

Άλγεβρα ,  
Ομάδες-Υποομάδες-Κυκλικές

Οι περισσότερες από τις παρακάτω ασκήσεις είναι από το βιβλίο του Fraleigh: "Εισαγωγή στην Άλγεβρα" §1.2 και §1.3. Στις ίδιες παραγράφους υπάρχουν ερωτήσεις κατανόησης Σωστό ή Λάθος (δείτε τις 14 σελ.58 και 26 σελ.70), που προτείνω να δείτε για καλύτερη κατανόηση των εννοιών.

**1.** Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω σύνολα με την δοθείσα πράξη αποτελούν ομάδες. Σε όσα προκύψει ομάδα εξετάστε αν είναι αβελιανή.

- 1) Το  $\mathbb{R} - \{0\}$  με πράξη  $*$  την  $a * b = |a|b$ .
- 2) Το  $\mathbb{Z}$  με πράξη  $*$  την  $a * b = a - b$ .
- 3) Το  $\mathbb{R}$  με πράξη  $*$  την  $a * b = a + b + ab$ .
- 4) Το  $\mathbb{R} - \{-1\}$  με πράξη  $*$  την  $a * b = a + b + ab$ .

**2.** Δείξτε ότι αν  $G$  είναι πεπερασμένη ομάδα με ταυτοτικό  $e$  και με άρτιο πλήθος στοιχείων, τότε υπάρχει  $a \neq e$  στην  $G$  τέτοιο ώστε  $a * a = e$ .

**3.** Δείξτε ότι κάθε ομάδα  $G$ , με ταυτοτικό στοιχείο το  $e$ , που ικανοποιεί την  $x * x = e$  για κάθε  $x \in G$  είναι αβελιανή.

**4.** Έστω  $G$  ομάδα με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Δείξτε ότι για κάθε  $a \in G$ , υπάρχει  $n \in \mathbb{Z}^+$  ώστε  $a^n = e$ .

**5.** Δείξτε ότι αν  $(a * b)^2 = a^2 * b^2$  για κάποια  $a, b$  σε ομάδα  $G$ , τότε  $a * b = b * a$ .

**6.** Δείξτε με ένα παράδειγμα ότι είναι δυνατόν η δευτεροβάθμια εξίσωση  $x^2 = e$  να έχει περισσότερες από δύο λύσεις σε κάποια ομάδα.

**7.** Αποδείξτε ότι αν  $G$  είναι μια αβελιανή ομάδα με ταυτοτικό στοιχείο  $e$ , τότε όλα τα στοιχεία  $x$  της  $G$  που ικανοποιούν την εξίσωση  $x^2 = e$  αποτελούν υποομάδα της  $G$ .

**8.** Έστω  $G$  ομάδα και  $a \in G$ . Δείξτε ότι το σύνολο

$$H_a = \{x \in G \mid xa = ax\}$$

είναι υποομάδα της  $G$ .

**9.** Δείξτε ότι η τομή δύο υποομάδων μιας ομάδας είναι επίσης υποομάδα.

**10.** Ποιές από τις παρακάτω ομάδες είναι κυκλικές. Για κάθε κυκλική καταγράψτε όλους τους γεννήτορες της ομάδας:

$$G_1 = \langle \mathbb{Z}, + \rangle, G_2 = \langle \mathbb{Q}, + \rangle, G_3 = \langle \mathbb{Q}^+, \cdot \rangle, G_4 = \langle 6\mathbb{Z}, + \rangle, G_5 = \{6^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ με τον πολλαπλασιασμό.}$$

$G_6 = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$  με την πρόσθεση.

11. Βρείτε την κυκλική υποομάδα της  $Z_4$  που παράγεται από το 3. Της  $Z_6$  που παράγεται από το 3, από το 4, από το 5, από το 2.

12. Αν  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  και  $C = AB$  βρείτε την τάξη των  $A, B, C$  στην πολλαπλασιαστική ομάδα  $GL_2(\mathbb{R})$  των 2 επί 2 πινάκων πάνω από το  $\mathbb{R}$ . Τι παρατηρείτε;

13. Αποδείξτε ότι μια κυκλική ομάδα με ένα μόνο γεννήτορα μπορεί να έχει το πολύ 2 στοιχεία.

14. Δείξτε ότι μία ομάδα που δεν έχει γνήσιες μη τετριμμένες υποομάδες είναι κυκλική.

15. Πόσα στοιχεία τάξης 10 έχει μια κυκλική ομάδα τάξης 100.

16. Αν  $p, q$  είναι διαφορετικοί πρώτοι, βρείτε τους γεννήτορες της κυκλικής  $Z_{pq}$ .

17. Ποιές από τις  $U(\mathbb{Z}_8), U(\mathbb{Z}_{10}), U(\mathbb{Z}_{12})$  είναι κυκλικές.

18. Βρείτε όλες τις υποομάδες των ομάδων  $Z_8, Z_{12}, Z_{13}, Z_{15}, Z_{16}, Z_{18}$ . Φτιάξτε τα δικτυωτά τους διαγράμματα.