

Άλγεβρα

Φυλλάδιο 9

1. Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία ($U(R)$) των παρακάτω δακτυλίων R .

- 1) $R = M_2(\mathbf{Z})$
- 2) $R = \mathbf{Z}[i]$
- 3) $R = \mathbf{Z}_5$
- 4) $R = \mathbf{Z}_6$
- 5) $R = M_2(\mathbf{Z}_2)$ (οι 2 επι 2 πίνακες με στοιχεία από το \mathbf{Z}_2)
- 6) $R = \mathbf{Z} \times \mathbf{Q} \times \mathbf{Z}$

2. Εξετάστε αν στα παρακάτω παραδείγματα είναι ο S υποδακτύλιος του R . Στα παραδείγματα που είναι, προσδιορίστε αν έχει μονάδα 1_S ή όχι και ποια είναι. Είναι κάποιος από αυτούς τους υποδακτύλιους ακέραια περιοχή; Σώμα;

- 1) $S = \{0, 4, 8\}$ και $R = \mathbf{Z}_{12}$.
- 2) $S = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}, b \text{ αρτιος}\}$ και $R = \mathbf{Z}[\sqrt{2}]$.
- 3) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z} \right\}$ και $R = M_2(\mathbf{Z})$.
- 4) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{C} \right\}$ και $R = M_2(\mathbf{C})$.
- 5) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{C} \right\}$ και $R = M_2(\mathbf{C})$.

3. Έστω S υποδακτύλιος του δακτυλίου R . Αν R είναι ακεραία περιοχή με μονάδα 1_R και ο S έχει μονάδα 1_S , δείξτε ότι $1_R = 1_S$.

4. Αν στον δακτύλιο R ισχύει $a^2 = a$ για κάθε $a \in R$, δείξτε ότι ο R είναι αντιμεταθετικός.

5. Ποια είναι η χαρακτηριστική των δακτυλίων

- α) $\mathbf{Z}_3 \times 3\mathbf{Z}$,
- β) $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3$,
- γ) $\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_4$;

6. Αν R είναι μεταθετικός δακτύλιος με 1_R και χαρακτηριστική 3, υπολογίστε και απλοποιήστε το $(a + b)^9$ με $a, b \in R$.

7. Δείξτε ότι η χαρακτηριστική μιας ακέραιας περιοχής D είτε είναι 0 είτε πρώτος αριθμός. Υπόδειξη: Αν η χαρακτηριστική είναι mn , θεωρήστε το $(m \cdot 1)(n \cdot 1)$.