

Ανάλυση 1, Χειμερινό 2011

Φυλλάδιο 6

Δείτε τις παρακάτω ασκήσεις από τις σημειώσεις του κ. Παπαδημητράκη σχετικά με όρια συναρτήσεων:

Άσκηση 3 σελίδα 86,

Άσκηση 6 σελίδα 96,

Άσκηση 16 σελίδα 107,

(Για δική σας εξάσκηση σχετικά με όρια συναρτήσεων μπορείτε να δείτε μερικές ασκήσεις από τις 2,3 και 4 στην σελίδα 115.)

Ασκήσεις Προόδου (Θέματα Α):

1. Έστω η ακολουθία $a_n = (-1)^n [3 + \frac{(-1)^n}{n}]$ και $A = \{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ το σύνολο τιμών της. Βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\min A$, $\max A$, $\sup A$, $\inf A$ καθώς και τα $\liminf(a_n)$ και $\limsup(a_n)$. Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Αν η ακολουθία a_n ικανοποιεί $|a_{n+1} - a_n| < \frac{2}{5}|a_n - a_{n-1}|$ για κάθε $n \geq 100$, δείξτε ότι η a_n είναι Cauchy.
3. Εξετάστε αν τα παρακάτω ισχύουν ή όχι. Δικαιολογήστε πλήρως τις απαντήσεις σας.
 - α) Υπάρχει ακολουθία a_n με $a_n \rightarrow 7$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{n \in \mathbf{N} \mid a_n > 7.001\}$ να είναι άπειρο.
 - β) Υπάρχει ακολουθία a_n με $a_n \rightarrow 7$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{n \in \mathbf{N} \mid a_n \geq 7\}$ να είναι πεπερασμένο.
 - γ) Υπάρχει ακολουθία a_n με σημεία συσσώρευσης το διάστημα $[1, 2]$.
 - δ) Υπάρχει ακολουθία a_n με σημεία συσσώρευσης το διάστημα $(1, 2]$.
 - ε) Υπάρχουν ακολουθίες a_n, b_n που τείνουν στο άπειρο, ενώ η $\frac{a_n}{b_n}$ δεν συγκλίνει αν και είναι φραγμένη.
4. Αν $a_n \rightarrow a$ δείξτε ότι $\limsup(a_n + b_n) = a + \limsup(b_n)$.