίζεται ότι είδε τον κηπουρό να μπαίνει στο δωμάτιο με την πισίνα (εκεί όπου έγινε ο φόνος), και μετά από λίγο να βγαίνει από το δωμάτιο από την ίδια πόρτα. Ο κηπουρός όμως ισχυρίζεται ότι δεν είναι ο άνθρωπος που είδε ο butler γιατί ο ίδιος μπήκε στο σπίτι πέρασε από κάθε πόρτα ακριβώς μία φορά και μετά έφυγε από το σπίτι. Ο James Bomb αφού κοίταξε για λίγο το σχέδιο του σπιτιού δήλωσε ότι έλυσε την υπόθεση. Ποιός σκότωσε τον κόμη;



ΣΧΗΜΑ 1. Κάτοψη του σπιτιού

6.* Έστω G απλό γράφημα με n κορυφές, $n \geq 2$. προσδιορίστε το μεγαλύτερο δυνατό αριθμό ακμών σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) G είναι μή συνεκτικό
- β) G έχει k συνεκτικές συνιστώσες
- γ) G περιέχει m κορυφές που ανά δύο δεν είναι γείτονες.