

Γραμμική Άλγεβρα 1

Ολοήμερο Εργαστήριο 9

Α. Νικολιδάκης- Μ. Λουκάκη

1. Έστω T η γραμμική απεικόνιση του R^3 με τύπο

$$T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z).$$

- 1) Είναι η T αντιστρέψιμη; Αν ναι βρείτε τύπο για την T^{-1} .
- 2) Δείξτε ότι η T ικανοποιεί $(T^2 - I)(T - 3I) = 0$.

2. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση f ώστε

$$f(1, 1, 2) = (1, 0, 2), f(0, -1, 1) = (1, 1, 1), f(1, 0, 2) = (3, 2, 4).$$

- 1) Βρείτε τον πίνακα A της παραπάνω απεικόνισης.
- 2) Δείξτε ότι η εικόνα της f είναι ένα επίπεδο στον R^3 .
- 3) Βρείτε τον πυρήνα της f .
- 4) Βρείτε έναν υπόχωρο V του R^3 διάστασης 2 ώστε $f(V) = f(R^3)$.
- 5) Δείξτε ότι η $f : V \rightarrow R^3$ είναι ένα προς ένα.
- 6) Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in R^3$, ώστε $f(v) = (0, 1, -1)$.
- 7) Βρείτε έναν υπόχωρο W του R^3 διάστασης 2 με την ιδιότητα ο $f(W)$ να ισούται με τον χώρο που παράγεται από το διάνυσμα $(0, 1, -1)$.
- 8) Είναι η $f : W \rightarrow R^3$ ένα προς ένα;

3. 1) Να βρεθούν μία βάση και η διάσταση του πυρήνα και της εικόνας της εξής γραμμικής απεικόνισης:

$$f(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$$

2) Δείξτε ότι εάν $f, g : R^n \rightarrow R^m$ είναι γραμμικές απεικονίσεις που συμφωνούν στα στοιχεία μιας βάσης του R^n , τότε είναι ίσες.

4. Εάν V γνήσιος υπόχωρος του R^n και x διάνυσμα του R^n που δεν ανήκει στον V τότε βρείτε γραμμική απεικόνιση $f : R^n \rightarrow R$ ώστε $f(v) = 0$ για κάθε $v \in V$ και $f(x) = 1$.