Άλγεβρα

Θεώρημα Lagrance

Για δική σας εξάσκηση δείτε τα σωστά λάθος, άσκηση 15 σελ. 116 από το βιβλίο του Fraleigh.

1. Βρείτε όλα τα αριστερά σύμπλοκα της υποομάδας $< 4 >$ της $\mathbf{Z}_{12}$ καθώς και τον δείκτη της. Είναι τα δεξιά συμπλοκα της $< 4 >$ στην $\mathbf{Z}_{12}$ ίδια με τα αριστερά ;

2. Δώστε αν είναι δυνατόν παραδείγματα για τα παρακάτω ή εξηγήστε γιατί είναι αδύνατα:
1) Υποομάδα αβελιανής ομάδας G που τα αριστερά της σύμπλοκα να δίνουν διαφορετική διαμέριση της G από τα δεξιά σύμπλοκα.
2) Υποομάδα μιας ομάδας τάξης 6 που να έχει 6 αριστερά σύμπλοκα.
3) Υποομάδα μιας ομάδας τάξης 6 που να έχει 12 αριστερά σύμπλοκα.
4) Υποομάδα μιας ομάδας τάξης 6 που να έχει 3 αριστερά σύμπλοκα.
5) Υποομάδα μιας ομάδας τάξης 6 που να έχει 4 αριστερά σύμπλοκα.
6) Αν $aH = bH$ τότε $b \in aH$.
7) Αν $aH = bH$ τότε $Ha = Hb$.
8) Αν $aH = bH$ τότε $Ha^{-1} = Hb^{-1}$.

3. Αν $|G| = n$ δείξτε ότι για κάθε $g \in G$ ισχύει $g^n = e$ για κάθε $g \in G$.

4. Αν H, K υποομάδες μιας πεπερασμένης ομάδας G με $(|H|, |K|) = 1$ τότε $H \cap K = \{e\}$.

5. Έστω G ομάδα τάξης pq όπου p και q είναι πρώτοι. Δείξτε ότι κάθε γνήσια υποομάδα της G είναι κυκλική.

6. Έστω H υποομάδα μιας ομάδας G. Δειξτε ότι η H είναι κανονική υποομάδα της G, δηλαδή κάθε αριστερό σύμπλοκο gH ταυτίζεται με το δεξιό Hg αν και μόνο αν $g^{-1}hg \in H$ για κάθε $g \in G$ και για κάθε $h \in H$.

7.Αν ομάδα G περιέχει ακριβώς ένα στοιχείο τάξης 2 τότε αυτό ανήκει στο κέντρο $Z(G)$ της ομάδας, $Z(G) = \{g \in G \mid xg = gx, \ \forall x \in G\}$.