Γραμμική Άλγεβρα 1

Ολοήμερο Εργαστήριο 8

Λ. Νικολιδάκης– Μ. Λουκάκη

1. Ποιος πίνακας παριστάνει την απεικόνιση που στέλνει το $(1,0)$ στο $(2,5)$ και το $(0,1)$ στο $(1,3)$; Ποιος πίνακας στέλνει το $(2,5)$ στο $(1,0)$ και το $(1,3)$ στο $(0,1)$; Υπάρχει πίνακας που απεικονίζει το $(2,6)$ στο $(1,0)$ και το $(1,3)$ στο $(0,1)$; Υπάρχει πίνακας που απεικονίζει το $(1,0,0)$ στο $(1,0)$ και το $(0,1,0)$ στο $(0,1)$;

Απάντηση

Για την πρώτη απεικόνιση ο ζητουμενος πίνακας (ως προς την κανονική βάση) είναι ο $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. (Θυμηθήτε ότι οι στήλες του είναι οι εικόνες της κανονικής βάσης $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$).
Για την δεύτερη απεικόνιση παρατηρήστε ότι ο A που βρήκατε παραπάνω είναι αντιστρέψιμος (γιατί;) και ο αντίστροφός του κάνει ακριβώς αυτό που ζητάει η άσκηση (στέλνει δηλαδή το $(2,5)$ στο $(1,0)$ και το $(1,3)$ στο $(0,1)$). Έτσι ο ζητούμενος πίνακας είναι ο $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$.
Επειδή $(2,6) = 2(1,3)$ κάθε γραμμική απεικόνιση T ικανοποιεί $T(2,6) = 2T(1,3)$. Οι πίνακες ορίζουν γραμμικές απεικονίσεις, επομένως δεν υπάρχει πίνακας που να στέλνει το $(2,6)$ στο $(1,0)$ και το $(1,3)$ στο $(0,1)$.
Ναι, υπάρχουν άπειροι. Θα είναι όλοι 2 επί 3 της μορφής $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}$ με $a, b \in R$.

2. Προσδιορίστε τον πίνακα A της γραμμικής απεικόνισης f που ικανοποιεί $f(1,1,1) = (2,1,1)$, $f(0,1,2) = (1,0,1)$ και $f(0,0,1) = (1,0,0)$. Ποιος είναι ο τύπος της f;

Απάντηση

Τα διανύσματα $(1,0,0)$ και $(0,1,0)$ γράφονται σαν $(1,0,0) = (1,1,1) - (0,1,2) + (0,0,1)$ και $(0,1,0) = (0,1,2) - 2(0,0,1)$. Επομένως

$$f(1,0,0) = (2,1,1) - (1,0,1) + (1,0,0) = (2,1,0) f(0,1,0) = (1,0,1) - 2(1,0,0) = (-1,0,1).$$

Άρα ο πίνακας της απεικόνισης είναι ο $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, και ο τύπος της δίνεται σαν $f(x,y,z) = A(x,y,z)^t = (2x - y + z, x, y)$.

3. Εαν $f : R^n \to R^n$ γραμμική ένα προς ένα και επί δείξτε ότι
1)Η αντίστροφη είναι γραμμική.
2)Η f^2 είναι γραμμική.

Απάντηση

1) Η f^{-1} είναι καλά ορισμένη αφού η f είναι 1-1 και επί. Επίσης είναι γραμμική αφού για κάθε δύο διανύσματα a, b του R^n και κάθε πραγματικό αριθμό r υπάρχουν μοναδικά διανύσματα A, B στο R^n ώστε $f(A) = a$ και $f(B) = b$ και επομένως

$$f^{-1}(a + rb) = f^{-1}(f(A) + rf(B)) = f^{-1}(f(A + rB)) = A + rB = f^{-1}(a) + rf^{-1}(b).$$

2)$f^2(a + rb) = f(f(a) + rf(b)) = f^2(a) + rf^2(b)$. Δικαιολογήστε όλες τις παραπάνω ισότητες.

4. Έστω T και U οι γραμμικές απεικονίσεις του R^2 που ορίζονται σαν

$$T(x,y) = (y,x) \text{ και } U(x,y) = (x,0).$$

Δώστε τον τύπο και τον πίνακα των παρακάτω γραμμικών απεικονίσεων $(U + T), UT, TU, T^2, U^2$. Τι παρατηρείτε;

Απάντηση

Οι πίνακες των T, U είναι οι $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, αντίστοιχα.

Ο τύπος του $U + T$ είναι $(U + T)(x, y) = (x + y, x)$ και ο αντίστοιχος πίνακας είναι ο $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ που ισούται με τον $A + B$.

Ο τύπος του $UT(x, y) = U(y, x) = (y, 0)$ και ο αντίστοιχος πίνακας ο $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ που ισούται με το γινόμενο των πινάκων BA. Ανάλογα για όλα τα υπόλοιπα γινόμενα.

5. Δώστε έναν 3 επί 3 πίνακα που σε κάθε διάνυσμα (x, y, z) αντιστοιχεί την προβολή του στην ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $(0, 0, 0)$ και $(1, 2, 3)$.

Απάντηση

Η ευθεία που ορίζεται από τα παραπάνω σημεία είναι η $\dot{t}(1, 2, 3)$. Η προβολή του $(1, 0, 0)$ πάνω σε αυτή την ευθεία είναι σημείο $t(1, 2, 3)$, για συγκεκριμένο $t \in R$, τέτοιο ώστε το διάνυσμα $t(1, 2, 3) - (1, 0, 0)$ είναι κάθετο στο $(1, 2, 3)$. Δηλαδή το t ικανοποιεί $(t - 1, 2t, 3t) \perp (1, 2, 3)$, και επομένως το εσωτερικό τους γινόμενο είναι 0, και άρα $t - 1 + 4t + 9t = 0$. Επομένως $t = 1/14$ και η προβολή του $(1, 0, 0)$ στην παραπάνω ευθεία είναι το σημείο $1/14(1, 2, 3)$.

Ανάλογα βρίσκουμε ότι η προβολή του $(0, 1, 0)$ στην δεδομένη ευθεία είναι το σημείο $2/14(1, 2, 3)$ ενώ η προβολή του $(0, 0, 1)$ είναι το σημείο $3/14(1, 2, 3)$. Συνεπώς ο ζητούμενος πίνακας είναι ο

$$\begin{bmatrix} 1/14 & 2/14 & 3/14 \\ 2/14 & 4/14 & 6/14 \\ 3/14 & 6/14 & 9/14 \end{bmatrix}.$$