Ανάλυση 1, Χειμερινό 2011

Φυλλάδιο 3

1. Για τις επόμενες ακολουθίες εξετάστε αν υπάρχει το όριό τους, και αν υπάρχει βρείτε το.

1) $\frac{-n^2+(-1)^n n+\frac{1}{n}}{3n+2(-1)^{n-1}\sqrt{n}}$
2) $\frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+2^{n+1}}$
3) $\frac{2^7}{3^7}+\frac{2^8}{3^8}+\cdots\frac{2^{n+6}}{3^{n+6}}$
4) $1-2+2^2+\cdots+(-1)^n 2^n$
5) $2n+n\sin n$
6) $\frac{1}{n(2-\sin n)}$
7) $(\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{n-1}}{4})^n$
8) $(\sqrt[n]{n}-1)^n$
9) $2^{(-1)^{n-1}}$
10) $(-1)^{n-1}+\frac{10}{n^3}$

2. Δείξτε ότι

1) $\sqrt[n]{n^4+3n^2+n+1}\to 1$
2) αν $0\leq a\leq b\leq c$ τότε $\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}\to c$
3) αν $0<a\leq x_n^n\leq b$ τότε $x_n\to 1$.

3.

1) Αν $x_n\to x$ και $x_n\leq x$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$ δείξτε ότι $\sup\{x_n\mid n\in\mathbf{N}\}=x$.
2) Αν $x_n\to x$ και $x_n<x$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$ δείξτε ότι η x_n δεν έχει μέγιστο όρο.
3) Αν $x_n\to x$ και υπάρχει $k\in\mathbf{N}$ ώστε $x_k\geq x$ δείξτε ότι η x_n έχει μέγιστο όρο.

4. Έστω $x_1>0$ και $x_n\geq x_1+\cdots+x_{n-1}$ για κάθε $n\in\mathbf{N}$. Αν $0<a<2$ δείξτε ότι $\frac{x_n}{a^n}\to\infty$. Εξετάστε την ακολουθία 2^n σχετικά με την περίπτωση $a=2$.