Γραμμική Άλγεβρα 1

Ολοήμερο Εργαστήριο 3

Λ. Νικολιδάκης– Μ. Λουκάκη

1. Βρείτε τους αντίστροφους των παρακάτω πινάκων

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Μπορείτε να υπολογίσετε τον αντίστροφο και χωρίς την διαδικασία απαλοιφής Gauss-Jordan.

Απάντηση Οι πρώτοι δύο λύνονται και χωρίς απαλοιφή Gauss-Jordan αφού ο πρώτος είναι στοιχειώδης (εναλλαγή 1ης με 3η γραμμή, άρα ο αντίστροφός του είναι ο εαυτός του) και ο δεύτερος είναι γινόμενο δύο στοιχειωδών : εναλλαγή 1ης με 2η γραμμή και 2η με 3η άρα ο αντίστροφός του είναι αυτός που εναλλάσσει 2η με 3η και 1η με 2η δηλαδη ο $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Για τον τρίτο κάντε απαλοιφή Gauss-Jordan.....

2. Δίνεται ο πίνακας

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}.$$

Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τις σταθερές a, b, ώστε
1) να είναι αντιστρέψιμος
2) να είναι συμμετρικός.

Απάντηση Κάνουμε απαλοιφή Gauss-Jordan

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & b & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{a\neq 0} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & b & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-ab & -a & 1 & -a \end{array}\right].$$

Καταρχήν παρατηρούμε ότι αν $a = 0$ τότε ο πίνακας έρχεται στην μορφή $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & b & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & b & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ από το 3ο βήμα και αυτός είναι αντιστρέψιμος για κάθε b. Επομένως η συνθήκη $a \neq 0$ δεν χρειάζεται. Η τελευταία μορφή του πίνακα στην απαλοιφή δίνει ικανή και αναγκαία συνθηκη για να είναι ο πίνακας αντιστρέψιμος την : $1 - ab \neq 0$. (Αφού δεν πρέπει να έχουμε μηδενικο οδηγό).

Ένας πίνακας A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $A^t = A$ ισοδύναμα $A_{ij} = A_{ji}$ για κάθε i, j. Επομένως πρέπει και αρκεί $a = -1$ και $b \in R$.

3.Σωστό ή Λάθος (δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας)
1) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο A^T είναι αντιστρέψιμος.
2) Αν ο τετραγωνικός πίνακας A έχει μία μηδενική γραμμή τότε δεν είναι αντιστρέψιμος.
3) Αν ο τετραγωνικός πίνακας A έχει μία μηδενική στήλη τότε δεν είναι αντιστρέψιμος.
4) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος και $AB = 0$ τότε $B = 0$. (συγκρίνετε αυτή την άσκηση με την άσκηση 3.4 του δεύτερου φυλλαδίου).
5) Αν A, B αντιστρέψιμοι τότε $(AB^{-1})^{-1} = BA^{-1}$.
6*) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Απάντηση Όλα είναι σωστά. Για τα περισσότερα έχω μιλήσει ήδη στην τάξη. Θυμηθείτε ότι ένας $m \times m$ πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν στην απαλοιφή Gauss φτάσουμε σε πίνακα που έχει οδηγό σε κάθε γραμμή και στήλη. Αυτό δείχνει άμεσα τα 1, 2, 3 και 6 (γιατί;) Για το 1) επίσης έχουμε $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$. Για το 4 αν έχουμε $AB = 0$ τότε $A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0$ και αρα $B = A$. Το 5 είναι ιδιότητες του αντιστρόφου. (Μάλιστα τις ίδιες έχει και ο ανάστροφος.)

4. α)Αν A τετραγωνικός πίνακας δείξτε ότι οι πίνακες AA^t, A^tA είναι συμμετρικοί.
β)Τα στοιχεία της διαγωνίου των AA^t, A^tA είναι μη αρνητικοί.
γ)Αν A, B τετραγωνικοί συμμετρικοί πίνακες δείξτε ότι ο AB είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $AB = BA$.
δ)Πόσα στοιχεία είναι δυνατόν να ορισθούν ανεξάρτητα σε ένα συμμετρικό (αντισυμμετρικό) πίνακα·

Απάντηση α) $(AA^t)^t = (A^t)^tA^t = AA^t$, επομένως ο AA^t είναι συμμετρικός. Ανάλογα για τον A^tA.
β) Το έχω κάνει στην τάξη.
γ) AB είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $(AB)^t = AB$ αλλά $(AB)^t = B^tA^t = BA$ (η τελευταία ισότητα προκύπτει από το ότι A και B είναι συμμετρικοί). Επομένως AB είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $BA = (AB)^t = AB$.
δ) Αρκεί να ορισθούν τα στοιχεία από την διαγώνιο και πάνω (ή από την διαγώνιο και κάτω αντίστοιχα). Αυτά σε ένα $n \times n$ πίνακα είναι

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Απάντηση για 5, 6 Για τα επόμενα δύο προβλήματα θυμηθείτε ότι για τους δύο επί δύο πίνακες (ΜΟΝΟ) υπάρχει τύπος για την εύρεση του αντιστρόφου όπου υπάρχει. Έτσι αν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ αυτός έχει αντίστροφο αν και μόνο αν $D = ad - bc \neq 0$ και τότε ο αντίστροφος δίνεται από τον τύπο $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. Αυτό θα σας λύσει ¨μπακάλικα' την 5η άσκηση (έχει και πιο ωραίο τρόπο τον βλέπετε;)

Όσο για την 6η άσκηση δείτε ότι $A^2 = I$ αν και μόνο αν $A^{-1} = A$. Άρα αν $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ θα έχουμε $ad - bc \neq 0$ και επιπλέον θα πρέπει

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Εξισώστε ανά στοιχείο και λύστε....

5. Έστω A ένας 2×1 πίνακας και B ένας 1×2. Δείξτε ότι ο $C = AB$ δεν είναι αντιστρέψιμος. (Αυτή η άσκηση έχει και την εξής γενίκευση για όποιον ενδιαφέρεται: αν A είναι $m \times n$ πίνακας με $n < m$ και B ένας $n \times m$ τότε ο $C = AB$ δεν είναι αντιστρέψιμος.)

6. Βρείτε όλους τους 2×2 πίνακες A ώστε $A^2 = I$.