

Άλγεβρα , 2012
Φυλλάδιο 1

1. Έστω $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - 0$, όπου \mathbb{Q} είναι το σύνολο των ρητών. Ορίζουμε την σχέση \sim στο \mathbb{Q}^* ως εξής:

$$a \sim b \iff a + \frac{1}{a} = b + \frac{1}{b}.$$

Δείξτε ότι η παραπάνω είναι σχέση ισοδυναμίας, και βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας που αυτή ορίζει.

2. Στο σύνολο $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ όπου $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ορίζουμε την σχέση \sim σαν

$$(m_1, m_2) \sim (n_1, n_2) \iff m_1 + n_2 = m_2 + n_1.$$

α) Δείξτε ότι η παραπάνω είναι σχέση ισοδυναμίας.

β) Δείξτε ότι για κάθε $(m, n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ υπάρχει $k \in \mathbb{N}_0$ ώστε $(m, n) \sim (k, 0)$ είτε $(m, n) \sim (0, k)$.

γ) Βρείτε τις κλάσεις ισοδυναμίας που ορίζει αυτή η σχέση.

3. Θεωρούμε την εξής διαμέριση των μιγαδικών αριθμών: $\mathbb{C} = \bigcup A_i$, όπου A_i είναι η ευθεία παράλληλη με τον άξονα των φανταστικών που κόβει τον άξονα των πραγματικών στο $r_i \in \mathbb{R}$ (όπου $r_i \neq r_j$ όταν $i \neq j$). Μπορείτε να βρείτε μια σχέση ισοδυναμίας στο \mathbb{C} που να έχει κλάσεις ισοδυναμίας τα A_i ;

4. Από το βιβλίο ' Μια Εισαγωγή στην Άλγεβρα' (δείτε την ηλεκτρονική του μορφή) §1.2 (σελ.28-29) τις 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9,