# Γραμμική Άλγεβρα 1

Ολοήμερο Εργαστήριο 11

Λ. Νικολιδάκης– Μ. Λουκάκη

**1.** Ποιο πολλαπλάσιο του διανύσματος $v_1 = (1,1)$ πρέπει να αφαιρεθεί από το $v_2 = (4,0)$ ώστε το αποτέλεσμα να είναι κάθετο προς το $v_1$.

**Απάντηση**

Το $< v_1, v_2 > /||v_1||^2 \cdot v_1 = 4/2(1,1) = (2,2)$. Το κάθετο διάνυσμα είναι το $v_2 - (2,2) = (2,-2)$.

**2.** Βρείτε τρία ορθοκανονικά διανύσματα $v_1, v_2, v_3 \in R^3$, τέτοια ώστε τα $v_1, v_2$ να παράγουν τον χώρο στηλών του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ποιός θεμελιώδης υπόχωρος του $A$ περιέχει το διάνυσμα $v_3$;

**Απάντηση**

Οι στήλες του $A$ είναι γρ. ανεξ. (γιατί;) και άρα παράγουν τον χώρο στηλών του $A$. Άρα $R(A) =< w_1 = (1,2,-2), w_2 = (1,-1,4) >$. Ορθοκανονικοποιούμε την βάση $\{w_1, w_2\}$ του $R(A)$ και έχουμε $v_1 = (1,2,-2)/3$ και $v_2 = u_2/|u_2|$ όπου $u_2 = w_2 - \frac{<w_1,w_2>}{|w_1|^2} w_1 = (2,1,2)$. Άρα τα $v_1 = 1/3(1,2,-2)$ και $v_2 = 1/3(2,1,2)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $R(A)$.

Συμπληρώνουμε σε βάση του $R^3$ διαλέγοντας το διάνυσμα $v_3$ από τον $N(A^t)$ (με αυτό τον τρόπο έχουμε την ζητούμενη ορθογωνιότητα χωρίς κόπο). Υπολογίζουμε τον $N(A^t)$ (με απαλοιφή στον $A^t$) και έχουμε $N(A^t) =< (-2,2,1) >$. Άρα τα διανύσματα

$$v_1 = 1/3(1,2,-2), v_2 = 1/3(2,1,2), v_3 = 1/3(-2,2,1)$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του $R^3$ ενώ τα $v_1, v_2$ είναι βάση του χώρου στηλών του $A$.

**3.** Εάν $A$ είναι ένας $m$ επί $n$ πίνακας και $b \in R^m$, τότε ένα και μόνο ένα από τα επόμενα ισχύει

1)Το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση

2)Υπάρχει $y \in R^m$ μη κάθετο στο $b$ ώστε $A^t y = 0$.

**Απάντηση**

Το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση αν και μόνο αν το διάνυσμα $b$ ανήκει στο χώρο στηλών του $A$, δηλ. $b \in R(A)$. Όπως ξέρουμε $R(A)^\perp = N(A^t)$ και $N(A^t)^\perp = R(A)$. Άρα $b \in R(A)$ αν και μόνο αν το $b$ είναι κάθετο στον $N(A^t)$ δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $y \in N(A^t)$ το $b$ είναι κάθετο στο $y$. Επομένως είτε υπάρχει $y \in N(A^t)$ (και άρα $A^t y = 0$) που δεν είναι κάθετο στο $b$ είτε κάθε $y \in N(A^t)$ είναι κάθετο στο $b$ (και άρα $b \in R(A)$).

**4.** Εφαρμόστε την διαδικασία Gram-Schmidt στα διανύσματα $(1,-1,0), (0,1,-1)$ και $(1,0,-1)$ για να βρείτε ορθοκανονική βάση του επιπέδου $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Πόσα μη μηδενικά διανύσματα προκύπτουν από αυτή την διαδικασία;

**Απάντηση**

Αν $v_1 = (1,-1,0), v_2 = (0,1,-1)$ και $v_3 = (1,0,-1)$ τότε είναι φανερα διανύσματα του δοσμένου επιπέδου $E$ αφού ικανοποιούν την εξίσωσή του. Το επίπεδο είναι διδιάστατο επομένως δεν ειναι και τα τρία ανεξάρτητα (παραγματικά $v_3 = v_1 + v_2$). Εφαρμόσουμε Gram-Schmidt και έχουμε $u_1 = v_1$ και

$$u_2 = v_2 - \frac{< v_2, u_1 >}{|u_1|^2} u_1 = 1/2(1,1,-1)$$

ενώ

$$u_3 = v_3 - \frac{< v_3, v_1 >}{|v_1|^2} v_1 - \frac{< v_3, u_2 >}{|u_2|^2} u_2 = (1,0,-1) - 1/2(1,-1,0) - 1/2(1,1,-2) = (0,0,0).$$

Επομένως η ζητούμενη ορθοκανονική βάση του επιπέδου είναι η

$$w_1 = 1/\sqrt{2}(1,-1,0),\ w_2 = 1/\sqrt{3}(1,1,-1).$$

**5.** Έστω $V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in R^4 \mid x_1 = 2x_2, x_3 = x_4\}$. Βρείτε ορθοκανονική βάση για τον $V$ και τον $V^\perp$.
**Απάντηση**
Τα διανύσματα του $V$ ικανοποιούν $(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2(2,1,0,0) + x_3(0,0,1,1)$. Επομένως τα διανύσματα $v_1 = (2,1,0,0)$ και $v_2 = (0,0,1,1)$ αποτελούν βάση του $V$. Είναι φανερό ότι τα $v_1, v_2$ είναι ορθογώνια και επομένως μία ορθοκανονική βάση του $V$ είναι η $\{w_1 = 1/\sqrt{3}(2,1,0,0), w_2 = 1/\sqrt{2}(0,0,1,1)\}$.
Δείτε επίσης ότι ο $V$ είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Άρα ο $V^\perp$ είναι ο χώρος γραμμών του πίνακα. Επομένως μία βάση του $V^\perp$ είναι η $\{(1,-2,0,0),(0,0,1,-1)\}$. Παρατηρούμε ότι τα δύο διανύσματα είναι ορθογώνια μεταξύ τους και άρα μία ορθοκανονική βάση του $V^\perp$ είναι η $\{1/sqrt3(1,-2,0,0), 1/\sqrt{2}(0,0,1,-1)\}$.