Γραμμική Άλγεβρα 1

Υποδείξεις-Σύντομες Λύσεις

Ολοήμερο Εργαστήριο 1

Λ. Νικολιδάκης– Μ. Λουκάκη

1. Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα y_1, y_2, y_3 ώστε τα διανύσματα $(0, y_1), (1, y_2), (2, y_3)$ να είναι στην ίδια ευθεία;

Απάντηση

Η ευθεία που περνάει από τα $(0, y_1)$ και $(1, y_2)$ είναι η $(0, y_1) + t(1, y_2 - y_1)$. Άρα το $(2, y_3)$ ανήκει σε αυτή την ευθεία αν και μόνο αν $(2, y_3) = (0, y_1) + t(1, y_2 - y_1)$ για κάποιο t. Επομένως $t = 2$ και τα y_1, y_2, y_3 ικανοποιούν την $y_3 = y_1 + 2(y_2 - y_1) = 2y_2 - y_1$.

2. Γράψτε το παρακάτω σύστημα στη μορφή $AX = B$ (όπου A είναι ο πίνακας συντελεστών του συστήματος). Στην συνέχεια εφαρμόστε απαλοιφή Gauss στον επαυξυμένο $[A|B]$ για να το λύσετε.

$$\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ 3x + 3y - z &= 6 \\ x - y + z &= -1 \end{aligned}$$

Απάντηση

Κάνουμε απαλοιφή Gauss στον πίνακα $[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ και καταλήγουμε στον $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση την $(x, y, z) = (3/2, -1/2, -3)$.

3. Προσδιορίστε τα r, s ώστε το σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + z &= r \\ x - y &= 0 \\ 3x + y + sz &= 0 \end{aligned}$$

α) να έχει μοναδική λύση

β) να έχει άπειρες λύσεις

γ) να μην έχει καμία λύση.

Στις περιπτώσεις που υπάρχουν λύσεις να περιγραφούν.

Απάντηση

Ο επαυξυμένος πίνακας του συστήματος είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & r \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & s & 0 \end{bmatrix}$ ο οποίος και καταλήγει στον $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & r/2 \\ 0 & 0 & s-2 & -2r \end{bmatrix}$.

Επομένως, έχουμε μοναδική λύση αν και μόνο αν $s \neq 2$. Μάλιστα σ' αυτή την περίπτωση η λύση είναι

$$(x, y, z) = (r/2 + r/(s-2), r/2 + r/(s-2), -2r/(s-2)).$$

Αν $s = 2$ και $r \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο (γιατί; βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε)

Αν $s = 2$ και $r = 0$ ο πίνακας του συστήματος καταλήγει στον $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Επομένως η z είναι ελεύθερη μεταβλητή και το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Η παραμετρική μορφή των λύσεων είναι η

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z/2 \\ -z/2 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

4. Βρείτε γραμμικούς συνδιασμούς των διανυσμάτων

$$(3,-1,2),(1,-1,4),(2,0,-1)$$

ώστε
1) Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2
2) Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη -2
3) Η πρώτη συνιστώσα να είναι 2 και η δεύτερη 2
4) Η τρίτη συνιστώσα να είναι 1
Είναι αυτά τα αποτελέσματα μοναδικά;

Απάντηση

1) Για παράδειγμα ένας τέτοιος γραμμικός συνδιασμός είναι ο $0\cdot(3,-1,2)+0\cdot(1,-1,4)+1\cdot(2,0,-1)$, ο οποίος δεν είναι και μοναδικός. Αν θέλω να τους βρω όλους θα πρέπει να βρω x,y,z ώστε $x\cdot(3,-1,2)+y\cdot(1,-1,4)+z\cdot(2,0,-1)=(2,..,..)$. Δηλαδή να λύσω το σύστημα

$$3x+y+2z=2.$$

Η γενική λύση του είναι $(x,y,z)=(x,2-3x-2z,z)=(0,2,0)+x(1,-3,0)+z(0,-2,1)$ όπου οι x,z είναι ελεύθερες μεταβλητές.

2) Αντίστοιχα εδώ ένας γραμμικός συνδιασμός είναι ο $0\cdot(3,-1,2)+2\cdot(1,-1,4)+0\cdot(2,0,-1)$, και για να βρούμε γενική λύση αρκεί να λύσουμε το σύστημα (γιατί;)

$$\begin{aligned} 3x+y+2z&=2\\ -x-y&=-2 \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss στον επαυξυμένο πίνακα του συστήματος και καταλήγουμε στον $\begin{bmatrix}1&1&0&2\\0&1&-1&2\end{bmatrix}$
Άρα η γενική λύση του συστήματος είναι η

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-z\\2+z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+z\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},$$

όπου z είναι ελεύθερη μεταβλητή.

Τα υπόλοιπα ερωτήματα γίνονται ανάλογα.

5. Έστω A,B,C,D τυχαίοι πραγματικοί. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $f(x)$ βαθμού το πολύ 3 τέτοιο ώστε $f(0)=A, f'(0)=B, f(1)=C, f'(1)=D$.

Απάντηση

Έστω $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$. Οι εξισώσεις $f(0)=A, f'(0)=B, f(1)=C, f'(1)=D$, δίνουν το εξής 4×4 σύστημα:

$$\begin{aligned} a_0&=A\\ a_1&=B\\ a_0+a_1+a_2+a_3&=C\\ a_1+2a_2+3a_3&=D \end{aligned}$$

του οποίου η λύση είναι η

$$\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A\\B\\3C-3A-2B-D\\D+B+2A-2C\end{pmatrix}$$