Ανάλυση 1, Χειμερινό 2011

Φυλλάδιο 5

1. Άσκηση 3 σελίδα 69 από τις σημειώσεις του κ. Παπαδημητράκη.

2.1)Βρείτε ακολουθία της οποίας τα σ.σ. είναι το διάστημα $[0,1]$.
2) Υπάρχει ακολουθία της οποίας τα σ.σ. είναι το $(0,1)$ ή το $(0,1]$;
3) Υπάρχει ακολουθία της οποίας τα σ.σ. είναι το σύνολο $[0,1]\cap \mathbf{Q}$;

3.Βρείτε τα $\limsup, \liminf$ των ακολουθιών (2^{-n}), $((-2)^n)$, $((-1)^{n+1}+\frac{1}{n})$, $((-1)^{n-1}(1-\frac{1}{n}))$, $(\cos(\pi n/4)+1/n)$ και q_n η ακολουθία των ρητών που βρίσκονται στο $(0,1]$.

4. Έστω $s=\limsup a_n$. Δείξτε ότι
1) Για κάθε $x>s$ ισχύει τελικά $a_n<x$. Επίσης αν ισχύει τελικά $a_n<x$ τοτε $x\geq s$.
2) Για κάθε $x<s$ ισχύει $a_n>x$ για άπειρους n. Επίσης αν ισχύει $a_n>x$ για άπειρους n τοτε $x\leq s$.
3) Διατυπώστε και αποδείξτε τις αντίστοιχες ιδιότητες για το $\liminf$.

5.Έστω x_n, y_n φραγμένες ακολουθίες με $x_n\leq y_n$. Δείξτε ότι

$$\liminf x_n \leq \liminf y_n \text{ και } \limsup x_n \leq \limsup y_n.$$

6. Αν x_{k_n} υπακολουθία της x_n δείξτε ότι
1) $\liminf(-x_n)=-\limsup(x_n)$ και $\limsup(-x_n)=-\liminf(x_n)$
2) $\liminf x_n\leq \liminf x_{k_n}\leq \limsup x_{k_n}\leq \limsup x_n$.

7.Έστω a_n φραγμένη ακολουθία και έστω S το σύνολο των σ.σ. της a_n. Αν s_n ακολουθία στοιχείων του S που συγκλίνει $s_n\to x$, δείξτε ότι και το x ανήκει στο S.