

1.(2 μον.)

1) Βρείτε όλα τα  $x$  που ικανοποιούν  $6x \equiv 3 \pmod{35}$ .

2) Αν  $a, b \in \mathbb{Z}$  πρώτοι μεταξύ τους τότε ο μ.κ.δ.  $(a - b, a^2 + ab + b^2) = 1$  ή 3.

2.(2.5 μον)

1) Βρείτε το τελευταίο ψηφίο του  $3^n$  όπου  $n$  είναι ο αριθμός μητρώου σας.

2) Για κάθε  $a \in \mathbb{Z}$  δείξτε ότι  $4 \nmid a^2 - 2$  και  $4 \nmid a^2 - 3$ .

3.(2 μον.)

Δείξτε ότι  $\phi(n) = n/2 \Leftrightarrow n = 2^k$  για κάποιο  $k \in \mathbb{Z}$ , όπου  $\phi(n)$  είναι η συνάρτηση Euler του  $n$ .

4.(1.5 μον.)

Έστω  $G$  κυκλική ομάδα τάξης 52 δηλ.  $G = \langle g \mid g^{52} = e \rangle$ . Πώς θα βρείτε τα στοιχεία τάξης 4; Ποιά είναι; Ίδια ερώτηση για την κυκλική τάξης 50.

5.(2 μον.)

Έστω  $(G, *)$  ομάδα. Ορίζουμε το εξής υποσύνολο της  $G$ :

$$Z(G) = \{g \in G \mid g * x = x * g, \forall x \in G\}.$$

1) Δείξτε ότι  $Z(G)$  είναι υποομάδα της  $G$ .

2) Δείξτε ότι  $Z(G)$  είναι αβελιανή.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι 1.30 ώρα με κλειστές σημειώσεις. Τα κινητά σας πρέπει να είναι κλειστά. Ανοικτό κινητό συνεπάγεται μηδενισμό του γραπτού σας. Καλή επιτυχία.