Γραμμική Άλγεβρα 1

Ολοήμερο Εργαστήριο 6

Λ. Νικολιδάκης– Μ. Λουκάκη

1. Είναι τα διανύσματα $(1,1,0,0),(1,0,1,0),(0,0,1,1),(0,1,0,1)$ γραμμ. ανεξάρτητα;

Απάντηση

Φτιάχνουμε τον πίνακα A του οποίου οι στήλες είναι τα παραπάνω διανύσματα. Έτσι έχουμε

$$\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Επομένως μόνο τα 3 πρώτα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (αφού μόνο οι 3 πρώτες στήλες έχουν οδηγούς). Το τέταρτο είναι γραμμικός συνδιασμός των υπολοίπων.

2. Είναι τα ακόλουθα σωστά ή λάθος; Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.
1) Εννέα διανύσματα του $\mathbf{R}^7$ μπορεί να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
2) Εννέα διανύσματα του $\mathbf{R}^7$ παράγουν τον $\mathbf{R}^7$.
3) Εννέα γραμ. ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbf{R}^9$ αποτελούν βάση του $\mathbf{R}^9$.
4) Έστω V ένας διαν. υπόχωρος του $\mathbf{R}^7$ διάστασης 4. Κάθε βάση του V μπορεί να επεκταθεί σε βάση του $\mathbf{R}^7$ επισυνάπτοντας 3 ακόμα διανύσματα.
5)* Έστω V ένας διαν. υπόχωρος του $\mathbf{R}^7$ διάστασης 4. Κάθε βάση του $\mathbf{R}^7$ περιέχει βάση του V που προκύπτει παραλείποντας 3 διανύσματα.
6)* Αν V και W είναι τριδιάστατοι υπόχωροι του $\mathbf{R}^5$ τότε υπάρχει μη μηδενικό διάνυσμα στην τομή τους $V\cap W$.

Απάντηση

1) Λάθος. Η διάσταση είναι 7 άρα το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξαρτήτων διανυσμάτων είναι 7.
2) Λάθος. Μπορείτε να βρείτε 9 που να τον παράγουν (αν τα 7 είναι γραμ. ανεξάρτητα) ή 9 που να παράγουν μόνο κάποιο υπόχωρο (οποιασδήποτε διάστασης από 1 έως 7) πάρτε για παράδειγμα όλα να είναι πολ/σια ενός διανύσματος.
3) Σωστό. Ο υπόχωρος του $\mathbf{R}^9$ που παράγουν έχει διάσταση 9 και άρα ταυτίζεται με τον $\mathbf{R}^9$.
4) Σωστό. Αν $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ βάση του V, διαλέγουμε 3 διανύσματα w_1,w_2,w_3 ώστε και τα 7 μαζί να είναι γραμ. ανεξάρτητα. (Αυτό μπορεί να γίνει πάντα, βλέπετε γιατί;) Τότε και τα 7 μαζί αποτελούν βάση του $\mathbf{R}^7$.
5) Λάθος. Μπορεί κανένα από τα διανύσματα της βάσης να μην ανήκει στον υπόχωρο. Πάρτε για παράδειγμα V τον υπόχωρο που παράγεται από τα διανύσματα $(1,0,0,0,0,1,1),(0,1,0,0,0,1,1),(0,0,1,0,0,1,1),(0,0,0,1,0,1,1)$ (γιατί ο V είναι τετραδιάστατος; τι αρκεί να δείξετε;). Αν θεωρήσουμε την κανονική βάση του R^7 τότε κανένα διάνυσμά της δεν ανήκει στον V.
6) Σωστό. Αν $\mathcal{B}_1=v_1,v_2,v_3$ και $\mathcal{B}_2=w_1,w_2,w_3$ είναι βάσεις των δύο υποχώρων τότε η ένωσή τους v_1,v_2,v_3,w_1,w_2,w_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα γιατί δεν ¨χωράνε' 6 γραμ. ανεξάρτητα διανύσματα σε χώρο διάστασης 5. Επομένως υπάρχουν πραγματικοί r_1,r_2,r_3,s_1,s_2,s_3 όχι όλοι μηδέν ώστε $r_1v_1+r_2v_2+r_3v_3+s_1w_1+s_2w_2+s_3w_3=0$ και άρα $r_1v_1+r_2v_2+r_3v_3=-s_1w_1+-_2w_2-s_3w_3=0$. Άρα το διάνυσμα $r_1v_1+r_2v_2+r_3v_3$ δεν ειναι μηδεν (γιατί;) και ανήκει στην τομή και των δύο υποχώρων (γιατί;).

3. Βρείτε μία βάση για το επίπεδο $x-2y+3z=0$ στον R^3. Στη συνέχεια βρείτε μία βάση της τομής του παραπάνω επιπέδου με το $x+y+z=0$. Τέλος βρείτε μια βάση για τον υπόχωρο των διανυσμάτων που είναι κάθετα στο αρχικό επίπεδο.

Απάντηση

Η λύση του $x-2y+3z=0$ ή ισοδύναμα του $x=2y-3z$ είναι όλα τα διανύσματα (x,y,z) που ικανοποιούν $(x,y,z)=y(2,1,0)+z(-3,0,1)$. Άρα βάση είναι τα $\{(2,1,0),(-3,0,1)\}$.
Για να βρούμε βάση της τομής ουσιαστικά λύνουμε το ομογενές

$$\begin{aligned}x-2y+3z&=0\\x+y+z&=0\end{aligned}$$

Με την γνωστή απαλοιφή Gauss στον πίνακα συντελεστών του συστήματος φτάνουμε στη λύση $(x, y, z) = z(-5/3, 2/3, 1)$. Επομένως η τομή είναι μονοδιάστατος διαν. υπόχωρος του R^3 και μία ζητούμενη βάση είναι η $\{(-5, 2, 3)\}$ (όπως φυσικά και η $(-5/3, 2/3, 1)$).
Κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο είναι το $(1, -2, 3)$ το οποίο και αποτελεί βάση για τον κάθετο υπόχωρο (επειδή είμαστε στον R^3 και το επίπεδο είναι διδιάστατο ο κάθετος υπόχωρος θα είναι μονοδιάστατος, άρα ένα διάνυσμα αρκεί για την βάση του. Αν αντί του R^3 είχαμε R^4 πως θα δουλεύαμε;)

4. Βρείτε μία βάση για καθε ένα από τους εξής υπόχωρους του R^4:
1)Ολα τα διανύσματα των οποίων οι συνιστώσες είναι ίσες.
2)Ολα τα διανύσματα των οποίων οι συνιστώσες έχουν άθροισμα 0.
3)Ολα τα διανύσματα που είναι κάθετα στα $(1, 1, 0, 0)$ και $(1, 0, 1, 1)$.

Απάντηση

1) Εδώ τα διανύσματα είναι της μορφής (x, x, x) με $x \in R$. Επομένως μια προφανή βάση είναι η $\{(1, 1, 1)\}$.
2) Εδώ τα διανύσματα είναι τα (x, y, z) με $x+y+z = 0$. Επομένως είναι όλα της μορφής $(x, y, z) = y(-1, 1, 0)+ z(-1, 0, 1)$. Επομένως τα $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ αποτελούν βάση.
3) Τα ζητούμενα διανύσματα (x, y, z, w) είναι αυτά των οποίων το εσωτερικό γινόμενο με τα $(1, 1, 0, 0)$ και $(1, 0, 1, 1)$ είναι 0. Επομένως είναι αυτά που ικανοποιούν $x + y = 0$ και $x + z + w = 0$. Λύνουμε το ομογενές και έχουμε γενική διανυσματική λύση την $(x, y, z, w) = z(-1, 1, 1, 0) + w(-1, 1, 0, 1)$. Συνεπώς μία βάση είναι η $\{(-1, 1, 1, 0), (-1, 1, 0, 1)\}$.