Γραμμική Άλγεβρα 1

Ολοήμερο Εργαστήριο 4

Λ. Νικολιδάκης– Μ. Λουκάκη

1.Ποια από τα επόμενα υποσύνολα $\{b = (b_1, b_2, b_3), b_i \in \mathbf{R}\}$ του $\mathbf{R}^3$ είναι πράγματι υπόχωροι;
1)Τα διανύσματα b που ικανοποιούν $b_1 = 0$.
2)Τα διανύσματα b που ικανοποιούν $b_1 \geq 0$.
3)Τα διανύσματα b που ικανοποιούν $b_1 = 1$.
4)Τα διανύσματα b με $b_1 b_2 = 0$.
5)Το μεμονωμένο διάνυσμα $b = (0, 0, 0)$.
6)Όλοι οι γραμμικοί συνδιασμοί των δύο διανυσμάτων $x = (1, 1, 0), y = (2, 0, 1)$.
7)Τα διανύσματα b που ικανοποιούν $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$.
8)Τα διανύσματα b που ικανοποιούν $b_2 = b_1^2$.
9)Τα διανύσματα b με b_2 ρητό.

Απάντηση 1) Ναι (μάλιστα παράγεται από τα $(0, 1, 0)$ και $(0, 0, 1)$)μπορείτε να το δείτε με τον κλασικό τρόπο (αθροίσματα και πολ/σια με αριθμό μένουν μέσα στο σύνολο) ή πιο εύκολα είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα $[1\,0\,0]$.
2) Όχι π.χ. το $(1, 0, 0)$ ανήκει σάυτό το σύνολο ενώ το $-1 \cdot (1, 0, 0)$ δεν ανήκει.
3)Όχι, το $(0, 0, 0)$ δεν ανήκει στο σύνολο.
4)Όχι, π.χ. τα $(1, 0, 0)$ και $(0, 1, 0)$ ανήκουν στο σύνολο ενώ το άθροισμά τους δεν ανήκει.
5)Ναι
6)Ναι πάντα οι γραμμικοί συνδιασμοί αποτελούν υπόχωρο (το έχω κάνει στην τάξη).
7)Ναι, μπορείτε να το δείτε με τον κλασικό τρόπο (αθροίσματα και πολ/σια με αριθμό μένουν μέσα στο σύνολο) ή πιο εύκολα είναι ο μηδενόχωρος του πίνακα $[1\ -1\,3]$.
8)Όχι, π.χ. το $(1, 1, 0)$ ανήκει στο σύνολο ενώ το πολ/σιό του $2 \cdot (1, 1, 0)$ δεν ανήκει.
9)Όχι, π.χ. το $(1, 1, 0)$ ανήκει στο σύνολο ενώ το πολ/σιό του $\sqrt{2} \cdot (1, 1, 0)$ δεν ανήκει.

2. 1)Ανήκει το διάνυσμα $(1, -1, 0)$ στον υπόχωρο που παράγεται από το διάνυσμα $(1, 0, 1)$;
2)Ανήκει το διάνυσμα $(1, -1, 0, 3)$ στον υπόχωρο που παράγουν τα διανύσματα $(1, 0, 1, 7)$ και $(-1, 1, 0, -3)$;

Απάντηση 1) Όχι γιατί δεν είναι πολ/σιό του.
2) Το $(1, -1, 0, 3)$ είναι φανερά $-1 \cdot (-1, 1, 0, -3)$ και επομένως ανήκει στον υπόχωρο που παράγουν τα $(1, 0, 1, 7)$ και $(-1, 1, 0, -3)$.

3.Ποιές από τις επόμενες περιγραφές είναι σωστές ; Οι λύσεις x του

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

σχηματίζουν επίπεδο, ευθεία, σημείο, υπόχωρο, μηδενόχωρο του A, χώρο στηλών του A.

Απάντηση Οι λύσεις αποτελούν υπόχωρο, τον μηδενόχωρο του A και σχηματίζουν ευθεία (γιατί; δείτε ότι στην λύση θα έχω μία ελεύθερη μεταβλητή την z και οι λύσεις σας είναι της μορφής $z(-2, 1, 1)$).

4. Εξετάστε εαν τα ακόλουθα είναι σωστά η λάθος, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας Δίνεται το m επί n σύστημα $Ax = b$.
1)Τα διανύσματα b που δεν περιέχονται στον χώρο $R(A)$ αποτελούν γραμμικό υπόχωρο του R^m.
2)Εάν $R(A)$ περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, τότε ο A είναι ο μηδενικός πίνακας.
3)Ο χώρος στηλών του πίνακα $2A$ είναι ίσος με τον χώρο στηλών του A.

4)Ο χώρος στηλών του πίνακα $A-I$ είναι ίσος με τον χώρο στηλών του A.

Απάντηση 1) Λάθος (δείτε ότι το μηδενικό διάνυσμα δεν ανήκει σάυτό το σύνολο αφού ανήκει στο $R(A)$.)
2)Σωστό (όλες οι στήλες του A πρέπει να είναι το μηδενικό διάνυσμα).
3)Σωστό (πολ/σια διανυσμάτων παράγουν τον ίδιο υπόχωρο με τα ίδια τα διανύσματα.)
4)Λάθος (δείτε π.χ. τί γίνεται αν $A=I$ τότε ο χώρος στηλών του A είναι όλο το R^n ενώ ο χώρος στηλών του $A-I=0$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.)

5. 1)Κατασκευάστε έναν 3 επί 3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών περιέχει τα διανύσματα $(1,1,0)$ και $(1,0,1)$ αλλά δεν περιέχει το $(1,1,1)$.
2)Κατασκευάστε έναν 3 επί 3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών είναι μια ευθεία.

Απάντηση 1)Για παράδειγμα $\begin{bmatrix}1&1&2\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$.
2) Π.χ. $\begin{bmatrix}1&1&2\\1&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}$.

6. Ποια συνθήκη πρέπει να πληρούν τα b_1,b_2,b_3, ώστε το διάνυσμα (b_1,b_2,b_3) να ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&5&-4\\4&9&-8\end{bmatrix}.$$

Απάντηση Λύνουμε το σύστημα $Ax=b$ όπου $b=(b_1,b_2,b_3)$. Ο επαυξημένος του είναι

$$\begin{bmatrix}1&2&-2&|&b_1\\2&5&-4&|&b_2\\4&9&-8&|&b_3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&-2&|&b_1\\0&1&0&|&b_2-2b_1\\0&1&0&|&b_3-4b_1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&2&-2&|&b_1\\0&1&0&|&b_2-2b_1\\0&0&0&|&b_3-2b_1-b_2\end{bmatrix}.$$

Άρα το σύστημα έχει λυση (και συνεπώς το b ανήκει στο χώρο στηλών του A) αν και μόνο αν $b_3-3b_1-b_2=0$.