Ανάλυση 1, Χειμερινό 2011

Φυλλάδιο 2

1.Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς δείξτε:
1) $\sqrt{n^4+4} - \sqrt{n^4+1} \to 0$
2) $\frac{n^2-n}{n^2+n} \to 1$
3) $\frac{3+\log_2 n}{1+3\log_2 n} \to \frac{1}{3}$
4) $a_n \to 0$ όπου $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{, αν } n \text{ είναι πολλαπλάσιο του 3} \\ \frac{1}{n^2+1} & \text{, αλλιώς} \end{cases}$

2. Έστω $x \in \mathbf{R}$. Δείξτε ότι
1)υπάρχει ακολουθία άρρητων αριθμών x_n με όριο το x
2)υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών y_n με όριο το x.
Μπορείτε να φτιάξετε τις παραπάνω ακολουθίες γνησίως αύξουσες (ή γν. φθίνουσες);

3. Σωστό η Λάθος
1)Κάθε συγκλίνουσα είναι μονότονη.
2)Υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία φυσικών αριθμών.
3)Αν $a_n > 0$ και δεν είναι άνω φραγμένη τότε $a_n \to \infty$.
4)Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία άρρητων συγκλίνει σε άρρητο.
5)$a_n \to \infty$ αν και μόνο αν για κάθε $M > 0$ υπάρχουν άπειροι όροι της a_n μεγαλύτεροι από το M.
6)αν $a_n \to 0$ και $a_n > 0$ τότε η ακολουθία είναι φθίνουσα.

4. Έστω A κάτω φραγμένο σύνολο. Αν $l = \inf A$ δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (a_n) στοιχείων του A με $a_n \to a$. Δείξτε επίσης ότι αν το l δεν είναι στοιχείο του συνόλου A τότε μπορείτε να επιλέξετε την a_n να είναι φθίνουσα.

5. Έστω $a_n \to 2$. Θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} A_1 &= \{n \in \mathbf{N} : a_n < 2.001\} \\ A_2 &= \{n \in \mathbf{N} : a_n > 2.003\} \\ A_3 &= \{n \in \mathbf{N} : a_n < 1.98\} \\ A_4 &= \{n \in \mathbf{N} : 1.999997 < a_n < 2.00001\} \\ A_5 &= \{n \in \mathbf{N} : a_n \leq 2\}. \end{aligned}$$

Για κάθε $i = 1, \ldots, 5$, εξετάστε αν
α) το A_i είναι πεπερασμένο,
β) το $N \setminus A_i$ είναι πεπερασμένο.
(Δείτε πως γενικεύεται αυτή η άσκηση αν στην θέση των συγκεκριμένων τιμων (όπως 2.001, 1.98) χρησιμοποιήσουμε $2+\epsilon$ ή $2-\epsilon$, όπου $\epsilon > 0$.)

6.1)Δείξτε ότι $\cap_{\epsilon>0}(x-\epsilon, x+\epsilon) = \{x\}$.
2) Έστω ότι για την ακολουθία (x_n) και τον x ισχύει ότι: υπάρχει $n_0 \in \mathbf{N}$ ώστε για κάθε $\epsilon > 0$ να ισχύει $|x_n - x| < \epsilon$ για κάθε $n \in \mathbf{N}, n \geq n_0$. Τί συμπεραίνετε για την ακολουθία; (Αντιπαραβάλετε με τον ορισμό του $x_n \to x$.)