

Θ. Πιθανοτήτων
Φυλλάδιο 8
Χειμερινό 2012
Μ. Λουκάκη

1. Η από κοινού σ.π. $f_{X,Y} = f$ των Q, U δίνεται σαν

$$f(1, 1) = 1/8, f(1, 2) = 1/4, f(2, 1) = 1/8, f(2, 2) = 1/2.$$

- 1) Βρείτε την δεσμευμένη πυκνότητα της X δεδομένου ότι $Y = 1$ ή $Y = 2$.
- 2) Είναι οι X, Y ανεξάρτητες;
- 3) Βρείτε τις $P(XY < 3), P(X + Y < 2), P(X/Y > 1)$.

2. Έστω X, Y ανεξάρτητες τ.μ. που ακολουθούν Poisson κατανομή με παραμέτρους λ_1 και λ_2 αντίστοιχα.

- 1) Βρείτε την σ.π. της $X + Y$ και της $X/(Y + 1)$
- 2) Βρείτε την $P(Y = y | X + Y = z)$ για $y = 0, 1, 2, \dots, z$.

3. Ένα δοχείο περιέχει r αριθμημένους βώλους από το 1 έως και το r . Επιλέγουμε τυχαία n από αυτούς χωρίς επανατοποθέτηση. Έστω Y ο μεγαλύτερος και Z ο μικρότερος από τους αριθμούς στους βώλους που επιλέξαμε

- 1) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Y \leq y)$
- 2) Υπολογίστε την πιθανότητα $P(Z \geq z)$.

4. Ο Στέλιος και η Κατερίνα παίζουν το εξής παιχνίδι. Ο Στέλιος ρίχνει ένα νόμισμα και ποντάρει όλα του τα χρήματα στο να έρθει κορώνα. Αν έρθει κορώνα η Κατερίνα του δίνει τα διπλάσια από αυτά που πόνταρε. Αν όμως έρθουν γράμματα η Κατερίνα κρατάει τα $3/4$ του ποσού που ο Στέλιος πόνταρε και του επιστρέφει το $1/4$. Αν παίξουν αυτό το παιχνίδι 100 φορές και ο Στέλιος ξεκινάει με 10 ευρώ ποιο είναι το αναμενόμενο μέσο κέρδος του;

5. Αν X ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή στο $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ βρείτε την γεννήτρια συνάρτηση $\Phi_X(t)$.

6. Δείξτε ότι αν X, Y είναι τ.μ. που ακολουθούν διωνυμική κατανομή με παραμέτρους n_1, p και n_2, p αντίστοιχα, τότε η $Z = X + Y$ ακολουθεί επίσης διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $n_1 + n_2, p$.

7. Ο Γουίλι Γουόνκα τοποθετεί 5 τυχερά κουπόνια σε 10.000 σοκολάτες. Όποιος βρεί ένα από τα κουπόνια μπορεί να επισκεφθεί το περίφημο εργοστάσιο σοκολάτας του. Κατά μέσο όρο πόσες σοκολάτες πρέπει να αγοράσετε (και να φάτε..) για να βρείτε ένα τέτοιο κουπόνι; Λύστε το πρόβλημα με τις εξής υποθέσεις: 1) Μόλις βρείτε ένα κουπόνι σταματάτε να αγοράζετε σοκολάτες και 2) είναι άπειρες οι σοκολάτες και η πιθανότητα να βρείτε ένα κουπόνι είναι ΠΑΝΤΑ $5/10.000$ (ανεξάρτητα από το πόσες σοκολάτες έχετε εσείς ή κάποιος άλλος ήδη αγοράσει).

(**Πώς αλλάζει η απάντηση αν δεν υποθέσετε το 2) ;)