

1. (Το πρόβλημα του χαρεμιού) Έστω A ένα σύνολο αγοριών. Υποθέτουμε ότι κάθε αγόρι στο A επιθυμεί να παντρευτεί παραπάνω από μία από τις φίλες του. Βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το πρόβλημα του χαρεμιού να έχει λύση. Πως γίνεται αυτή η συνθήκη αν θέλουμε κάθε άνδρας να παντρευτεί ακριβώς r γυναίκες ;
2. Έστω $G = G(V_1, V_2)$ διμερές γράφημα από το V_1 στο V_2 . Αν ο βαθμός κάθε κορυφής του V_1 είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού κάθε κορυφής του V_2 , δείξτε ότι υπάρχει πλήρες ταίριασμα από το V_1 στο V_2 .
3. Δείξτε ότι κάθε δέντρο έχει το πολύ ένα πλήρες ταίριασμα.
4. Δύο άνθρωποι παίζουν ένα παιχνίδι σε τυχαίο γράφημα G , διαλέγοντας ο καθένας με την σειρά του μία κορυφή ως εξής: ο πρώτος παίκτης διαλέγει (τυχαία) κορυφή στο γράφημα, και σε κάθε βήμα ο παίκτης που παίζει διαλέγει κορυφή γειτονική στην προηγούμενη επιλεγμένη κορυφή (του άλλου παίκτη), που δεν έχει ήδη επιλεγεί. (Δηλαδή οι επιλογές τους σχηματίζουν ένα μονοπάτι στο γράφημα χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές). Κερδίζει ο παίκτης που τελευταίος διαλέγει κορυφή. Δείξτε ότι ο δεύτερος παίκτης έχει στρατηγική νίκης αν το γράφημα έχει πλήρες ταίριασμα, ενώ αν το γράφημα δεν έχει πλήρες ταίριασμα τότε ο πρώτος παίκτης έχει στρατηγική νίκης.
5. Για το τυχαίο απλό γράφημα G με σύνολο κορυφών $u_1, u_2, \dots, u_n$, φτιάχνουμε τον $n \times n$ πίνακα A που στην (i, j) θέση έχει 1 αν οι κορυφές u_i, u_j είναι γείτονες και 0 αν δεν είναι. Δείξτε ότι αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε το γράφημα έχει πλήρες ταίριασμα. (Υποδ. Σκεφτείτε την ορίζουσα του πίνακα.)