Άλγεβρα, Χειμερινό 2009 – Πρόοδος 2 – 4/12/09

1.(2.5 μον.)
Έστω

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 7 & 1 & 3 & 5 & 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

στοιχείο της S_{10}.
1) Γράψτε τα στοιχεία $\sigma, \sigma^{-1}, \sigma^{60}$ σαν γινόμενο ξένων κύκλων.
2) Ποιά από τα παραπάνω στοιχεία είναι άρτιες μεταθέσεις ·
3) Αν $H =< \sigma >$ είναι η υποομάδα της S_{10} που παράγεται από το σ^5, βρείτε την τάξη της H. Μπορείτε να βρείτε στοιχείο στην H τάξης 2 ·

2.(1 μον)
Έστω G ομάδα τάξης 21. Δείξτε ότι κάθε γνήσια υποομάδα της είναι κυκλική.

3.(2.5 μον.)
1)Είναι κάποιες από τις παρακάτω ομάδες ισόμορφες· (Εξηγήστε γιατί είναι ή δεν είναι)

$$Z, U(Z_8), Z_6, Z_4, S_3$$

2)Βρείτε όλους τους ομομορφισμούς από την ομάδα $\mathbb{Z}_6$ στην $\mathbb{Z}_{15}$. Προσδιορίστε τον πυρήνα και την εικόνα τους.

4.(3 μον.)
Σωστό η Λάθος. (Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα.)
1)Υπάρχει υποομάδα μιας αβελιανής ομάδας G, της οποίας τα αριστερά σύμπολοκα και τα δεξιά σύμπλοκα δίνουν διαφορετικές διαμερίσεις της G.
2)Υπάρχει υποομάδα μιας ομάδας τάξης 6 της οποίας τα αριστερά σύμπλοκα δίνουν διαμέριση της ομάδας σε 4 υποσύνολα.
3)Υπάρχει άπειρη κυκλική ομάδα με 4 γεννήτορες.
4)Όλοι οι γεννήτορες της $\mathbb{Z}_{20}$ είναι πρώτοι αριθμοί.
5)Ο δείκτης της $< 6 >$ στην Z_{15} είναι 4.
6)Η ομάδα $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{14}$ περιέχει υποομάδα ισόμορφη με την $\mathbb{Z}_4$.

5.(2 μον.)
Έστω G μία ομάδα που έχει ακριβώς 3 υποομάδες. Δείξτε ότι $|G| = p^2$, όπου p είναι πρώτος.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 2 ώρες με κλειστές σημειώσεις. Τα κινητά σας πρέπει να είναι κλειστά. Ανοικτό κινητό συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού σας. Καλή επιτυχία.