# Γραμμική Άλγεβρα 1

Ολοήμερο Εργαστήριο 10

Λ. Νικολιδάκης– Μ. Λουκάκη

**1.** Βρείτε ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο χώρο γραμμών του πίνακα $A$, ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο χώρο στηλών, και ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο μηδενόχωρο του $A$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}.$$

Βρείτε τα ορθογώνια συμπληρώματα των παραπάνω υποχώρων του $A$.

**Απάντηση**

Το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου γραμμών είναι ο μηδενόχωρος του $A$ και το ορθογώνιο συμπλήρωμα του χώρου στηλών είναι ο αριστερός μηδενόχωρος του. Κάνουμε απαλοιφή Gauss και έχουμε

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Συνεπώς $R(A^t) =< (1,2,0),(0,0,1) >$ , $N(A) =< (-2,1,0) >$, και $R(A) =< (1,2,3),(1,3,4) >$. Εύκολα υπολογίζουμε και $N(A^t) =< (-1,-1,1) >$. (Επαληθεύστε!!)
Άρα $R(A^t)^\perp =< (-2,1,0) >$, $R(A)^\perp =< (-1,-1,1) >$ και $N(A)^\perp =< (1,2,0),(0,0,1) >$.

**2.** Για τον $V$ όπως παρακάτω βρείτε μία βάση του ορθογώνιου συμπληρώματός του.
1) $V = 0 \in R^4$.
2) $V =< (0,-1,0,1) >$.
3) $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 \mid x_1+x_2+x_3+x_4 = 0\}$.

**Απάντηση**

1) $V^\perp = R^4$.
2) Εδώ ο $V^\perp$ αποτελείται από όλα τα διανύσματα $(x,y,z,w) \in R^4$ που το εσωτερικό τους γινόμενο με το διάνυσμα βάσης του $V$, το $(0,-1,0,1)$, δίνει 0. Επομένως $V^\perp = \{(x,y,z,w) \in R^4 \mid -y+w = 0\} = \{x(1,0,0,0)+y(0,1,0,1)+z(0,0,1,0)\}$. Άρα μία βάση του $V^\perp$ είναι η $\{(1,0,0,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\}$.
3) Ο $V$ είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα $A = [1111]$. Ξέρουμε ότι για κάθε πίνακα $A$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $N(A)$ είναι ο χώρος γραμμών του $A$. Επομένως $V^\perp =< (1,1,1,1) >$ και μία βάση του είναι το $(1,1,1,1)$.

**3.** Εξετάστε εάν τα ακόλουθα είναι αληθή ή ψευδή:
1) Εάν οι $V$ και $W$ είναι μεταξύ τους κάθετοι υπόχωροι του $R^n$ τότε και τα ορθογώνια συμπληρώματα των $V$ και $W$ είναι μεταξύ τους κάθετοι.
2) Εάν ο $V$ είναι κάθετος στον $W$ και ο $W$ κάθετος στον $U$, τότε ο $V$ είναι κάθετος στον $U$.
3) Αν $V \subseteq W$ τότε $W^\perp \subseteq V^\perp$.

**Απάντηση**

1) Λάθος. Για παράδειγμα δείτε τους $V =< (1,0,0) >$ και $W =< (0,1,0) >$. Φανερά ο $V$ είναι κάθετος στον $W$ αλλά $V^\perp =< (0,1,0),(0,0,1) >$ και $W^\perp =< (1,0,0),(0,0,1) >$ που δεν είναι κάθετοι μεταξύ τους (έχουν μη μηδενική τομή).
2) Λάθος. Πάρτε για παράδειγμα $V$ και $W$ όπως στο 1) και $U =< (1,0,1) >$.
3) Σωστό. Αν $x \in W^\perp$ τότε το εσωτερικό γινόμενο $< x,w >= 0$ για κάθε $w \in W$. Αλλά $V \leq W$ άρα $< x,v >= 0$ για κάθε $v \in V$. Επομένως $x \in V^\perp$.

**4.** Εάν $V$ το ορθογώνιο συμπλήρωμα του $W$ στον $R^n$, τότε υπάρχει πίνακας $A$ με χώρο γραμμών $V$ και μηδενόχωρο $W$. Ξεκινώντας με μία βάση του $V$ δείξτε πώς κατασκευάζεται ένας τέτοιος πίνακας.

**Απάντηση**
Έχει γίνει στην τάξη. Πάρτε απλά μία βάση $\{v_1, \ldots, v_r\}$ του $V$ και τοποθετήστε τα $v_i$ γραμμές του πίνακα $A$, συμπληρώστε τον $A$ (αν χρειάζεται, για να γίνει τετραγωνικός ) με μηδενικές γραμμές.