Γραμμική Άλγεβρα 1

Ολοήμερο Εργαστήριο 2

Λ. Νικολιδάκης– Μ. Λουκάκη

1. Να βρείτε παραμετρική διανυσματική λύση για το ομογενές:

$$\begin{array}{rrrrl} x & -2y & -1z & -4w & =0 \\ 2x & -4y & +3z & +7w & =0 \\ -2x & +4y & +1z & +5w & =0 \end{array}$$

Απάντηση. Κάνουμε απαλοιφή Gauss στον πίνακα $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & -4 \\ 2 & -4 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Έτσι φτάνουμε στον $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Επομένως έχουμε δύο οδηγούς άρα και δύο βασικές μεταβλητές (τις x, z) και δύο ελεύθερες (τις y, w). Άρα το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{array}{rrrrl} x & -2y & -1z & -4w & =0 \\ & & z+ & 3w & =0. \end{array}$$

Συνεπώς η γενική του λύση είναι $z = -3w$ και $x = 4w + z + 2y = w + 2y$, η οποία σε διανυσματική μορφή είναι

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w+2y \\ y \\ -3w \\ w \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Σωστό ή Λάθος (δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας)

α) Αν η 1η και η 3η στήλη του B είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την 1η και 3η στήλη του AB.

β)Αν η 1η και η 3η γραμμή του B είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την 1η και 3η γραμμή του AB.

γ)Αν η 1η και η 3η γραμμή του A είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την 1η και 3η γραμμή του AB.

δ)Αν η 1η και η 3η στήλη του A είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την 1η και 3η στήλη του AB.

ε)$(AB)^2 = A^2B^2$.

ζ)$(A+B)^2 = (A+B)(B+A) = A^2 + 2AB + B^2$.

Απάντηση. α) Σωστό. Παρατηρήστε ότι η i στήλη του γινομένου AB είναι το γινόμενο του A με την i-στήλη του B (γιατί; βεβαιωθείτε ότι καταλαβαινετε το πολλαπλασιασμό πινάκων και με τους τρεις τροπους του: ανα στοιχείο, ανα γραμμή, ανά στήλη.)

β) Λάθος. (μπορεί να μην έχει καν 1η και 3η γραμμή το γινόμενο αλλα ακόμα και να έχει δεν είναι ίδιες κατάνάγκη π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}), B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

γ)Σωστό. Η i γραμμή του γινομένου AB είναι το γινόμενο της i-γραμμής του A με τον B (γιατί;)

δ) Λάθος π.χ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}), B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ε)Λάθος. $(AB)^2 = ABAB$ αλλά δεν αντιμετατίθενται, π.χ.$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}), B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ζ) Λάθος. Η πρώτη ισότητα ισχύει αλλά όχι και η δεύτερη. (το προηγούμενο παράδειγμα δουλεύει και εδώ).

3. Βρείτε παραδείγματα πραγματικών 2×2 πινάκων που να ικανοποιούν

1) $A^2 = -I_2$,

2) $B^2 = 0$ με $B \neq 0$,

3) $CD = -DC$ με $CD \neq 0$,

4) $EF = 0$ χωρίς κανένα στοιχείο των E, F να είναι 0.

Απάντηση. Αυτή η άσκηση είναι σημαντική για αυτό που περιγράφει και όχι τόσο για να βρείτε τα παραδείγματα των πινάκων. Προσέξτε λοιπόν ότι τα γινόμενα πινάκων δεν συμπεριφέρονται σαν γινόμενα αριθμών, έτσι για παράδειγμα μπορείτε να έχετεν $A^n = 0$ ενώ ο πίνακας A δεν είναι 0. Παραδείγματα υπάρχουν πολλά, ενδεικτικά γράφω εδώ κάποια. Για το 1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ για το 2) πάρτε $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, για το 3) πάρτε $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, τέλος για το 4) ενα παράδειγμα δίνουν οι $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ και $F = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Βρείτε τις δυνάμεις $A, A^2, A^3, \ldots, A^n$ του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Απάντηση. Παρατηρούμε ότι $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Αποδεικνύουμε επαγωγικά ότι $A^n = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για το n και το δείχνουμε για $n+1$ υπολογίζουμε δηλαδή το γινόμενο $A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1)b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Παραγοντοποιήστε τον πίνακα του παρακάτω συστήματος A ως γινόμενο LU,όπου L είναι κάτω τριγωνικός με 1 στην διαγώνιο,ενώ U είναι άνω τριγωνικός.

$$\begin{aligned} 5x + y + 2z &= 2 \\ 2x + y + z &= 4 \\ 9x + 2y + 5z &= 3. \end{aligned}$$

Να λυθεί το σύστημα αφού λυθούν τα 2 επιμέρους συστήματα που προκύπτουν.

Απάντηση. Κάνουμε απαλοιφή Gauss και παρατηρούμε (γιατί;) ότι φτάνουμε στον άνω τριγωνικό πίνακα $U = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 20/15 \end{bmatrix}$ μέσω πολ/μού με τους εξής στοιχ. πίνακες (με την σειρά που αναγράφονται)

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -9/5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Επομένως $E_3E_2E_1A = U$ και άρα $A = (E_3E_2E_1)^{-1}U = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}U$. Αρα

$$L = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9/5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/5 & 1 & 0 \\ 9/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Ένας άλλος τρόπος να βρούμε τον L^{-1} και απο εκεί τον L είναι μέσω της απαλοιφής Gauss του πίνακα $[A|I_3]$. Οταν φτάσουμε στον U αυτός που έχουμε δίπλα είναι ο L^1.)

Για την λύση του συστήματος $AX = B$ όπου $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ λύνουμε τα εξής δύο τριγωνικά συστήματα: πρώτα λύνουμε το $LY = B$ ως προς Y και μετά το $UX = Y$.

6. Δίνεται ο εξής πίνακας A

$$\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1)Δείξτε ότι $A^3 = 3A^2 - 3A + I_3$
2)Δείξτε ότι ο A αντιστρέφεται και υπολογίστε τον αντίστροφό του.

Απάντηση. Για το 1) κάντε απλά τις πράξεις.
Για το 2) μπορείτε να βρείτε τον αντίστροφο μέσω απαλοιφής Gauss-Jordan είτε να παρατηρήσετε ότι η εξισωση $A^3 = 3A^2 - 3A + I_3$ δίνει $A(A^2 - 3A + 3I_3) = A^3 - 3A^2 + 3A = I_3$ και επομένως ο αντίστροφος του A είναι ο
$A^2 - 3A + 3I_3 = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$