Γραμμική Άλγεβρα 1

Ολοήμερο Εργαστήριο 9

Λ. Νικολιδάκης– Μ. Λουκάκη

1. Έστω T η γραμμική απεικόνιση του R^3 με τύπο

$$T(x,y,z) = (3x, x-y, 2x+y+z).$$

1) Είναι η T αντιστρέψιμη; Αν ναι βρείτε τύπο για την T^{-1}.
2) Δείξτε ότι η T ικανοποιεί $(T^2 - I)(T - 3I) = 0$.

Απάντηση

Ο πίνακας που αντιστοιχεί στην T είναι ο $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ο οποίος είναι αντιστρέψιμος (άνω τριγωνικός με μη μηδενικά στην διαγώνιο). Ο αντίστροφος του A είναι ο $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ επομένως ο T^{-1} έχει πίνακα τον A^{-1} και άρα τύπο τον $T^{-1}(x,y,z) = A^{-1}(x,y,z)^T = (1/3x, 1/3x - y, -x + y + z)$.
Για το 2) κάντε πράξεις στους πίνακες (δείτε επίσης ότι η ζητούμενη ισότητα δίνει άλλο ένα τρόπο να υπολογίσετε τον αντιστροφο του A).

2. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση f ώστε

$$f(1,1,2) = (1,0,2), f(0,-1,1) = (1,1,1), f(1,0,2) = (3,2,4).$$

1) Βρείτε τον πίνακα A της παραπάνω απεικόνισης.
2) Δείξτε ότι η εικόνα της f είναι ένα επίπεδο στον R^3.
3) Βρείτε τον πυρήνα της f.
4) Βρείτε έναν υπόχωρο V του R^3 διάστασης 2 ώστε $f(V) = f(R^3)$.
5) Δείξτε ότι η $f : V \to R^3$ είναι ένα προς ένα.
6) Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in R^3$,ώστε $f(v) = (0,1,-1)$.
7) Βρείτε έναν υπόχωρο W του R^3 διάστασης 2 με την ιδιότητα ο $f(W)$ να ισούται με τον χώρο που παράγεται από το διάνυσμα $(0,1,-1)$.
8) Είναι η $f : W \to R^3$ ένα προς ένα;

Απάντηση

Τα διανύσματα $\{(1,1,2),(0,-1,1),(1,0,2)\}$ αποτελούν βάση του R^3 αφού είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Επομένως η f που ορίζεται παραπάνω είναι μοναδική (γιατί;) Δείτε επίσης ότι

$$\begin{aligned} f(0,1,0) &= f((1,1,2)-(1,0,2)) = (1,0,2)-(3,2,4) = (-2,-2,-2) \\ f(0,0,1) &= f((0,-1,1)+(0,1,0)) = (1,1,1)+(-2,-2,-2) = (-1,-1,-1) \\ f(1,0,0) &= f((1,0,2)-2(0,0,1)) = (3,2,4)-2(-1,-1,-1) = (5,4,6) \end{aligned}$$

και επομένως ο πίνακας που αντιστοιχεί στην f είναι ο $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 6 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.
2) Εύκολα βλέπουμε ότι ο A έχει τάξη 2 (οι δύο πρώτες στήλες του είναι ανεξάρτητες) επομένως η εικόνα της f, που ισούται με τον χώρο στηλών του A, είναι υπόχωρος του R^3 διάστασης 2 και άρα είναι επίπεδο.
3) Ο πυρήνας της f είναι ο μηδενόχωρος του A και άρα υπολογίζουμε

$$Ker f = N(A) = \{z(0,-1/2,1) \mid z \in R\}.$$

4) Οι δύο πρώτες στήλες του A παράγουν τον χώρο στηλών του A δηλαδή την εικόνα της f. Επομένως τα διανύσματα $\{(1,0,0)(0,1,0)\}$ παράγουν ένα διδιάστατο χώρο V ώστε $f(V) = f(R^3)$.

5) Η τομή των υπόχωρων V και $N(A)$ είναι φανερα το 0. Επομένως η $f : V \to R^3$ έχει μηδενικό πυρήνα και άρα είναι 1-1.
6) Λύνουμε το σύστημα $A(x,y,z)^T = (0,1,-1)$ για να υπολογίσουμε το $v = (x,y,z)$. Ή παρατηρούμε ότι $(0,1,-1) = (1,1,1) - (1,0,2) = f(0,-1,1) - f(1,1,2) = f(-1,-2,-1)$. Επομένως ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το $v = (-1,-2,-1)$.
7) Θεωρούμε W τον υπόχωρο του R^3 που παράγεται από τα διανύσματα $v = (-1,-2,-1)$ και $u = (0,-1/2,1)$. Φανερά ο W είναι διάστασης 2 και αφού το u ανήκει στον πυρήνα της f έχουμε $f(W) = f(< (-1,-2,-1) >) =< (0,1,-1) >$.
8) Δεν είναι 1-1 αφού η εικόνα του διανύσματος $u = (0,-1/2,1) \in W$ είναι το $0 = f(0)$. (Στην πραγματικότητα όλος ο πυρήνας της f περιέχεται στον W.)

3. 1) Να βρεθούν μία βάση και η διάσταση του πυρήνα και της εικόνας της εξής γραμμικής απεικόνισης: $f(x,y,z) = (x+2y, y-z, x+2z)$
2) Δείξτε ότι εάν $f, g : R^n \to R^m$ είναι γραμμικές απεικονίσεις που συμφωνούν στα στοιχεία μιας βάσης του R^n,τότε είναι ίσες.

Απάντηση

1) Ο πίνακας της f είναι ο $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ που η κλιμακωτή του μορφή είναι ο πίνακας $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Επομένως η τάξη του A είναι 2 και αυτή είναι και η διάσταση της εικόνας της f. Μάλιστα μία βάση της Imf είναι τα δύο πρώτα διανύσματα στήλες του A ($Imf = R(A)$). Δηλαδή τα διανύσματα $(1,0,1)$ και $(2,1,0)$ αποτελούν βάση του Imf.
Η διάσταση του πυρήνα της f είναι 3-2=1. Για να βρούμε μία βάση του πυρήνα λύνουμε το ομογενές με πίνακα συντελεστών τον A (αφού $Kerf = N(A)$). Επομένως από τον U βλέπουμε ότι μία βάση του $Kerf$ είναι το διάνυσμα $(-2,1,1)$.
2) Έστω $v_1, \dots v_n$ μία βάση του V ώστε $f(v_i) = g(v_i)$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Αν $v \in R^n$ τότε $v = r_1 v_1 + \dots + r_n v_n$ και συνεπώς

$$f(v) = r_1 f(v_1) + \dots + r_n f(v_n) = r_1 g(v_1) + \dots + r_n g(v_n) = g(v).$$

4. Εάν V γνήσιος υπόχωρος του R^n και x διάνυσμα του R^n που δεν ανήκει στον V τότε βρείτε γραμμική απεικόνιση $f : R^n \to R$ ώστε $f(v) = 0$ για κάθε $v \in V$ και $f(x) = 1$.

Απάντηση

Έστω $\{v_1, \dots, v_k\}$ μία βάση του V, προφανώς $k < n$ αφού $x \notin V$. Τα διανύσματα $\{v_1, \dots, v_k, x\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (γιατί;). Αν $k = n-1$ τότε τα n παραπάνω γραμμικώς ανεξ. διανύσματα του R^n αποτελούν βάση του. Αν $k < n-1$ τότε συμπληρώνουμε τα διανύσματα $\{v_1, \dots, v_k, x\}$ σε βάση του R^n (αυτό μπορεί να γίνει πάντα, γιατί;). Έστω $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, x, w_1, \dots, w_r\}$ βάση του R^n, με $r = 0, 1, 2, \dots$. Ορίζουμε τώρα την f πάνω στην βάση $\mathcal{B}$ σαν $f(v_i) = 0$ για $i = 1, \dots, k$ και $f(x) = f(w_j) = 1$ για $j = 1, \dots, r$, και επεκτείνουμε γραμμικά σε ολο το R^n. Η f που κατασκευάσαμε έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.