

Άλγεβρα

Φυλλάδιο 11

1. Πόσες ρίζες έχει το $x^2 - x$ στο \mathbf{Z}_{10} ; στο \mathbf{Z}_{11} ; Γιατί οι απαντήσεις είναι διαφορετικές;
2. Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 + 2x - 1 = 0$ στους δακτυλίους α) \mathbf{Z}_6 , (β) \mathbf{R} , (γ) \mathbf{Q} .
3. Ποια είναι η παραγοντοποίηση σε γινόμενο αναγωγών πολυωνύμων, του
α) $x^3 + 2x^2 + x + 1$ επί του \mathbf{Z}_3
β) $x^4 - 1$ επί των σωμάτων $\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{R}, \mathbf{C}$
γ) $x^4 + 2$ επί του \mathbf{Z}_5 .
4. Να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου $x^3 - 4x^2 + 6x - 4$ στο \mathbf{C} αν είναι γνωστό ότι μία ρίζα του είναι η $1 - i$.
5. Να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου $3x^{223} + 2x^{70} + 3x^{61} + 2x^{40}$ στο $\mathbf{Z}_5[x]$.
6. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $98!$ με το 101 και ναδειχθεί ότι $(50!)^2 \equiv -1 \pmod{101}$.
7. Δείξτε ότι το $x^3 + 3x^2 - 8$ είναι ανάγωγο στο $\mathbf{Q}[x]$. Είναι ανάγωγο πάνω από το \mathbf{R} το \mathbf{C} ;
8. Ποιά από τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ανάγωγα στο δακτύλιο που δίνεται
1) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ στο $\mathbf{Z}_7[x]$
2) $x^4 + 4$ στο $\mathbf{Z}_5[x]$
3) $x^3 + 2x + 3$ στο $\mathbf{Z}_5[x]$
4) $x^3 - 3$ στο $\mathbf{Z}_7[x]$.
- 9.* Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει $f(x) \in \mathbf{R}[x]$ ώστε $(x - 1)^{143} + (x + 1)^{2002} = f(x)^{13}$.