

Άλγεβρα

Μεταθέσεις

Για δική σας εξάσκηση δείτε τα σωστά λάθος, άσκηση 13 σελ. 95 από το βιβλίο του Fraleigh.

1. Έστω τα ακόλουθα στοιχεία της S_8

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 2 & 4 & 8 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

και

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Γράψτε τα παραπάνω στοιχεία σαν γινόμενο ξένων κύκλων και υπολογίστε τις τάξεις τους. Επίσης υπολογίστε τα εξής στοιχεία: σ^{100} , $\sigma^2\tau$, $\tau\sigma$, $\tau^{-1}\sigma$.

2. Βρείτε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\{\sigma \in S_5 \mid \sigma(2) = 5\}$

3. Αν

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Δώστε τα στοιχεία της κυκλικής υποομάδας της S_5 που παράγει η ρ .

4. Βρείτε τις τάξεις και τους αντίστροφους των παρακάτω στοιχείων της S_7 :

$$\sigma = (1234)(345), \rho = (12)(23)(34)(45).$$

Αλλάζουν οι παραπάνω τάξεις αν θεωρήσουμε τα στοιχεία μέσα στην S_{10} ;

5. Βρείτε μια μετάθεση τάξης 99 στην S_{21}

6. Πόσες μεταθέσεις τάξης 2 έχει η S_4 ;

7. Δείξτε ότι ένα στοιχείο τάξης 14 στην S_{10} είναι περιττή μετάθεση.

8. Δείξτε ότι για κάθε υποομάδα H της S_n με $n \geq 2$, είτε όλες οι μεταθέσεις στην H είναι άρτιες είτε ακριβώς οι μισές απ' αυτές είναι άρτιες.

9. Αν ένας κύκλος $\sigma \in S_n$ είναι περιττού μήκους τότε και ο σ^2 είναι κύκλος. Ενώ αν είναι κύκλος άρτιου μήκους τότε ο σ^2 είναι γινόμενο δύο ξένων κύκλων.