

Άλγεβρα
Φυλλάδιο 12

1. Ποιά από τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ανάγωγα στον $\mathbf{Q}[x]$
α) $x^4 - 22x^2 + 1$, β) $x^2 - 12$, γ) $8x^3 + 6x^2 - 9x + 24$, δ) $2x^{10} - 25x^3 + 10x^2 - 30$.
2. Βρείτε όλα τα ανάγωγα πολυώνυμα βαθμού 3 στον $\mathbf{Z}_3[x]$.
3. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $x^p + a$ στον $\mathbf{Z}_p[x]$, δεν είναι ανάγωγο για κανένα $a \in \mathbf{Z}_p$.
4. Ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις είναι ομομορφισμοί δακτυλίων; Στις περιπτώσεις που είναι υπολογίστε τον πυρήνα τους.
α) $\phi : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_m, \phi(a) = a \bmod m$
β) $\phi : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}, \phi(a) = -a$
ς) $\phi : \mathbf{Q}[x] \rightarrow \mathbf{Q}, \phi(f(x)) = 1$
δ) $\phi : \mathbf{Q}[x] \rightarrow \mathbf{Q}, \phi(f(x)) = f(1)$.
5. Αν R ακέραια περιοχή και $\phi : R \rightarrow R$ ομομορφισμός δακτυλίων, δείξτε ότι είτε $\phi(1) = 0$ είτε $\phi(1) = 1$.
6. Δείξτε ότι δεν υπάρχει μη μηδενικός ομομορφισμός δακτυλίων από το $\mathbf{Q}$ στο $\mathbf{Z}$.
7. Ποια από τα παρακάτω σύνολα είναι ιδεώδη του δακτυλίου
- $$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{Z} \right\}.$$
- α) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbf{Z} \right\}$, β) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{Z} \right\}$,
γ) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid b, c \in \mathbf{Z} \right\}$, δ) $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid b \text{ είναι άρτιος} \right\}$.
8. Ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι ιδεώδη του δακτυλίου $\mathbf{Q}[x]$.
α) $\{f(x) \in \mathbf{Q}[x] \mid f(0) = 0\}$
β) $\{f(x) \in \mathbf{Q}[x] \mid f(0) = 1\}$
ς) $\{f(x) \in \mathbf{Q}[x] \mid f(1/2) = 0\}$
δ) $\{f(x) \in \mathbf{Q}[x] \mid f(1/2) \text{ είναι άρτιος}\}$
ε) $\{f(x) \in \mathbf{Q}[x] \mid f(1) = f(2) = 0\}$