Ανάλυση 1, Χειμερινό 2011

Φυλλάδιο 1

1. Βρείτε, όπου υπάρχουν, τα $\max, \min, \inf$ και $\sup$ των συνόλων:
1)$\{(-1)^n n, n \in \mathbf{N}\}$
2)$\{\frac{1+(-1)^n}{2n} + \frac{1-(-1)^n}{2} n \mid n \in \mathbf{N}\}$
3)$\{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbf{N}\}$
4)$\{1/n + 1/m \mid n, m \in \mathbf{N}\}$
5)$\{1/n - 1/m \mid n, m \in \mathbf{N}\}$
6)$\cup_{n=1}^{\infty}[2n-1, 2n]$
7)$\cup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}]$

2. Έστω A, B μη κενά φραγμένα σύνολα. Δείξτε ότι :
1)$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$ και $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
2)$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ και $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

3. Έστω A, B μη κενά φραγμένα σύνολα. Αν $\sup A = \inf B$, δείξτε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \epsilon$.

4. Έστω A, B μη κενά φραγμένα σύνολα. Υποθέτουμε ότι :
1) για κάθε $a \in A$ και $b \in B$ ισχύει $a \leq b$, και
2) για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $b - a < \epsilon$.
Δείξτε ότι $\sup A = \inf B$.

5. Έστω A, B μη κενά άνω φραγμένα σύνολα. Δείξτε ότι $\sup A \leq \sup B$ αν και μόνο αν για κάθε $a \in A$ και κάθε $\gamma < a$ υπάρχει $b \in B$ με $b > \gamma$.

6. Έστω A μη κενό φραγμένο σύνολο. Αν $t \in \mathbf{R}$ ορίζουμε $tA = \{ta \mid a \in A\}$. Δείξτε ότι
1)αν $t \geq 0$ τότε $\sup(tA) = t \sup A$ και $\inf(tA) = t \inf A$.
2)αν $t < 0$ τότε $\sup(tA) = t \inf A$ και $\inf(tA) = t \sup A$.

7. Δείξτε ότι:
1) αν $a \leq \epsilon^2$ για κάθε $\epsilon > 0$ τότε $a \leq 0$.
2) αν $a \leq 1 + \epsilon + \epsilon^2$ για κάθε $\epsilon > 0$ τότε $a \leq 1$.