Άλγεβρα

Φυλλάδιο 10

1. Πόσα πολυώνυμα βαθμού ≤ 3 υπάρχουν στον $\mathbf{Z}_5[x]$.

2. Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία των δακτυλίων: $\mathbf{Z}[x]$, $\mathbf{Q}[x]$, $\mathbf{Z}_2[x]$, $\mathbf{Z}_7[x]$.

3. Είναι δυνατόν ο δακτύλιος $R[x]$ να είναι σώμα;

4. Βρείτε ένα πολυώνυμο βαθμού > 0 στον $\mathbf{Z}_4[x]$ που να είναι αντιστρέψιμο και ένα που δεν είναι αντιστρέψιμο.

5. Αν το πολυώνυμο $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in R[x]$, όπου $a_n \neq 0$, είναι μηδενοδιαιρέτης, τότε το $a_n \in R$ είναι μηδενοδιαιρέτης.

6. Αποδείξτε ότι αν ο p είναι πρώτος, τότε $(f(x))^p = f(x^p)$ για κάθε $f(x) \in \mathbf{Z}_p[x]$.

7. Να βρεθεί ο μ.κ.δ. των πολυωνύμων $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ και $g(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ στο $Q[x]$ και στο $\mathbf{Z}_5[x]$. Επίσης βρείτε πολυώνυμα $a(x)$ και $b(x)$ στο $Q[x]$ και $\mathbf{Z}_5[x]$ αντίστοιχα ώστε μ.κ.δ.$(f(x), g(x)) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$.

8.Δείξτε ότι αν $f(x), g(x) \in \mathbf{R}[x]$ και $f(x)/g(x)$ στο $\mathbf{C}[x]$ τότε $f(x)/g(x)$ και στο $\mathbf{R}[x]$.

9.Στο $\mathbf{Z}_p[x]$ θεωρούμε τα πολυώνυμα $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$ και $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Για ποιούς πρώτους p ο βαθμός του μ.κ.δ των $f(x)$ και $g(x)$ είναι: α) 2;
β) 1;
γ) 0;

10. Προσδιορίστε ένα μη μηδενικό $f(x) \in Q[x]$ βαθμού το πολύ 3 τέτοιο ώστε μ.κ.δ.$(f(x), x^2 + 1) \neq 1$ και μ.κ.δ.$(f(x), x^2 - 3x + 2) \neq 1$.

11.Δείξτε ότι για κάθε σώμα F ο μ.κ.δ. των $x^m - 1$ και $x^n - 1$ είναι ο $x^d - 1$ όπου d είναι ο μ.κ.δ. των m και n.