Θ. Πιθανοτήτων
Φυλλάδιο 6

Χειμερινό 2012
Μ. Λουκάκη

1.Ρίχνετε δύο ζάρια. Υπολογίστε τις συναρτήσεις πυκνότητας των επόμενων τ.μ. (Τις αναγνωρίζετε;)
α) X μετράει τις ρίψεις μέχρι να έρθει για πρώτη φορά άθροισμα 7.
β) Αν ρίξω τα ζάρια 100 φορές, Y μετράει το πλήθος των διπλών εξαριών που φέρνετε.
γ) Αν την εκατοστή φορά έρθει ασσόδυο, Z μετράει το συνολικό πλήθος ασσόδυων μέχρι και την εκατοστή φορά.

2.Η τ.μ. X ακολουθεί γεωμετρική κατανομή με παράμετρο p. Υπολογίστε τις πιθανότητες των ενδεχομένων
α) $4 \leq X \leq 7$ ή $X > 9$
β)$3 < X \leq 100$
γ) Υπολογίστε την συνάρτηση πυκνότητας της $Y = X^2$ και την μέση τιμή της EY.

3. Υποθέτουμε ότι ο αριθμός ατυχημάτων κάθε μέρα σε ένα τμήμα της εθνικής δίνεται από την τ.μ. X που ακολουθεί κατανομή Poisson με λ=3.
α) Υπολογίστε την πιθανότητα 3 ή περισσότερα ατυχήματα να συμβούν σήμερα.
β) Υπολογίστε την μέση τιμή της $Y = (1 + X)^{-1}$.

4. Αν η τ.μ.X έχει γνωστή συνάρτηση πυκνότητας f_X και κατανομής F_X, και πεπερασμένη μέση τιμή EX, βρείτε
α) την συνάρτηση πυκνότητας και κατανομής των τ.μ. $Y = 5X + 6$ και $Z = -5X + 6$, με χρήση των f_X και F_X.
β) την μέση τιμή της $Y = 5X + 6$.

5. Σε ένα καλάθι με 20 αυγά τα 6 είναι χαλασμένα. Διαλέγετε τυχαία 3 αυγά. Κατά μέσο όρο πόσα περιμένετε να είναι χαλασμένα από αυτά τα τρία;

6. Σε ένα κουτί έχετε εκατό κάρτες. Δύο έχουν πάνω τον αριθμό 1 δύο τον αριθμό 2 κ.ο.κ. (μέχρι και το 50). Τραβάτε m κάρτες από το κουτί. Έστω X η τ.μ. που μετράει το πλήθος των ζευγαριών που έμειναν μέσα στο κουτί. Βρείτε EX.
Υπόδειξη: Γράψτε την X σαν άθροισμα τυχαίων μεταβλητών.

7.(St. Petersburg paradox)Ρίχνετε ένα νόμισμα μέχρι να έρθει Κ για πρώτη φορα. Αν αυτό συμβεί την n φορά σας δίνω 2^n ευρώ. Έστω X η τ.μ. που μετράει τα κέρδη σας. Δείξτε ότι $EX = +\infty$ (!!!).
α) Θα δίνατε 1.000.000 ευρώ για να παίξετε αυτό το παιχνίδι μία φορά;
β) Θα δίνατε 1.000.000 ευρώ για κάθε παιχνίδι που παίζατε, αν μπορουσατε να παίξετε όσες φορές θέλατε;