

Θ. Πιθανοτήτων
Φυλλάδιο 10
Χειμερινό 2012
Μ. Λουκάκη

1. Αν X, Y τ.μ. δείξτε ότι

1) $Cov(X + Y, W) = Cov(X, W) + Cov(Y, W)$ και $Cov(aX, Y) = aCov(X, Y)$.

2) Αν X, Y ασυσχετιστες που ακολουθουν την ιδια κατανομη τοτε και οι $X + Y, X - Y$ ειναι ασυσχετιστες.

3) Αν X, Y ανεξαρτητες που ακολουθουν την ιδια κατανομη και $Z = \frac{X+Y}{2}$ τοτε οι $X - Z$ και Z ειναι ασυσχετιστες.

2. Αν X, Y τ.μ. με $VarX = VarY = a$ δείξτε ότι

1) $Var(3X + 5Y + 10) = 34a + 30Cov(X, Y)$

2) Αν $Var(3X + 5Y) = Var(3X - 5Y + 6)$ τότε οι X, Y είναι ασυσχέτιστες.

3. Αν X, Y ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n, p και m, p αντίστοιχα, Υπολογίστε την ροπογεννήτρια της X και της $2X + Y$. (Για εξάσκηση μπορείτε να υπολογίσετε το ίδιο πρόβλημα, αν X, Y ακολουθούν κάποια άλλη από τις γνωστές μας κατανομές.)

4. Αν $EX = 75 = EY, VarX = 10, VarY = 12$ και $Cov(X, Y) = -3$ δώστε άνω φράγμα για $P\{|X - Y| > 15\}$

5. X, Y είναι ανεξαρτητες τ.μ. με ροπογεννητριες

$$M_X(t) = e^{2e^t - 2}, M_Y(t) = (1/4)^{10}.$$

Βρείτε EXY και $Var(X + Y)$.

6. Αυτή η άσκηση αφορά τη σχέση $E(E[X|Y]) = EX$ (μια και υπήρχαν αρκετές απορίες για την εφαρμογή της.)

Δέκα κυνηγοί περιμένουν σε μία λίμνη αγριόπαπιες να περάσουν. Αν ένα σμήνος περάσει οι κυνηγοί πυροβολούν συγχρόνως αλλά ο καθένας διαλέγει στην τύχη μια πάπια από το σμήνος ανεξάρτητα από τους άλλους. Αν ο κάθε κυνηγός βρίσκει το στόχο του με πιθανότητα 0.6 (ίδια για όλους) ανεξάρτητα από τους υπόλοιπους, βρείτε κατά μέσο όρο πόσες πάπιες θα χτυπηθούν. Υποθέστε ότι το πλήθος από πάπιες στο σμήνος ακολουθεί Poisson κατανομή με μέσο όρο 10.

7.** Αυτή η άσκηση είναι αρκετά δυσκολότερη από τις υπολοιπες. Οσοι θελουν να ασχοληθουν παραπανω ως την δοκιμασουν, ευχαριστως να δω τις λυσεις τους ή αν θελουν υποδειξεις ή λύσεις.)

Διαλέγω 13 χαρτιά από τα 52 μιας τράπουλας. Έστω X το πλήθος των άσσων και Y το πλήθος των σπαθιών στα 13 φυλλα που έχω.

1) Δείξτε ότι οι X, Y είναι ασυσχέτιστες. 2) Είναι ανεξάρτητες;