# Ανάλυση 1, Χειμερινό 2011

Φυλλάδιο 4

**1.** Έστω $x_1 > 0$ και $x_{n+1} = \frac{6+6x_n}{7+x_n}$ για $n \in \mathbf{N}$. Δείξτε ότι ανάλογα με την τιμή του $x_1$ η ακολουθία $x_n$ είναι αύξουσα ή φθίνουσα και βρείτε το όριό της.

**2.** Έστω φραγμένη ακολουθία $(x_n)$ ώστε να ισχύει $2x_{n+1} \leq x_n + x_{n+2}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Ορίζουμε $y_n = x_n - x_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbf{N}$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $y_n$ είναι μονότονη και φραγμένη και ότι $y_n \to 0$.

**3.**Αν το σύνολο των όρων μιας ακολουθίας είναι πεπερασμένο δείξτε ότι υπάρχει σταθερή υπακολουθία της.

**4.** Αποδείξτε ότι μια ακολουθία $(x_n)$ έχει όριο το $x \in \bar{\mathbf{R}}$ αν και μόνο αν κάθε υπακολουθία της $(x_n)$ έχει υπακολουθία με όριο $x$.

**5.** Έστω $a, b, x \in \mathbf{R}$ με $a \neq b$. Έστω ότι $x_{2k} \to a$ και $x_{2k+1} \to b$ και ότι υπάρχει υπακολουθία $(x_{n_k})$ ώστε $x_{n_k} \to x$.
1) Δείξτε ότι η $(x_{n_k})$ έχει άπειρους όρους κοινούς είτε με την $(x_{2k})$ είτε με την $(x_{2k+1})$.
2) Δείξτε ότι $x = a$ η $x = b$.

**6.** Δείξτε ότι η ακολουθία $(x_n)$ δεν έχει όριο αν και μόνο αν υπάρχουν δύο υπακολουθίες της με διαφορετικά όρια.

Για την επόμενη άσκηση σας μίλησα στην τάξη. Δεν θα γίνει στο εργαστήριο, και όποιος την λύσει ας επικοινωνήσει μαζί μου μέχρι τις 27/11 για να εισπράξει το ‘‘δώρο’’ του στην ερχόμενη πρόοδο.

**7.** Κατασκευάστε ακολουθία ρητών αριθμών ώστε κάθε ακολουθία ρητών να είναι υπακολουθία της.