Γραμμική Άλγεβρα 1

Λύσεις για Ολοήμερο Εργαστήριο 5

Λ. Νικολιδάκης– Μ. Λουκάκη

1.1) Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να πληρούν τα b_1, b_2, b_3 ώστε το διάνυσμα $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ να ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

2) Βρείτε την τάξη του A.

3) Βρείτε τις λύσεις του ομογενούς συστήματος $Ax = 0$ σε διανυσματική μορφή για τον παραπάνω πίνακα A.

4) Βρείτε την γενική λύση του $Ax = b$ όταν $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$.

Απάντηση 1)Ο επαυξημένος του είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & b_1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & | & b_2 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & | & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & b_2 - b_1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & b_3 - 2b_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & b_3 - b_1 - b_2 \end{bmatrix}.$$

Άρα το σύστημα έχει λυση (και συνεπώς το b ανήκει στο χώρο στηλών του A) αν και μόνο αν $b_3 - b_1 - b_2 = 0$.

2)Η τάξη του A είναι 2 (γιατί;).

3)Για την λύση του ομογενούς $Ax = 0$ φτάνουμε στον

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως η λύση σε διανυσματική μορφή είναι η $(x, y, z, w) = z(-2, 1, 1, 0) + w(1, -1, 0, 1)$.

4) Απο το 1) για το συκεκριμένο διάνυσμα φτάνουμε στο επαυξημένο

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Επομένως η λύση σε διανυσματική μορφή είναι η $(x, y, z, w) = (3, 1, 0, 0) + z(-2, 1, 1, 0) + w(1, -1, 0, 1)$.

2. 1) Βρείτε εναν πίνακα A του οποίου ο χώρος στηλών να περιέχει τα $(1, 1, 0)$ και $(0, 1, 1)$, ενώ ο μηδενόχωρος το $(1, 1, 1, 1)$.

2) Βρείτε έναν 2 επί 2 πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος είναι ίσος με τον χώρο στηλών του.

3) Βρείτε εναν πίνακα A του οποίου ο μηδενόχωρος αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδιασμούς των διανυσμάτων $(1, 1, 2), (0, 1, 1)$.

Απάντηση Εδώ θα δώσω μόνο τα παραδείγματα (που δεν είναι μοναδικά), αν θέλετε τον τρόπο σκέψης επικοινωνήστε μαζί μου.

1) Ένα τέτοια παράδειγμα είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2)Για παράδειγμα ο μηδενόχωρος όπως και ο χώρος στηλών του πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ παράγονται από το διάνυσμα $(1, 1)$ (Επιβεβαιώστε!!!).

3)Ένα εύκολο παράδειγμα είναι ο $[11-1]$. Μπορείτε να δώσετε ένα 2 επί 3 παράδειγμα; ένα 3 επί 3; Παραπάνω διαστάσεων ;(προσέξτε ότι το πλήθος των στηλών θα είναι πάντα 3)

3. Είναι τα ακόλουθα σωστά ή λάθος· Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.
1)Ένας τετραγωνικός πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.
2)Ένας αντιστρέψιμος πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.
3)Ένας m επί n πίνακας δεν έχει περισσότερες από n βασικές μεταβλητές.
4)Ένας m επί n πίνακας δεν έχει περισσότερες από m βασικές μεταβλητές.

Απάντηση 1)Προφανώς λάθος. Για παράδειγμα δείτε τον $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.
2)Σωστό, ένας αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας καταλήγει στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του στον I_n (βεβαιωθείτε ότι βλέπετε το γιατί). Επομένως δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές (ισοδύναμα η τάξη του είναι n).
3) και 4) Σωστά και τα δύο. Το πλήθος των βασικών μεταβλητών είναι το πλήθος των οδηγών στην κλιμακωτή μορφή του πίνακα (και αυτό με την σειρά του είναι ίσο με την τάξη του πίνακα). Αλλά σε κάθε στήλη και γραμμή του πίνακα μπορούμε να έχουμε το πολύ ένα οδηγό. Επομένως το πλήθος των βασικών μεταβλητών δεν ξεπερνάει ούτε το πλήθος των γραμμών ούτε αυτό των στηλών.

4. Βρείτε τον πίνακα A εάν γνωρίζετε οτι η γενική λυση του συστήματος $Ax = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ είναι η $x = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + l \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

Απάντηση Είναι φανερό ότι ο πίνακας είναι 2 επί 2. Από την μορφή της γενικής λύσης του $Ax = (1, 0)$ συμπεραίνουμε ότι το $(1, 0)$ είναι ειδική λύση ενώ το $(0, 1)$ είναι λύση του ομογενούς $Ax = 0$, δηλαδή ισχύει $A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ και $A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$. Επομένως αν ο πίνακας είναι $A = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ έχουμε από την πρώτη σχέση ότι $a = 1$ και $c = 0$ ενώ από την δεύτερη $b = d = 0$. Επομένως $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$.

5. Ο μηδενόχωρος ενός 3 επί 4 πίνακα A παράγεται από το διάνυσμα $(2, 3, 1, 0)$.
1) Ποιά είναι η τάξη του A ;
2) Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A.

Απάντηση 1) Το γεγονός ότι ο μηδενόχωρος του πίνακα παράγεται από ένα μόνο διάνυσμα σημαίνει ότι έχουμε μόνο μία ελεύθερη μεταβλητή και αφού ο πίνακας έχει 4 στήλες θα έχουμε 3 βασικές μεταβλητές και άρα 3 οδηγούς. Επομένως η τάξη του πίνακα είναι 3.
2) Ξέρουμε ήδη ότι στην ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του πίνακα θα έχουμε 3 οδηγούς (άσσους αφού είναι αν.κλ.) και μία στήλη χωρίς οδηγό που αντιστοιχεί στην μοναδική ελεύθερη μεταβλητή. Από το διάνυσμα $(2, 3, 1, 0)$ καταλαβαίνουμε ότι η τελευταία στήλη θα είναι η $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (γιατί; σκεφτήτε πώς γράφουμε την γενική λύση του ομογενούς). Αυτό όμως δίνει και την τελευταία γραμμή του πίνακα που πρέπει να είναι η $(0, 0, 0, 1)$ (αφού το 1 της τελευταίας στήλης είναι οδηγός). Δηλαδή τώρα ο πίνακας έχει έρθει στην μορφή $A = \begin{bmatrix} & & & 0\\ & & & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. Τώρα για να βρώ ποια στήλη αντιστοιχεί στην ελεύθερη μεταβλητή παρατηρώ ότι για να παράγει το διάνυσμα $(2, 3, 1, 0)$ τον μηδενόχωρο του A πρέπει οι δύο βασικές μεταβλητές (εκτός της τελευταίας) να εξαρτώνται από την ελεύθερη. Επομένως η ελεύθερη είναι σε στήλη που έπεται αυτές των βασικών. Άρα αναγκαστικά αυτή θα βρίσκεται στην 3η στήλη. Αν $X = (x, y, z, w)$ τότε οι λύσεις του ομογενούς $AX = 0$ (δηλαδή ο μηδενόχωρος του A) είναι $(x, y, z, w) = z(2, 3, 1, 0)$ και άρα $x = 2z, y = 3z, w = 0$. Επομένως ο πίνακας είναι ο $A = \begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$